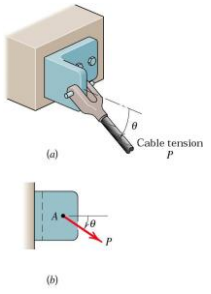
استاتیک (Statics)

فصل دوم – سیستمهای نیرو

دکتر فرهنگ هنرور

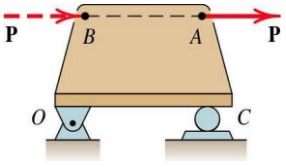
1

نیرو بردار است (اندازه، جهت و نقطه اثر دارد)



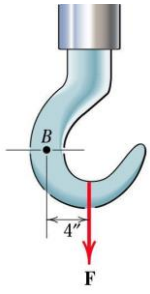
2

قابلیت انتقال (transmissibility):



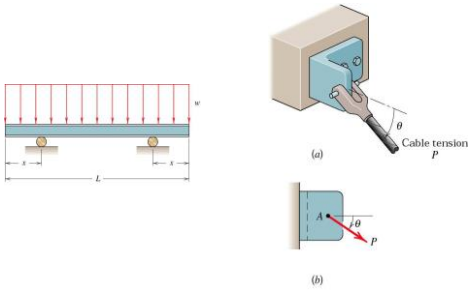
3

نیروی تماسی (contact) و حجمی (body):



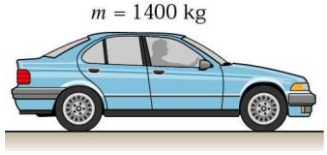
4

نیروی متمرکز (concentrated) و گسترده (distributed) :



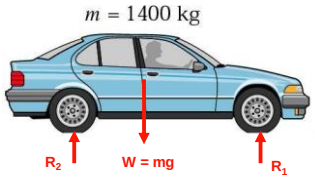
5

عمل و عکس العمل:



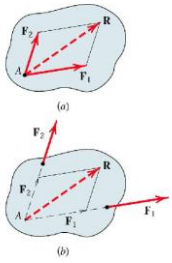
6

عمل و عکس العمل:



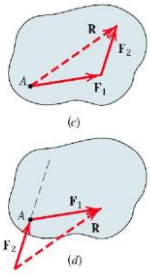
7

نیروهای همرس یا متقارب (concurrent forces):



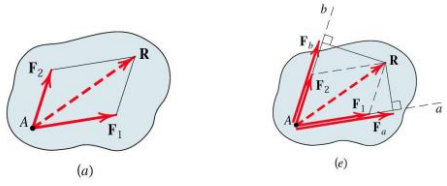
8

نیروهای همرس یا متقارب (concurrent forces):



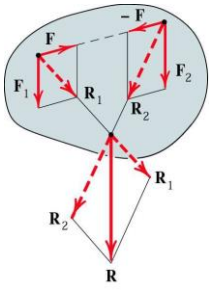
9

مولفه های یک بردار:



10

جمع دو بردار موازی:

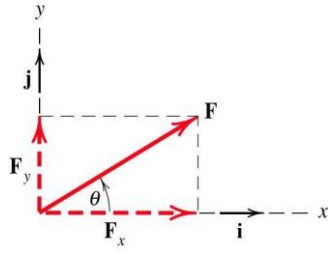


- برای جمع کردن دو بردار موازی ابتدا آنها را با دو نیروی مساوی، مخالف جهت و همراستا جمع کنید. جمع برداری دو بردار بدست آمده برابر برآیند دو بردار موازی خواهد بود.

- بردار برآیند دارای اندازه، جهت و امتداد اثر صحیح میباشد.

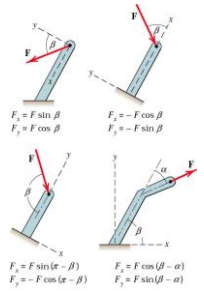
11

سیستم های دوبعدی نیرو:



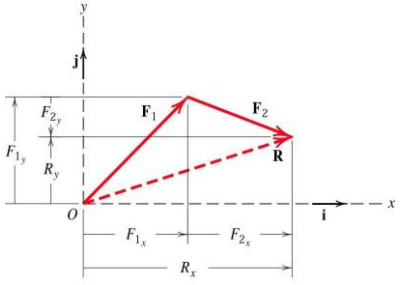
12

انتخاب سیستم مختصات مناسب:



13

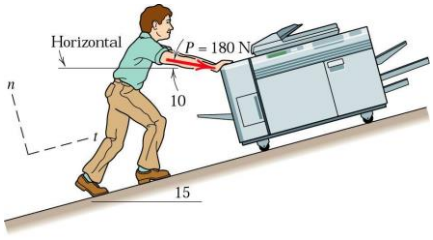
یافتن مولفه های یک بردار:



14

سوال:

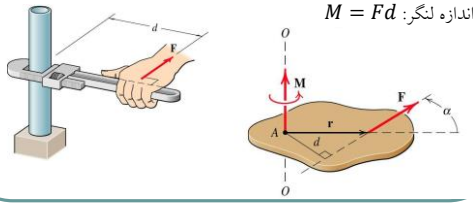
• **روابط لازم برای محاسبه مولفه های نیروی *P* در جهات *n* و *t* را بنویسید.**



16

لنگر یا گشتاور (Moment):

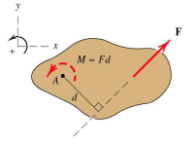
- نیرو میتواند حرکت در امتداد خط اثر یا دوران جسم حول یک محور را باعث شود.
- تمایل به دوران در اثر اعمال نیرو را لنگر یا گشتاور گویند.
- لنگر پیچشی : (torque)
- اندازه لنگر: $M = Fd$



17

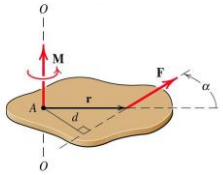
لنگر (Moment):

- تعیین جهت لنگر با استفاده از قانون دست راست صورت میگیرد: هر گاه چهار انگشت دست راست در جهت نیرو قرار گیرند، جهت انگشت شست، جهت لنگر را مشخص میکند.
- واحد لنگر نیوتن-متر است. (N-m یا lb-ft)
- اگر لنگر در صفحه باشد، میگوییم لنگر حول نقطه.
- اگر نیرو در امتداد خط اثر خود لغزانده شود، لنگر آن حول نقطه *A* تغییر نمی‌کند.



18

ضرب خارجی (cross product):



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = r\,F \sin\alpha$$

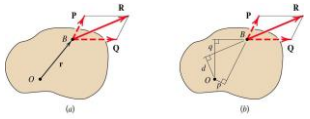
$\vec{r}$ برداری است که بین نقطه ای که میخواهیم لنگر را حول آن حساب کنیم و هر نقطه ای روی خط اثر نیروی *F* رسم شده است.

توجه: ضرب خارجی دارای خاصیت جابجایی نیست. $\vec{r} \times \vec{F} \neq \vec{F} \times \vec{r}$

19

قضیه وارینون (Varignon's Theorem):

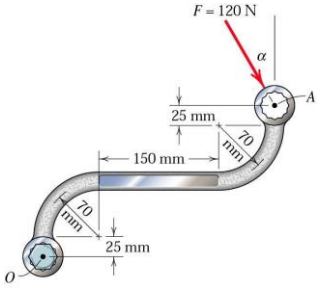
گشتاور یک نیرو حول یک نقطه مساوی مجموع گشتاورهای مولفه های آن نیرو حول آن نقطه است (گشتاور ساعتگرد را مثبت فرض میکنیم).



$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{R}$$
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$
$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{P} + \vec{Q})$$
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{Q}$$
$$M_0 = R\,d = -\,p\,P + q\,Q$$

20

مسئله ۲-۵۸

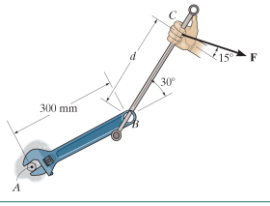


• زاویه α که در آن گشتاور نیروی F حول نقطه O بیشینه است را بدست آورید؟

22

مثال:

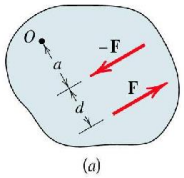
یکی از روشهای معمول برای افزایش گشتاور یک آچار، استفاده از میله واسطی مانند میله BC در شکل زیر است. اگر برای سفت کردن مهره A گشتاور ساعتگردی معادل $M_A = 120$ N-m لازم باشد و بدانیم که $F = 200$ N، فاصله d لازم برای ایجاد این گشتاور را بدست آورید؟



25

زوج نیرو (کوپل couple):

گشتاوری که توسط دو نیروی مساوی، مخالف و غیرهمراستا ایجاد میشود را کوپل مینامند.



(a)

$$M = F(a+d) - Fa$$
$$M = F\,d$$

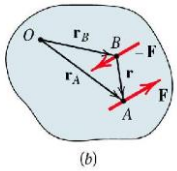
گشتاور کوپل حول همه نقاط صفحه یکسان است. به عبارتی کوپل یک بردار آزاد است.

26

زوج نیرو (کوپل couple):

27

استفاده از جبر برداری در محاسبه کوپل:



(b)

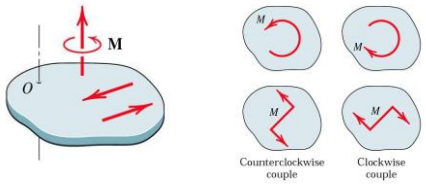
$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F})$$
$$\vec{M} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$
$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$$
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

باز هم ملاحظه میکنیم که گشتاور M ارتباطی با نقطه O ندارد و این گشتاور حول همه نقاط صفحه مقداری ثابت دارد.

28

زوج نیرو (کوپل couple):

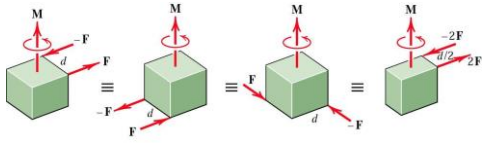
کوپل M را میتوان به صورت یک بردار آزاد نمایش داد.



29

کوپل:

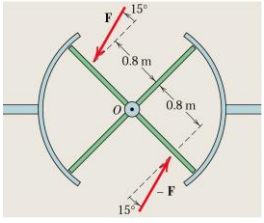
• همه کوپلهای زیر مساوی هستند.



30

سوال:

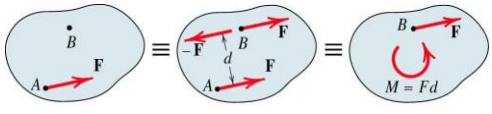
• معادله لازم برای محاسبه گشتاور کوپل نشان داده شده را بنویسید.



31

سیستم های کوپل – نیرو:

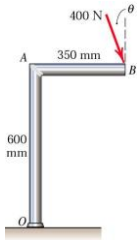
• میتوان یک نیرو را در صفحه جابجا کرد به شرطی که کوپل معادل آن نیز لحاظ شود.



• این فرایند کاربرد زیادی در حل مسائل مکانیک دارد.

32

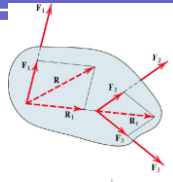
مثال:



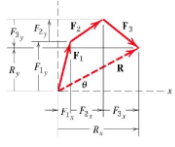
اگر زاویه $\theta = 20°$ باشد، سیستم کوپل–نیروی معادل را یکبار در نقطه A و یکبار در نقطه O حساب کنید.

33

برآیند نیروها (Resultants):



برای یک سیستم نیرویی که بر یک جسم صلب وارد میشود، ساده ترین ترکیب نیرویی که بدون تغییر اثر خارجی میتواند جایگزین سیستم نیرو شود را برآیند آن سیستم نیرو گویند.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$$

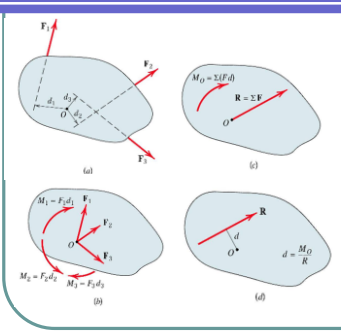
$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y$$

$$R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

36

روش جبری محاسبه برآیند:

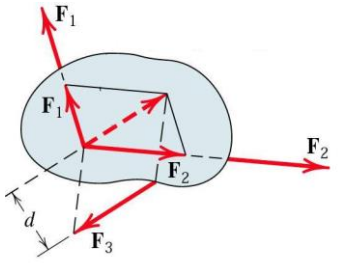


اصل لنگرها:

$$R = \sum F$$
$$M_o = \sum M = \sum F\, d$$
$$R\, d = M_o$$

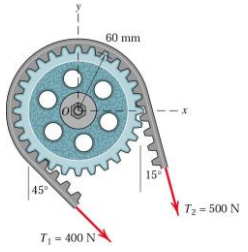
37

سوال: برآیند این سیستم چیست؟



38

مثال:

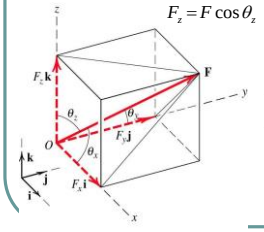


برآیند سیستم نیرویی نشان داده شده در شکل را بدست آورید و محل برخورد نیروی برآیند با محورهای x و y را حساب کنید.

39

مولفه های قائم یک نیرو در فضای سه بعدی:

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$F_y = F\cos\theta_y \qquad \vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$$
$$F_z = F\cos\theta_z \qquad \vec{F} = F\left(\hat{i}\cos\theta_x + \hat{j}\cos\theta_y + \hat{k}\cos\theta_z\right)$$



$$l = \cos\theta_x \qquad m = \cos\theta_y \qquad n = \cos\theta_z$$
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$
$$\vec{F} = F\left(l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}\right)$$
$$\vec{F} = F\,\vec{n}_F \qquad \vec{n}_F = l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}$$

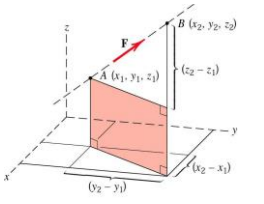
41

یافتن مولفه های یک نیرو:

1. با معین بودن دو نقطه روی خط اثر نیرو
2. با معین بودن دو زاویه خط اثر نیرو نسبت به دو محور

42

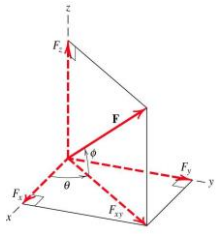
معین بودن دو نقطه روی خط اثر نیرو:



$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = F\frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

43

معین بودن دو زاویه خط اثر نیرو نسبت به دو محور:

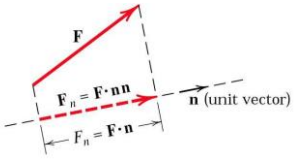


$$F_{xy} = F\cos\phi$$
$$F_z = F\sin\phi$$

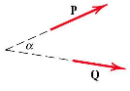
$$F_x = F_{xy}\cos\theta = F\cos\phi\cos\theta$$
$$F_y = F_{xy}\sin\theta = F\cos\phi\sin\theta$$

ضرب داخلی:

• از ضرب داخلی دو بردار میتوان برای یافتن مولفه های یک بردار استفاده کرد.



محاسبه زاویه بین دو بردار:



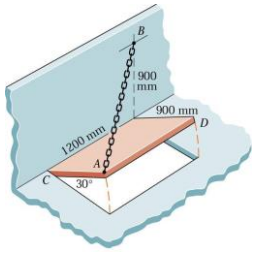
$$\mathrm{P.Q} = PQ\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{P.Q}}{PQ}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{\mathbf{P.Q}}{PQ}$$

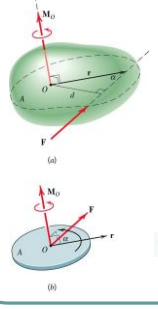
مثال: مسئله 2-116:

• نیروی 100 نیوتن در امتداد AB است. تصویر آن را در امتداد CD بدست آورید.



لنگر و کوپل (حالت سه بعدی):

• دراین حالت بهتر است از روش برداری به جای روش ضرب نیرو در بازوی آن استفاده شود.



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} + (r_zF_x - r_xF_z)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}$$

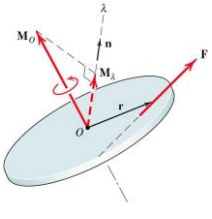
لنگر حول یک محور دلخواه:

• میخواهیم لنگر نیروی $\boldsymbol{F}$ را حول محور λ که از $\boldsymbol{O}$ میگذرد حساب کنیم.

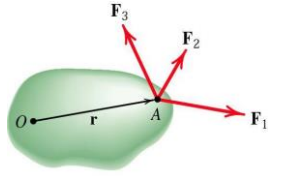
$$M_\lambda = \vec{M}_o\cdot\hat{n}$$
$$\vec{M}_o = \vec{r}\times\vec{F}$$
$$M_\lambda = (\vec{r}\times\vec{F}\cdot\hat{n})$$
$$\vec{M}_\lambda = (\vec{r}\times\vec{F}\cdot\hat{n})\hat{n}$$

$$|\mathbf{M}_\lambda| = M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$\hat{n} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$$



قضیه وارینون (در حالت سه بعدی):

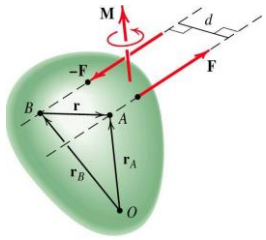


$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}_1+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_2+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_3+\cdots=\mathbf{r}\times(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+\cdots)$$
$$=\mathbf{r}\times\Sigma\mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_O=\Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})=\mathbf{r}\times\mathbf{R}$$

51

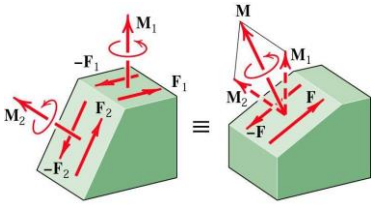
کوپل (حالت سه بعدی):



52

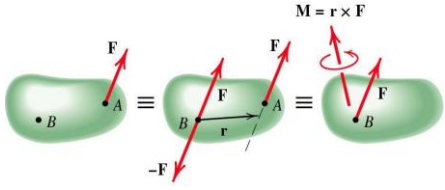
جمع کوپل ها (حالت سه بعدی):

• کوپل بردار است و طبق قانون بردارها جمع میشود.



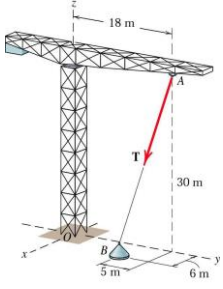
53

سیستم کوپل-نیرو (حالت سه بعدی):



54

مثال:



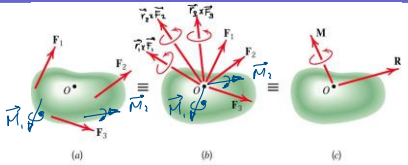
• لنگر نیروی $T = 24$ kN را حول پایه O بدست آورید.

الف) با استفاده از ضرب برداری

ب) با تجزیه نیرو و استفاده از قضیه وارینون

55

برآیند یک سیستم نیرو-کوپل (حالت سه بعدی):



$$R_x=\Sigma F_x \qquad R_y=\Sigma F_y \qquad R_z=\Sigma F_z$$
$$R=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2+(\Sigma F_z)^2} \qquad \mathbf{R}=\mathbf{R}_x\mathbf{i}+\mathbf{R}_y\mathbf{j}+\mathbf{R}_z\mathbf{k}$$

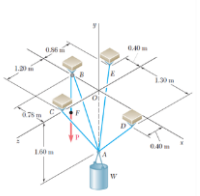
$$M_x=\Sigma M_x+\Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_x \qquad M_y=\Sigma M_y+\Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_y \qquad M_z=\Sigma M_z+\Sigma(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_z$$
$$M=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2} \qquad \mathbf{M}=\mathbf{M}_x\mathbf{i}+\mathbf{M}_y\mathbf{j}+\mathbf{M}_z\mathbf{k}$$

56

وضعیتهای متفاوت نیروها

- **نیروهایی که همگی در یک صفحه هستند – برآیند تنها یک نیرو خواهد بود. قبلاً بحث شده است.**
- **نیروهای همرس – برآیند تنها یک نیرو خواهد بود.**
- **نیروهای موازی که همگی در یک صفحه نباشند – برآیند یک نیرو و یک کوپل است. نیروها به صورت جبری با هم جمع میشوند.**

نیروهای همرس:

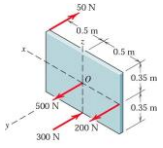


برآیند این سیستم فقط یک نیرو است و گشتاور صفر است.

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{R_x i} + \mathbf{R_y j} + \mathbf{R_z k}$$

نیروهای موازی:



برآیند این سیستم:

- **یک نیرو در جهت نیروها**
- **دو گشتاور نسبت به دو محوری که نیروها در راستای آنها نیستند.**

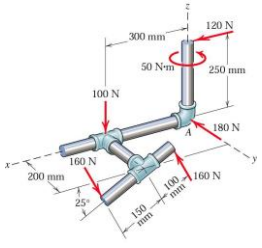
$$R = R_y = \Sigma F_y$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{R_y j}$$

$$\mathrm{M_x} = \Sigma(\mathrm{r} \times \mathrm{F})_x \qquad \mathrm{M_z} = \Sigma(\mathrm{r} \times \mathrm{F})_z$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2} \qquad \mathbf{M} = \mathbf{M_x i} + \mathbf{M_z k}$$

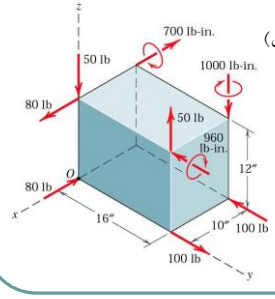
مثال:

برآیند سیستم نیرویی نشانداده شده را با یک نیروی R و یک کوپل M در نقطه A جایگزین کنید.



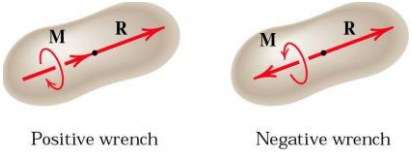
سوال:

برآیند نیرویی (نیرو و کوپل معادل) را در نقطه O بدست آورید.

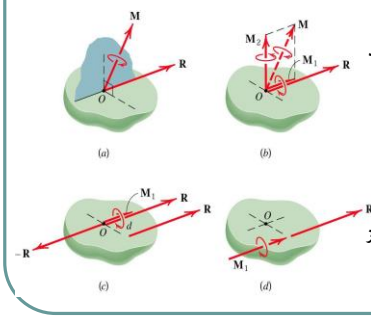


برآیند آچار (Wrench Resultant) :

• حالتی که بردار برآیند نیرو و بردار برآیند کشتاور همراستا هستند را آچار (wrench) مینامیم.



برآیند آچار (Wrench Resultant) :



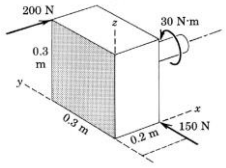
• برآیند هر سیستم نیرویی را میتوان به برآیند آچار تبدیل کرد.

• برآیند آچار ساده ترین شکل نمایش برآیند یک سیستم است ولی کاربرد زیادی ندارد زیرا معمولاً برآیند را در نقطه خاصی از جسم مثل مرکز جرم قرار میدهیم.

63

مثال: سوال امتحان میان‌ترم سال‌های قبل

1. دو نیرو و کوپل نشان داده شده را با یک برایند آچار **(wrench)** جایگزین کنید. گشتاور **M** آچار و مختصات نقطه **P** که نیروی آچار صفحه **yz** را قطع میکند بدست آورید.



64