مفاهیم و مقدمات

هدف این فصل، شرح مفاهیم، مقدمات و نتایج مقدماتی و اولیه برای کل بحث مطروحه در این درس است.

۱.۱. فضاهای توپولوژیک

در این بخش، برای بیان لم زورن که یکی از مهمترین ابزار در ریاضیات مدرن است، ابتدا به سراغ بیان ترتیب (order) روی یک مجموعه ناتهی X رفته و سپس نتایج مقدماتی در فضاهای متریک و فضاهای توپولوژیک را خلاصه وار می‌آوریم. در تمام کتاب، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ به ترتیب مجموعه‌های اعداد حقیقی و اعداد صحیح مثبت (طبیعی) اند.

تعریف ۱. مجموعه‌های جزئاً مرتب. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی است. در X یک رابطه که آن را با نماد $\le$ نمایش می‌دهیم و دارای خواص زیر است:

۱. برای هر x در X، $x \le x$؛

۲. برای هر $x, y \in X$، اگر $x \le y$ و $y \le x$ آن‌گاه $x = y$؛

۳. برای هر $x, y, z \in X$، اگر $x \le y$ و $y \le z$ آن‌گاه $x \le z$؛

را یک رابطه ترتیب جزئی (Partially order) نامیم. مجموعه ناتهی X با یک رابطه ترتیب جزئی تعریف شده روی آن را یک مجموعه جزئاً مرتب گوییم.

تعریف ۲. فرض کنید A زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه جزئاً مرتب X است. عنصر x در X را یک کران پایین A نامیم، هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $x \le a$، و یک کران پایین مجموعه A را بزرگترین کران پایین A گوییم، درصورتی که این کران پایین بزرگتر یا مساوی هر کران پایین دیگر A باشد. یعنی کران پایین $a \in X$ از مجموعه A را بزرگترین کران پایین A نامیم درصورتی که برای هر کران پایین دلخواه $b \in X$ از مجموعه A داشته باشیم $b \le a$.

به‌طور مشابه عضو y در X را یک کران بالای مجموعه ناتهی A گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \leq y$ و کوچکترین کران بالای A، یک کران بالا برای A است به‌طوری که کوچکتر یا مساوی هر کران بالای دیگری برای A باشد. یعنی کران بالای $a \in X$ از مجموعه A را کوچکترین کران بالای A نامیم، در صورتی که برای هر کران بالای دلخواه $b \in X$ از مجموعه A، $a \leq b$.

معمولاً بزرگترین کران پایینی A را اینفیمم A نامیده و با $\inf A$ نمایش می‌دهیم و کوچکترین کران بالای A را سوپریمم A نامیده و با $\sup A$ نشان می‌دهیم.

اگر $\inf A$ و $\sup A$ موجود و متعلق به مجموعه A باشند، آنها را مینیمم و ماکزیمم A نامیده و با $\min A$ و $\max A$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴. ترتیب کلی. اگر رابطه ترتیب جزئی $\leq$ تعریف شده روی X دارای خاصیت چهارم زیر نیز باشد

۴. برای هر دو عضو $x, y \in X$، یا $x \leq y$ یا $y \leq x$ باشد، به عبارت دیگر هر دو عضو x و y در X قابل مقایسه باشند،

گوییم رابطه ترتیب جزئی $\leq$ تعریف شده روی X یک رابطه ترتیب کلی (یا خطی) است و مجموعه جزئاً مرتب X برقرار در شرط (4) را یک مجموعه کلاً مرتب یا یک مجموعه به‌طور خطی مرتب شده نامیم.

تعریف ۴. زیرمجموعه A از یک مجموعه جزئاً مرتب X را یک زنجیر (chain) نامیم هرگاه A مجموعه کلاً مرتب باشد.

تعریف ۵. فرض کنید X یک مجموعه جزئاً مرتب است. عضو x در X را ماکسیمال گوییم هرگاه

$$y \geq x \Rightarrow y = x.$$

به‌طور مشابه عضو $x \in X$ را عضو مینیمال نامیم هرگاه

$$y \leq x \Rightarrow y = x.$$

با توجه به تعاریف فوق، آماده بیان لم زورن هستیم.

قضیه ۶. لم زورن. فرض کنید X یک مجموعه جزئاً مرتب است به طوری که هر زنجیر آن دارای یک کران بالا باشد، آنگاه X دارای یک عضو ماکسیمال است.

تعریف ۷. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی است. یک متر روی X تابع حقیقی d تعریف شده روی زوج‌های مرتب از عناصر X است به طوری که در سه شرط زیر برقرار است:

۱. برای هر $x,y \in X$، $d(x,y) \geq 0$ و $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$؛

۲. برای هر $x,y \in X$، $d(x,y)=d(y,x)$؛

۳. برای هر $x,y,z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$.

تابع d به هر زوج (x,y) از عناصر X عدد حقیقی نامنفی $d(x,y)$ را متناظر می‌کند و وابسته به ترتیب مولفه‌ها نیست. $d(x,y)$ را فاصله بین x و y نامیم. یک فضای متریک شامل دو چیز است: یک مجموعه ناتهی X و متر d روی X و معمولاً فضای متریک (X,d) را با نماد X نمایش می‌دهیم.

فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. فرض کنید x_0 یک نقطه از X و r عدد حقیقی مثبت است، گوی باز $S_r(x_0)$ با مرکز x_0 و شعاع r، زیرمجموعه X تعریف شده توسط

$$S_r(x_0)=\{x \in X : d(x_0,x)<r\},$$

است. گوی بسته $S_r[x_0]$ توسط

$$S_r[x_0]=\{x \in X,\ d(x_0,x) \leq r\},$$

تعریف می‌شود که در آن r عدد حقیقی نامنفی است.

تعریف ۸. زیرمجموعه G از فضای متریک X را یک مجموعه باز نامیم، هرگاه برای هر x در G، عدد حقیقی مثبت r وجود داشته باشد به طوری که $S_r(x) \subseteq G$. زیرمجموعه F

از X را یک مجموعه بسته نامیم، هرگاه متمم آن یعنی F^c باز باشد.

تعریف ۹. فرض کنید X و Y فضاهای متریک با مترهای d_1 و d_2 بوده و f نگاشتی از X به‌توی Y است. گوییم f در نقطه x_0 از X پیوسته است، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

نگاشت f از X به‌توی Y را پیوسته نامیم هرگاه f در هر نقطه از X پیوسته باشد.

تعریف ۱۰. نگاشت f از X به‌توی Y را نا انبساطی (غیرانبساطی، نامنبسط یا غیرمنبسط) نامیم، هرگاه به ازای هر x و y در X

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y),$$

که در آن d_1 و d_2 به ترتیب مترهای فضای متریک X و فضای متریک Y اند.

تعریف ۱۱. نگاشت f از X به‌توی Y را انقباضی یا منقبض نامیم هرگاه عدد نامنفی $r<1$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq r\, d_1(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

به وضوح از تعریف ۹ دیده می‌شود که نگاشت انقباضی f از X به‌توی Y پیوسته است.

تعریف ۱۲. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d بوده و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط در X است. گوییم $\{x_n\}$ همگرا است، هرگاه نقطه x در X وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیح مثبت n_0 با شرط

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

را بیابیم. در این حالت معمولاً می‌نویسیم $x_n \to x$ یا $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

تعریف ۱۳. فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط در X است. گوییم $\{x_n\}$ کوشی است، هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، عدد طبیعی n_0 وجود داشته باشد به طوری که

$$m,n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n)<\varepsilon.$$

به وضوح هر دنباله همگرا در X یک دنباله کوشی است.

تعریف ۱۴. یک فضای متریک کامل، فضای متریکی است که در آن هر دنباله کوشی همگرا است.

قضیه ۱۵. اشتراک کانتور. فرض کنید X یک فضای متریک کامل و $\{F_n\}$ دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های ناتهی بسته X است به طوری که

$$\delta(F_n)=\sup\{d(x,y): x,y\in F_n\}\longrightarrow 0$$

آنگاه $F=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ دقیقاً شامل یک نقطه است. (یادآوری می‌کنیم که دنباله $\{F_n\}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی X را نزولی گوییم هرگاه $F_1\supset F_2\supset F_3\supset\dots\supset F_n\supset\dots$ و $\delta(F)$ تعریف شده در بالا را قطر مجموعه F گوییم)

قضیه ۱۶. اصل انقباض باناخ. فرض کنید X یک فضای متریک کامل و f یک انقباض از X به توی خودش است. آنگاه f دارای یک نقطه ثابت منحصربفرد است. ($u\in X$ را یک نقطه ثابت نگاشت f نامیم هرگاه $f(u)=u$)

اثبات. چون f یک انقباض است پس عدد حقیقی نامنفی $r<1$ با خاصیت

$$d(f(x),f(y))\le r\,d(x,y),\qquad \forall x,y\in X,$$

وجود دارد. فرض کنید x_0 نقطه دلخواهی در X است. قرار می‌دهیم

$$x_1=f(x_0),\quad x_2=f(x_1)=f^2(x_0),\ \dots,\ x_n=f(x_{n-1})=f^n(x_0),\ \dots$$

در این صورت

$$d(x_{n+1},x_n)=d(f(x_n),f(x_{n-1}))\le r\,d(x_n,x_{n-1})$$
$$=r\,d(f(x_{n-1}),f(x_{n-2}))$$

$$\le r^2 d(x_{n-1}, x_{n-2})$$
$$\le \cdots \le r^n d(x_1, x_0).$$

حال اگر $m>n$ آنگاه

$$d(x_m,x_n) \le d(x_m,x_{m-1}) + d(x_{m-1},x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1},x_n)$$
$$\le r^{m-1}d(x_1,x_0) + r^{m-2} d(x_1,x_0)+\cdots+r^n d(x_1,x_0)$$
$$= r^n(1+r+\cdots+r^{m-n-1})\, d(x_1,x_0)$$
$$\le \frac{r^n}{1-r}\, d(x_1,x_0).$$

چون $r<1$، پس دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کشی است و از کامل بودن X نتیجه می‌شود که $\{x_n\}$ همگرا است یعنی نقطه x در X وجود دارد به طوری که $x_n \to x$. حال از پیوستگی f داریم

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

یعنی x (حد دنباله $\{x_n\}$) یک نقطه ثابت f است. کافی است نشان دهیم x تنها نقطه در X با خاصیت فوق است. اگر y نیز یک نقطه ثابت تابع f باشد یعنی $y = f(y)$ آنگاه

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)) \le r\, d(x,y)$$

چون $r<1$ پس $d(x,y)=0$ یا $y=x$ و اثبات قضیه کامل است.

تعریف ۷. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. کلاس $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X نامیم، هرگاه در شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $X \in \mathcal{A}$ ، $\emptyset \in \mathcal{A}$ ؛

۲. اجتماع هر کلاس از مجموعه‌ها در $\mathcal{A}$، مجموعه‌ای در $\mathcal{A}$ باشد.

۳. اشتراک هر کلاس از تعداد متناهی (کلاس متناهی) از مجموعه‌ها در $\mathcal{A}$، مجموعه‌ای در $\mathcal{A}$ باشد.

یک فضای توپولوژیک شامل دو چیز است: یک مجموعه ناتهی X و یک توپولوژی $\mathcal{A}$ روی X. مجموعه‌ها در کلاس $\mathcal{A}$ را مجموعه‌های باز فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{A})$ نامیم. معمولاً فضای

توپولوژیک $(X, \mathfrak{T})$ را با همان نماد X نمایش می‌دهیم.

یک همسایگی از یک نقطه (یا یک مجموعه) در فضای توپولوژیک X، مجموعه‌ی بازی شامل آن نقطه (یا آن مجموعه) است. به عبارت دیگر یک همسایگی از یک نقطه x (یا یک زیرمجموعه A از X) عضوی از توپولوژی $\mathfrak{T}$ روی X مانند E است به طوری که $x \in E$ (یا $A \subset E$).

مجموعه F در فضای توپولوژیک $(X, \mathfrak{T})$ بسته است، هرگاه $F^c \in \mathfrak{T}$ یعنی F یک مجموعه بسته در یک فضای توپولوژیک است هرگاه متمم آن باز باشد.

فرض کنید X یک فضای متریک دلخواه است و کلاس تمام زیرمجموعه‌های باز X به مفهوم تعریف (۸) است. به وضوح کلاس یک توپولوژی روی X است و آن را توپولوژی معمولی روی فضای متریک نامیم (Usual topology) در تعریف این مجموعه‌ها، مجموعه‌های باز تولید شده توسط متر فضا است.

تعریف ۱۸. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک است. یک پایه باز برای X کلاسی از مجموعه‌های باز با این خاصیت است که هر مجموعه باز (هر عضو توپولوژی) اجتماع مجموعه‌ها در این کلاس است. مجموعه‌ها در یک پایه باز را معمولاً مجموعه‌های باز پایه‌ای نامیم. یک زیرپایه باز کلاسی از زیرمجموعه‌های باز (اعضایی از توپولوژی) X است که اشتراک‌های متناهی آنها یک پایه باز برای توپولوژی است.

قضیه ۱۹. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است و فرض کنید $\mathcal{C}$ کلاسی دلخواه از زیرمجموعه‌های X است. آنگاه $\mathcal{C}$ را می‌توان به عنوان یک زیرپایه باز برای یک توپولوژی روی X در نظر گرفت، یعنی کلاس تمام اجتماع‌های اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌ها در $\mathcal{C}$ یک توپولوژی روی X است.

تعریف ۲۰.

توپولوژی بیان شده در قضیه (۱۹) را توپولوژی تولید شده توسط کلاس $\mathcal{C}$ نامیم.

تعریف ۲۱. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک و f نگاشتی از X بتوی Y است. گوییم f در نقطه $a \in X$ پیوسته است هرگاه برای هر همسایگی $U(b)$ از $f(a)=b$ در توپولوژی روی Y، همسایگی $U(a)$ از a در توپولوژی روی X وجود داشته باشد به طوری که

$$f(U(a)) \subset U(b).$$

نگاشت f از X بتوی Y را پیوسته نامیم هرگاه f در هر نقطه از دامنه X پیوسته باشد.

قضیه ۲۲. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک و f نگاشتی از X بتوی Y است. در این صورت شرایط زیر باهم معادل اند (TFCE):

الف) f پیوسته است.

ب) تصویر معکوس هر مجموعه باز، باز است.

ج) تصویر معکوس هر مجموعه باز پایه‌ای، باز است.

د) تصویر معکوس هر مجموعه باز زیرپایه‌ای، باز است.

تعریف ۲۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از X است. کلاس $\{G_\mu : \mu \in M\}$ از زیرمجموعه‌های باز X را یک پوشش باز A نامیم، هرگاه هر نقطه از A حداقل به یکی از G_μ ها تعلق داشته باشد یعنی $A \subset \bigcup_{\mu \in M} G_\mu$ (M مجموعه‌ای اندیس است).

یک زیرکلاس از یک پوشش باز برای مجموعه A، که A را بپوشاند زیرپوشش نامیده می‌شود. زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک X را فشرده نامیم هرگاه هر پوشش باز از A دارای یک زیرپوشش متناهی باشد. بالاخص، اگر X فشرده باشد گوییم X یک فضای فشرده است.

فرض کنید $\mathcal{A}$ کلاسی از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی X است. گوییم $\mathcal{A}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است (FIP) اگر هر زیرکلاس متناهی از $\mathcal{A}$ دارای اشتراک ناتهی باشد.

قضیه ۲۴. یک فضای توپولوژیک فشرده است اگر و تنها اگر هر کلاس از مجموعه‌های بسته آن با

خاصیت اشتراک متناهی دارای اشتراک ناتهی باشد.

تعاریف ۲۵. فضای توپولوژیک X را یک فضای T_1 نامیم هرگاه هر دو نقطه متمایز آن دارای همسایگی‌هایی باشند که هیچ یک شامل نقطه دیگر نباشد.
یک فضای هاسدورف، فضای توپولوژی X است که در آن هر زوج از نقاط متمایز را بتوان توسط مجموعه‌های باز جدا کرد به عبارت دیگر هر زوج از نقاط متمایز دارای همسایگی‌های متمایز باشند. گاهی اوقات یک فضای هاسدورف را یک فضای T_2 یا یک فضای جدا شونده نامند.
یک فضای نرمال، فضای T_1 است که هر زوج از مجموعه‌های بسته متمایز آن را بتوان توسط مجموعه‌های باز جدا کرد به عبارت دیگر دارای همسایگی‌های متمایز باشند.

قضیه ۲۶. هر فضای متریک نرمال است.

قضیه ۲۷. هر فضای هاسدورف فشرده، نرمال است.
قضیه زیر یکی از قضایای اساسی مبحث توپولوژی می‌باشد.
قضیه ۲۸. لم اوریسون. فرض کنید X یک فضای نرمال است و فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های بسته متمایز X اند. آنگاه تابع حقیقی پیوسته f تعریف شده روی X با مقادیر در فاصله بسته $[0,1]$ وجود دارد به طوری که $f(A)=\{0\}$ و $f(B)=\{1\}$.

فضای حاصلضرب ۲۹. فرض کنید $\{X_\mu : \mu \in M\}$ کلاسی ناتهی از فضاهای توپولوژیک است و $X=\prod_{\mu\in M} X_\mu$ حاصلضرب مجموعه‌های X_μ است. یک عضو x در X آرایه $x=\{x_\mu : \mu\in M\}$ از نقاط در فضاهای مختصات است، که در آن هر x_μ متعلق به فضای متناظر X_μ است. برای هر اندیس μ، تابع تصویر p_μ توسط $p_\mu(x)=x_\mu$ تعریف می‌شود. روی مجموعه X توپولوژی حاصلضرب را توپولوژی تولید شده توسط کلاس S از تمام تصویرهای معکوس مجموعه‌های باز در X_μ ها

تعریف می‌کنیم، یعنی کلاس S شامل تمام زیرمجموعه‌های X به فرم $P_\mu^{-1}(G_\mu)$ است که در آن μ اندیس و G_μ زیرمجموعه باز دلخواه از X_μ است. هرگاه حاصلضرب یک کلاس ناتهی از فضاهای توپولوژیک با توپولوژی حاصلضرب تعریف شده در بالا همراه شود آن را فضای حاصلضرب نامیم.

قضیه ۳۰. تیخونف. فرض کنید $\{X_\mu : \mu \in M\}$ کلاس ناتهی دلخواهی از فضاهای فشرده است. آنگاه فضای حاصلضرب $X=\prod_{\mu\in M} X_\mu$ فشرده است.

تعریف ۳۱. یک مجموعه مستقیم شده $(D, \le)$ مجموعه ناتهی D همراه با رابطه $\le$ روی D است به طوری که

۱. برای هر $\alpha \in D$ ؛ $\alpha \le \alpha$ ؛
۲. برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in D$ ، اگر $\beta \le \alpha$ و $\gamma \le \beta$ آنگاه $\alpha \le \gamma$ ؛
۳. برای هر دو عضو α, β در D ، عضو γ در D وجود دارد به طوری که $\alpha \le \gamma, \beta \le \gamma$.

تعریف ۳۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و D یک مجموعه مستقیم شده است. مجموعه $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ از عناصر X را یک تور در X یا دنباله تعمیم یافته در X نامیم. برای سادگی تور $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ را معمولاً به صورت $\{x_\alpha\}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۳. فرض کنید $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ یک تور در فضای توپولوژیک X است. گوییم این تور همگرا به x_0 در X است، هرگاه برای هر همسایگی U از x_0 ، عضو $\alpha_0 \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha \geq \alpha_0$ نتیجه دهد $x_\alpha \in U$. در این حالت گوییم حد $\{x_\alpha\}$ موجود است و برابر x_0 می‌باشد. معمولاً می‌نویسیم

$$x_\alpha \to x_0 \quad \text{یا} \quad \lim_\alpha x_\alpha = x_0 .$$

تعریف ۳۴. فرض کنید $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ یک تور در فضای توپولوژی X است، تور

$\{x_{\alpha_\beta} : \beta \in E\}$ را یک زیرتور $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ در X نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\{x_{\alpha_\beta} : \beta \in E\} \subset \{x_\alpha : \alpha \in D\}$

۲. برای هر $\alpha_0 \in D$، عضو $\beta_0 \in E$ موجود باشد به طوری که $\beta \geq \beta_0$ نتیجه دهد $\alpha_\beta \geq \alpha_0$.

قضیه ۳۵. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک و f نگاشتی از X به توی Y است. آنگاه f در $x_0 \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور $\{x_\alpha\}$ از X

$$x_\alpha \to x_0 \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x_0).$$

قضیه ۳۶. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک است. در این صورت X فشرده است اگر و تنها اگر هر تور $\{x_\alpha\}$ در X دارای زیرتوری همگرا به یک نقطه از X باشد.

تعریف ۳۷. فرض کنید $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ یک تور در فضای توپولوژیک X است. نقطه p در X را یک نقطه تجمعی (انباشتگی) تور $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ نامیم هرگاه برای هر همسایگی U از p و هر $\alpha \in D$، عضو $\beta \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $\beta \geq \alpha$، $x_\beta \in U$.

قضیه ۳۸. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ یک تور در X است. در این صورت اگر $p \in X$ یک نقطه تجمعی تور $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ باشد، آنگاه زیرتوری از $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ وجود دارد به طوری که همگرا به p است. برعکس، اگر یک زیرتور از تور $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ همگرا به نقطه $p \in X$ باشد، آنگاه نقطه p یک نقطه تجمعی برای $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ است.

تعریف ۳۹. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\{Y_\mu : \mu \in M\}$ کلاسی ناتهی از فضاهای توپولوژیک است و فرض کنید برای هر μ، f_μ نگاشتی از X به توی Y_μ است. توپولوژی ضعیف تولید شده توسط f_μها اشتراک تمام توپولوژی‌ها روی X است به طوری که نسبت به آن تمام f_μها نگاشتهای پیوسته‌اند.

دکتر سید هاشم پروانه مسیحا　　　　دانشکده　　　　گروه:

قضیه ۴۰. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\{Y_\mu : \mu \in M\}$ کلاسی ناتهی از فضاهای توپولوژیک است و برای هر μ، f_μ نگاشتی از X به توی Y_μ است. در این صورت توپولوژی ضعیف تولید شده توسط f_μ ها برابر توپولوژی تولید شده توسط کلاس تمام تصویر معکوس های مجموعه های باز در Y_μ ها روی X است.

قضیه ۴۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\{Y_\mu : \mu \in M\}$ کلاسی ناتهی از فضاهای توپولوژیک است و برای هر $\mu \in M$، فرض کنید f_μ نگاشتی از X به توی Y_μ است. آنگاه تور $\{x_\alpha\}$ در X به نقطه x_0 در توپولوژی ضعیف تولید شده توسط f_μ ها همگرا است اگر و تنها اگر برای هر $\mu \in M$، $\{f_\mu(x_\alpha)\}$ همگرا به $f_\mu(x_0)$ در توپولوژی روی Y_μ باشد.

تعریف ۴۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و Y یک فضای توپولوژیک است و فرض کنید $M(X,Y)$ نشان دهنده مجموعه تمام نگاشت ها از X به توی Y است، می دانیم که

$$M(X,Y) = \prod_{x \in X} Y_x$$

که در آن برای هر $x \in X$، $Y_x = Y$. اگر توپولوژی روی $M(X,Y)$ توپولوژی حاصلضرب روی $\prod_{x \in X} Y_x$ باشد، این توپولوژی را فضای توپولوژی همگرایی نقطه وار نامیم. تور $\{A_\alpha\}$ در $M(X,Y)$ همگرا به نقطه A در $M(X,Y)$ در توپولوژی همگرایی نقطه وار است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $\{A_\alpha x\}$ در توپولوژی روی $Y_x = Y$ همگرا به Ax باشد.