

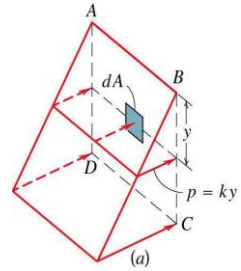


استاتیک - پیوست الف

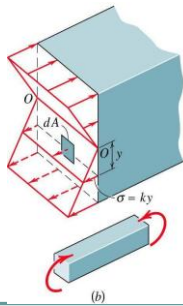
لنگرهای لختی سطح
Area Moments of Inertia



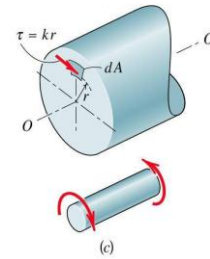
فشار هیدروستاتیک



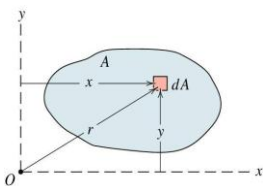
خمش تیرها



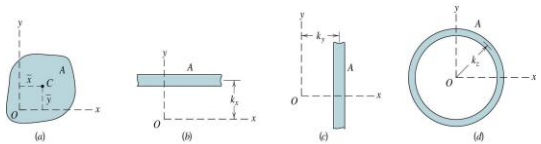
پیچش تیرها



گشتاور ماند - لنگر لختی - ممان اینرسی

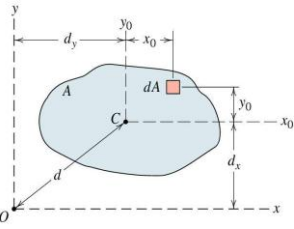


شعاع ژیراسیون

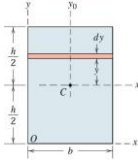




قضیه محورهای موازی



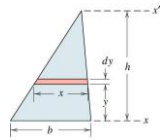
مثال A/1:



- لنگر لختی مستطیل را حول محورهای X_0, Y_0 و X, Y که از مرکز شکل میگذرند حساب کنید. همچنین گشتاور ماند را حول محورهای X و Z بدست آورید.



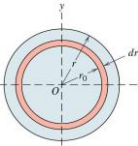
مثال A/2:



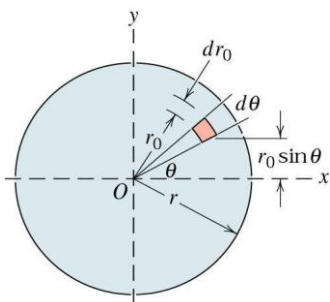
- لنگر لختی مثلث را حول محور X و محورهای موازی X که از مرکزوار و راس مثلث میگذرند بدست آورید.



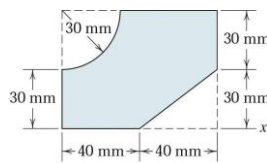
مثال A/3:



- گشتاور ماند دایره را حول محورهای X و Y و Z حساب کنید. شعاعهای زیراسیون را نیز بدست آورید.



شکلهای مرکب (Composite Areas)





شکلهای مرکب

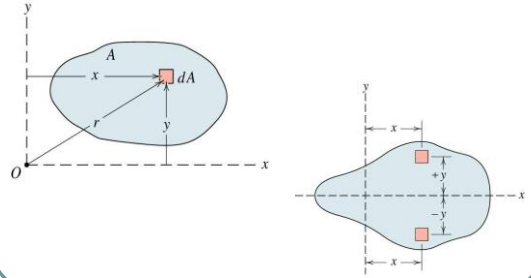
Part	Area, A	d_x	d_y	Ad_x^2	Ad_y^2	\bar{I}_x	\bar{I}_y
Sums	ΣA			ΣAd_x^2	ΣAd_y^2	$\Sigma \bar{I}_x$	$\Sigma \bar{I}_y$

$$I_x = \Sigma \bar{I}_x + \Sigma Ad_x^2$$

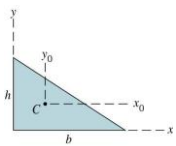
$$I_y = \Sigma \bar{I}_y + \Sigma Ad_y^2$$



حاصلضرب لختی (Product of Inertia)



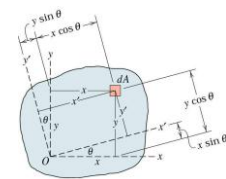
مسئله 71/A:



- حاصلضرب لختی را نسبت به محورهای X و Y و محورهایی که از مرکزوزن مثلث می گذرند بدست آورید.



دوران محورها (Rotation of Axes)



$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (y \sin \theta + x \cos \theta)^2 dA$$



دوران محورها (Rotation of Axes)

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$



دوران محورها (Rotation of Axes)

$$I_{x'y'} = \int x'y' dA = \int (y \sin \theta + x \cos \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$



دوران محورها (Rotation of Axes)

- یافتن زاویه ای که مقادیر لنگر لختی در آن زاویه ماکزیمم یا مینیمم میگردد:

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = (I_y - I_x) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$



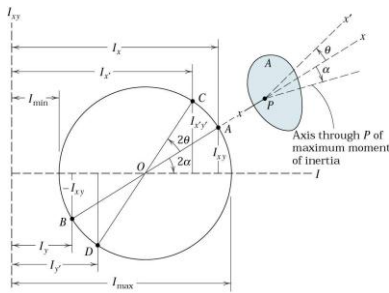
مقادیر ماکزیمم و مینیمم لنگر لختی:

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

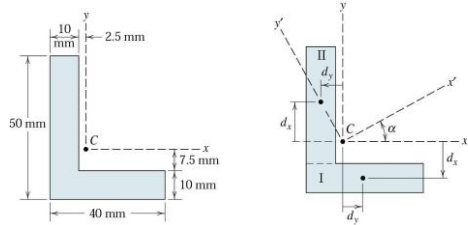


دایره موهر (Mohr's Circle)



مسئله نمونه A/11:

- موقعیت (زاویه) محورهای اصلی لنگر لختی که در مرکز شکل زیر قرار دارند و مقادیر ماکزیمم و مینیمم لنگر لختی را بدست آورید.



محاسبه ممان های اینرسی:

For part I:

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \quad I_x = \frac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(12.5)^2 = 6.58(10^4) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(10)(40)^3 + (400)(7.5)^2 = 7.58(10^4) \text{ mm}^4$$

For part II:

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \quad I_x = \frac{1}{12}(10)(40)^3 + (400)(12.5)^2 = 11.58(10^4) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(7.5)^2 = 2.58(10^4) \text{ mm}^4$$

For parts I and II:

$$I_x = 6.58(10^4) + 11.58(10^4) = 18.17(10^4) \text{ mm}^4$$

$$I_y = 7.58(10^4) + 2.58(10^4) = 10.17(10^4) \text{ mm}^4$$



محاسبه حاصلضرب اینرسی:

For part I:

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \quad I_{xy} = 0 + (-12.5)(+7.5)(400) = -3.75(10^4) \text{ mm}^4$$

where $d_x = -(7.5 + 5) = -12.5 \text{ mm}$
and $d_y = +(20 - 10 - 2.5) = 7.5 \text{ mm}$

For part II:

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \quad I_{xy} = 0 + (12.5)(-7.5)(400) = -3.75(10^4) \text{ mm}^4$$

where $d_x = +(20 - 7.5) = 12.5 \text{ mm}$, $d_y = -(5 + 2.5) = -7.5 \text{ mm}$

For parts I and II:

$$I_{xy} = -3.75(10^4) - 3.75(10^4) = -7.50(10^4) \text{ mm}^4$$



$$\left[\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right] \quad \tan 2\alpha = \frac{2(-7.50)}{10.17 - 18.17} = 1.875$$

$$2\alpha = 61.9^\circ \quad \alpha = 31.0^\circ \quad \text{Ans.}$$

We now compute the principal moments of inertia from Eqs. A/9 using α for θ and get I_{\max} from I_x and I_{\min} from I_y . Thus,

$$I_{\max} = \left[\frac{18.17 + 10.17}{2} + \frac{18.17 - 10.17}{2} (0.471) + (7.50)(0.882) \right] (10^4)$$

$$= 22.7(10^4) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans.}$$

$$I_{\min} = \left[\frac{18.17 + 10.17}{2} - \frac{18.17 - 10.17}{2} (0.471) - (7.50)(0.882) \right] (10^4)$$

$$= 5.67(10^4) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans.}$$



رسم دایره موهر:

