۲.۱ فضاهای باناخ و فضاهای هیلبرت

در این بخش، قضایای اساسی در رابطه با فضاهای باناخ و فضاهای هیلبرت را بیان می‌کنیم.

ا. فضاهای خطی. فرض کنید E مجموعه‌ای ناتهی است و هر زوج از عناصر x و y در E را با عملی به نام جمع بتوان باهم ترکیب شود و حاصل عضو z در E است که با $z=x+y$ نمایش می‌دهیم. علاوه بر آن، این عمل جمع در شرایط زیر صدق کند

۱. برای هر $x,y\in E$ ، $x+y=y+x$ ؛

۲. برای هر $x,y,z\in E$ ، $x+(y+z)=(x+y)+z$ ؛

۳. عضو منحصر به فردی در E که با 0 نمایش می‌دهیم و آن را عضو صفر می‌نامیم وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in E$ ، $x+0=x$ ؛

۴. به هر عضو $x\in E$ عضو منحصر به فردی در E که با $-x$ نمایش می‌دهیم و آن را منفی x می‌نامیم متناظر شود به طوری که $x+(-x)=0$.

در تمام بحث، به دستگاه اعداد حقیقی یا دستگاه اعداد مختلط به عنوان اسکالرها رجوع می‌کنیم. فرض کنید به هر اسکالر α و هر عضو x در E، عضو y در E را بتوان متناظر کرد که آن را با $y=\alpha x$ نمایش می‌دهیم و ضرب اسکالر نامیم به طوری که در شرایط زیر صدق کند

۵. برای هر $x,y\in E$ و هر اسکالر α ، $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ ؛

۶. برای هر $x\in E$ و اسکالرهای α و β ، $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ ؛

۷. برای هر $x\in E$ و اسکالرهای α و β ، $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ ؛

۸. برای هر $x\in E$ ، $1.x=x$.

دستگاه جبری E تولید شده توسط عملگرهای بالا و اصول بیان شده را یک فضای خطی نامیم. برحسب اعداد پذیرفته شده به عنوان اسکالرها (تنها اعداد حقیقی یا تمام اعداد مختلط

می‌توان تمایزی بین فضاهای خطی حقیقی و فضاهای خطی مختلط در نظر گرفت. اغلب یک فضای خطی را فضای برداری و عناصر آن را بردارها نامیم. در تمام بحث، فرض براین است که فضای خطی تحت مطالعه ما حقیقی است.

۲. زیرمجموعه ناتهی M از E را یک زیرفضا (یا یک زیرفضای خطی) از E نامیم، درصورتی که M نسبت به عملهای تعریف شده در E یک فضای خطی باشد.

۳. نکته. تعریف ۲ برای زیرفضای خطی M معادل با این است که M تحت جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

۴. اگر $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه ناتهی متناهی از بردارها در E باشد، آن‌گاه بردار

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n ,$$

را یک ترکیب خطی بردارهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نامیم. اگر S زیرمجموعه ناتهی دلخواهی از E باشد، آن‌گاه مجموعه تمام ترکیب‌های خطی بردارها در S زیرفضایی از E است که با $[S]$ نمایش می‌دهیم و آن را زیرفضای پدید آمده توسط S نامیم.
چون $[S]$ زیرفضایی شامل S است و مشمول در هر زیرفضای شامل S می‌باشد گاهی اوقات $[S]$ را به عنوان کوچکترین زیرفضای E شامل S در نظر می‌گیریم.

۵. فرض کنید E یک فضای خطی و $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه ناتهی متناهی از بردارها در E است. گوییم S وابسته خطی است هرگاه اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ که تماماً صفر نیستند موجود باشند به طوری که

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0. \qquad (1)$$

اگر S وابسته خطی نباشد، آن را مستقل خطی نامیم.
لازم است که این مفاهیم را به حالت مجموعه دلخواه ناتهی از بردارها در E توسیع دهیم.

۶. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی دلخواهی از E است. گوییم این مجموعه مستقل خطی است هرگاه

هر زیرمجموعه متناهی آن به مفهوم بیان شده در (۵) مستقل خطی باشد. در غیر این صورت S را وابسته خطی گوییم.

۷. فرض کنید E یک فضای خطی است. یک مجموعه محدب در E زیرمجموعه‌ای ناتهی S است به طوری که اگر x و y در S باشند آنگاه

$$z = x + t(y-x) = (1-t)x + ty,$$

برای هر عدد حقیقی t با شرط $0 \le t \le 1$ در S باشد.

۸. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی دلخواهی از E است. پوسته محدب S را اشتراک تمام مجموعه های محدب شامل S تعریف می‌کنیم. گاهی آن را با $\operatorname{co} S$ نمایش می‌دهیم. باید توجه داشت که پوسته محدب S شامل تمام نقاطی است که می‌توان آن را به فرم ترکیب خطی $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ نوشت، که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n$ نقاطی دلخواه در S اند و برای هر k، $\alpha_k \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

تعریف ۹. فرض کنید X یک زیرفضای E است. یک عملگر خطی روی X به توی $\mathbb{R}$ را یک تابعک خطی روی X نامیم.

اگر f و g تابعک های خطی روی X بوده و α یک اسکالر باشد، $f+g$ و αf را با

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنید X' کلاس تمام تابعک های خطی روی X است. با توجه به فرمول های بالا، X' یک فضای خطی است که آن را دوگان جبری X نامیم.

فضاهای باناخ.

تعریف ۱۰. یک فضای خطی نرمدار، فضای خطی E است که به هر بردار $x \in E$ عددی حقیقی که با

$\|x\|$ نمایش می‌دهیم را متناظر می‌کند به طوری که در شرایط زیر برقرار است

۱. برای هر $x \in E$ ، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ؛

۲. برای هر $x \in E$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ ؛

۳. برای هر $x, y \in E$ ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

به سادگی دیده می‌شود که فضای خطی نرمدار E یک فضای متریک نسبت به متر d تعریف شده توسط

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

است.

تعریف ۱۱. یک فضای باناخ، فضای خطی نرمدار کامل است.

تعریف ۱۲. فرض کنید E و F فضاهای خطی نرمدارند و T یک تبدیل خطی از E بتوی F است. در این صورت T را کراندار نامیم هرگاه عدد حقیقی $K \geq 0$ با خاصیت

$$\|Tx\| \leq K \|x\|, \quad \forall x \in E,$$

وجود داشته باشد.

قضیه ۱۳. فرض کنید T یک تبدیل خطی از E بتوی F است. در این صورت هر شرط برای T در زیر معادل شرایط دیگر است

الف) T پیوسته است.

ب) T در مبداء پیوسته است.

ج) T کراندار است.

تعریف ۱۴. فرض کنید T یک تبدیل خطی کراندار از E بتوی F است. نرم عملگر T را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| .$$

نکته ۱۵. اگر فضای نرمدار E ناصفر باشد، آنگاه فرمول داده شده در تعریف ۱۴ معادل است با

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$

علاوه بر آن، می‌دانیم که

$$\|T\| = \inf\{ K : K\geq 0 , \ \|Tx\| \leq K\|x\| \ \ \forall x\in E\}$$

پس برای هر $x\in E$ داریم

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| .$$

تعریف ۱۶. مجموعه تمام تبدیلات خطی پیوسته (یا کراندار) از فضای نرمدار E بتوی فضای نرمدار F را با $B(E,F)$ نمایش می‌دهیم.

به سادگی دیده می‌شود که $B(E,F)$ نسبت به عمل‌های خطی نقطه‌وار تعریف شده توسط

$$(T+S)(x) = T(x)+S(x), \qquad (\alpha T)(x) = \alpha T(x)$$

یک فضای خطی است.

قضیه ۱۷. اگر E و F فضاهای خطی نرمدار باشند آنگاه مجموعه $B(E,F)$ شامل تمام تبدیلات خطی پیوسته از E بتوی F نسبت به عمل‌های خطی نقطه‌وار و نرم تعریف شده توسط $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$ یک فضای خطی نرمدار است. علاوه بر آن، اگر F یک فضای باناخ باشد آنگاه $B(E,F)$ نیز یک فضای باناخ است.

تعریف ۱۸. اگر E یک فضای خطی نرمدار دلخواه و $F=\mathbb{R}$ باشد، در این صورت $B(E,\mathbb{R})$ را با E^* نمایش داده و به آن فضای مزدوج توپولوژیک E گوییم.

تعریف ۱۹. فرض کنید E و F فضاهای خطی نرمدارند. برای هر $T\in B(E,F)$، مزدوج T را با T^* نمایش داده و به صورت

$$(T^*f)(x) = f(Tx) \qquad f\in F^* ,\ x\in E$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که T^* یک تبدیل خطی از F^* به توی E^* است یعنی $T^*\in B(F^*,E^*)$.

قضیه ۲۰. قضیه هان - باناخ. فرض کنید M یک زیرفضای خطی از فضای نرمدار E بوده و f تابعک خطی پیوسته‌ای روی M است، یعنی $f\in M^*$. در این صورت f را می‌توان به یک تابعک خطی پیوسته f_0 تعریف شده روی کل فضای E توسیع داد به طوری که $\|f_0\|=\|f\|$.

از قضیه هان - باناخ نتایج زیر را می‌توان به دست آورد.

نتیجه ۲۱. فرض کنید E یک فضای خطی نرمدار و x_0 برداری ناصفر در E است، آن گاه تابعک خطی پیوسته f در E^* وجود دارد به طوری که $f(x_0)=\|x_0\|$ و $\|f\|=1$.

نتیجه ۲۲. فرض کنید M یک زیرفضای خطی بسته از فضای خطی نرمدار E است و x_0 برداری متعلق به M نباشد، آن گاه تابعک خطی پیوسته f در E^* وجود دارد به طوری که

$$f(M)=\{0\},\qquad f(x_0)=1,\qquad \|f\|=\frac{1}{d}$$

که در آن $d=\inf\{\|x_0-y\|:y\in M\}$.

از قضیه هان - باناخ، احکام زیر نیز به دست می‌آید.

قضیه ۲۳. قضیه جداسازی. فرض کنید E یک فضای خطی نرمدار و C زیرمجموعه ناتهی بسته محدب از E است. اگر بردار x در C نباشد آن گاه تابعک خطی پیوسته f در E^* وجود دارد به طوری که

$$f(x)<\inf\{f(y):y\in C\}$$

قضیه ۲۴. قضیه کرانداری یکنواخت. فرض کنید E یک فضای باناخ و F یک فضای خطی

نرمدار است، اگر $\{T_\alpha\}$ یک مجموعه ناتهی از تبدیلات خطی پیوسته از E بتوی F با خاصیت "$\{T_\alpha(x)\}$ زیرمجموعه کراندار F برای هر $x \in E$" باشد، آنگاه $\{\|T_\alpha\|\}$ یک مجموعه کراندار از اعداد است، یعنی $\{T_\alpha\}$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $B(E,F)$ کراندار است.

نتیجه مستقیم قضیه ۲۴، قضیه زیر است.

قضیه ۲۵. فرض کنید X زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی نرمدار E است. در این صورت X کراندار است اگر و تنها اگر $f(X)$ مجموعه‌ای کراندار از اعداد برای هر $f \in E^*$ باشد.

قضیه ۲۶. قضیه بی‌شاپ - فلپس. فرض کنید C زیرمجموعه بسته کراندار محدب از فضای باناخ E است و فرض کنید A مجموعه تمام تابعک‌های خطی پیوسته مانند f است به طوری که به ازای x_0 ای در C،

$$f(x_0) = \sup f(C),$$

آنگاه A در E^* چگال است، یعنی $\bar{A} = E^*$.

تعریف ۲۷. فضای خطی نرمدار E را انعکاسی نامیم، هرگاه $E = (E^*)^*$.

قضیه ۲۸. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E انعکاسی است اگر و تنها اگر E^* انعکاسی باشد.

برای فضای باناخ E، مجموعه‌های

$$S(E) = \{x \in E : \|x\| = 1\},$$
$$S(E^*) = \{f \in E^* : \|f\| = 1\}$$

را تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲۹. قضیه جیمز. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E انعکاسی است اگر و تنها اگر برای هر $f \in S(E^*)$، عضو $x \in S(E)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x)=1$.

توپولوژی های ضعیف ۳۰. فرض کنید x_0 برداری در فضای باناخ E است و فرض کنید f یک تابعک خطی پیوسته در E^* است. برای هر $\varepsilon > 0$، قرار می دهیم

$$U(x_0; f, \varepsilon) = \{x \in E : |f(x - x_0)| < \varepsilon\}$$

توپولوژی ضعیف روی E توپولوژی تولید شده توسط کلاس تمام مجموعه هایی که به فرم $U(x_0; f, \varepsilon)$ قابل نمایش اند، تعریف می شود. بوضوح این توپولوژی برابر با توپولوژی تولید شده توسط $\{f : f \in E^*\}$ است. طبق قضیه ۴۱ یک تور $\{x_\alpha\}$ در E همگرا به $x_0 \in E$ در توپولوژی ضعیف است اگر و تنها اگر $\{f(x_\alpha)\}$ همگرا به $f(x_0)$ برای هر $f \in E^*$ است.

قضیه ۳۱. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E انعکاسی است اگر و تنها اگر گوی یکه بسته $B = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ در توپولوژی ضعیف فشرده باشد.

از قضیه جداسازی ۲۳، قضیه زیر حاصل می شود.

قضیه ۳۲. فرض کنید C یک زیرمجموعه محدب از فضای باناخ E است. در این صورت C در توپولوژی نرم بسته است اگر و تنها اگر C در توپولوژی ضعیف بسته باشد.

به عنوان نتیجه ای مستقیم از قضایای ۳۱ و ۳۲ داریم

نتیجه ۳۳. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E انعکاسی است اگر و تنها اگر هر زیرمحدب بسته کراندار از E در توپولوژی ضعیف فشرده باشد.

تعریف ۳۴. زیرمجموعه C از E را فشرده ضعیف دنباله ای نامیده می شود، اگر هر دنباله

$\{x_n\}$ در C دارای یک زیر دنباله همگرا به یک نقطه در E در توپولوژی ضعیف باشد.

قضیه ۳۵. فرض کنید E یک فضای باناخ انعکاسی است. در این صورت زیرمجموعه C از E فشرده دنباله‌ای ضعیف است اگر و تنها اگر C کراندار باشد.

توپولوژی ضعیف * ۳۶. فرض کنید f_0 یک بردار در E^* و x برداری در E است. برای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه

$$U(f_0 : x, \varepsilon) = \{ f \in E^* : |f_0(x) - f(x)| < \varepsilon \}$$

را در نظر بگیرید. توپولوژی ضعیف * روی E^* توپولوژی تولید شده توسط کلاس تمام مجموعه‌های لفرم $U(f_0 ; x, \varepsilon)$ است.

به وضوح این توپولوژی برابر با توپولوژی تولید شده توسط $\{\hat{x} : x \in E\}$ است که در آن برای هر $f \in E^*$، $\hat{x}(f) = f(x)$.

قضیه ۳۷. آلاگلو. اگر E یک فضای خطی نرمدار باشد آنگاه گوی یکه بسته

$$B^* = \{ f \in E^* : \|f\| \leq 1 \}$$

در توپولوژی ضعیف * فشرده است.

تعریف ۳۸. فضاهای هیلبرت. یک فضای خطی مختلط H را فضای ضرب داخلی نامیم، هرگاه تابع با مقادیر مختلط، $(\cdot,\cdot)$ تعریف شده روی $H \times H$ وجود داشته باشد بطوریکه

۱. برای هر $x \in H$، $(x, x) \geq 0$ و $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$؛

۲. برای هر $x, y \in H$، $(x, y) = \overline{(y, x)}$؛

۳. برای هر $x, y, z \in H$، $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$؛

۴. برای هر $x, y \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$.

(x, y) ضرب داخلی x و y نامیده می‌شود. یک فضای خطی حقیقی H را فضای ضرب داخلی نامیم هرگاه تابع با مقادیر حقیقی $(\cdot,\cdot)$ روی $H \times H$ موجود باشد که در شرایط (۱) - (۴) صدق کند، بجز اینکه (۲) بدون علامت

مزدوج نوشته می‌شود. اگر H یک فضای ضرب داخلی باشد، آن‌گاه $\|x\|=\sqrt{(x,y)}$ دارای خواص نرم است. یک فضای هیلبرت، فضای باناخی است که نرم آن حاصل از یک ضرب داخلی است.

قضیه ۳۹. نامساوی شوارتز. فرض کنید H یک فضای هیلبرت بوده و x و y در H باشند آن‌گاه $|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$.

قضیه ۴۰. قانون متوازی‌الاضلاع. برای هر دو بردار x و y در فضای هیلبرت H

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

قضیه ۴۱. قضیه ریس. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و f تابعک خطی پیوسته روی H است، آن‌گاه بردار منحصربه‌فرد y در H وجود دارد به طوری که برای هر $x\in H$،

$$f(x)=(x,y)$$

فضاهای توپولوژیک خطی.

فرض کنید E یک فضای خطی است که علاوه بر آن فضای توپولوژیک نیز می‌باشد، در این صورت $x+y$ یک تابع تعریف شده روی فضای حاصل‌ضرب $E\times E$ و αx تابع تعریف شده روی $\mathbb{R}\times E$ است. گوییم E یک فضای توپولوژیک خطی است، هرگاه $x+y$ روی $E\times E$ و αx روی $\mathbb{R}\times E$ توابعی پیوسته باشند.

تعریف ۴۲. فضای توپولوژیک خطی E را موضعاً محدب نامیم هرگاه هر همسایگی ۰ شامل یک همسایگی محدب از ۰ باشد.

در تمام بحث بیان شده در این درس، فرض می‌کنیم که فضای توپولوژیک خطی جدایی‌پذیر است.

قضیه ۴۳. فرض کنید E یک فضای توپولوژیک خطی موضعاً محدب است. در این صورت

الف) برای $x \neq 0$، تابعک خطی پیوسته f روی E وجود دارد به طوری که $f(x)=1$.

ب) اگر A و B زیرمجموعه‌های محدب E بوده و A باز باشد و $A\cap B=\emptyset$، آنگاه تابعک خطی پیوسته ناصفر f روی E وجود دارد به طوری که

$$\sup_{x\in A} f(x) \leq \inf_{x\in B} f(x)$$

ج) اگر A و B زیرمجموعه‌های بسته و محدب از E بوده به طوری که A فشرده و $A\cap B=\emptyset$ است آنگاه تابعک خطی پیوسته ناصفر f روی E وجود دارد به طوری که

$$\sup_{x\in A} f(x) < \inf_{x\in B} f(x)$$

تعریف ۴۴. در یک فضای خطی E، بازه (یا قطعه) خطی $[x,y]$ مجموعه تمام نقاطی به فرم $tx+(1-t)y$ برای $0\leq t\leq 1$ است. انتهاهای قطعه خطی $[x,y]$ نقاط x و y اند و نقاط درونی، مجموعه نقاطی به فرم $tx+(1-t)y$ برای $0<t<1$ اند. یک نقطه انتهایی زیرمجموعه X از E نقطه‌ای از X است که انتهای هر قطعه خطی مشمول در X باشد. مجموعه تمام نقاط انتهایی X را با $ex\, X$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴۵. کرین - میلمن. فرض کنید E یک فضای توپولوژیک خطی موضعاً محدب است و فرض کنید X زیرمجموعه فشرده و محدب و ناتهی از E است. در این صورت $ex\, X$ ناتهی است و

$$\overline{co}\,(ex\, X) = X$$

که در آن $\overline{co}\, A$ نشانگر پوسته محدب A است.

تعریف ۴۶. فرض کنید X یک زیرمجموعه ناتهی محدب از فضای خطی E است و فرض کنید T نگاشتی از X به توی خودش است. T را آفین نامیم در صورتی که برای $x,y \in X$ و اعداد نامنفی دلخواه α و β با $\alpha+\beta=1$ داشته باشیم

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$$

قضیه ۴۷. قضیه نقطه ثابت مارکف - کاکوتانی. فرض کنید X یک زیرمجموعه ناتهی محدب فشرده از فضای توپولوژیک برداری E است. فرض کنید S خانواده جابجایی از نگاشت های آفین پیوسته T از X توی خودش است، آن گاه عضو $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که برای هر $T \in S$، $Tx_0 = x_0$،

اثبات. فرض می کنیم S یک نیم گروه است. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده ناتهی از زیرمجموعه های محدب فشرده مانند C از X است به طوری که برای هر $T \in S$

$$TC \subset C,$$

در این صورت با توجه به لم زورن، مجموعه مینیمال K_0 وجود دارد. فرض کنید $co\, S$ خانواده تمام ترکیب های محدب متناهی از عناصر S است، یعنی

$$co\, S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i \ :\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ T_1, \dots, T_n \in S \right\}$$

در نتیجه برای هر $R \in co\, S$ داریم

$$R K_0 = K_0$$

حال فرض کنید $x_0 \in K_0$ و $T \in S$، قرار می دهیم

$$M_k = \frac{1}{k}(I + T + T^2 + \cdots + T^{k-1}), \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

چون $M_k \in co\, S$ پس $x_k \in K_0$ با $x_0 = M_k x_k$ وجود دارد، بنابراین

$$Tx_0 - x_0 = (TM_k - M_k)x_k = \frac{1}{k}(T^k - I)x_k \in \frac{1}{k}(X - X),$$

برای هر $k \in \mathbb{N}$ و بنابراین

$$Tx_0 - x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(X - X) = \{0\}$$

یعنی $Tx_0 = x_0$. چون $T \in S$ دلخواه است پس برای هر $T \in S$

$$Tx_0 = x_0$$