۲.۱ نیم پیوستگی های پایینی و توابع محدب

در این بخش، نتایج مقدماتی برای توابع نیم پیوسته پایینی و توابع محدب را شرح می دهیم. این نتایج برای مطالعه عملگرهای غیرخطی، بالاخص عملگرهای محدب لازم هستند.

تعریف ۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و f تابعی از X بتوی $(-\infty, \infty]$ است. f را نیم پیوسته پایینی روی X گوییم درصورتی که برای هر عدد حقیقی a مجموعه زیر در X

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

بسته باشد.

قضیه ۲. فرض کنید X یک فضای فشرده و $f: X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ یک تابع نیم پیوسته پایینی است. آن گاه عنصر $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که

$$f(x_0) = \min\{f(x) : x \in X\}$$

اثبات. برای هر $a \in \mathbb{R}$ قرار می دهیم

$$G_a = \{x \in X : f(x) > a\}$$

در نتیجه خانواده $\{G_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ یک پوشش بازی برای X است، $X = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} G_a$. چون X فشرده است، پس خانواده ای متناهی مانند $\{G_{a_1}, G_{a_2}, \ldots, G_{a_n}\}$ از $\{G_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ وجود دارد به طوری که

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{a_i}.$$

قرار می دهیم $a_0 = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. داریم

$$f(x) > a_0, \qquad \forall x \in X.$$

پس عدد حقیقی $b = \inf\{f(x) : x \in X\}$ وجود دارد. فرض کنید برای هر $x \in X$، $f(x) > b$ در نتیجه

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > b + \tfrac{1}{n}\}$$

چون X فشرده است، داریم $X = \bigcup_{i=1}^{m} \{x : f(x) > b + \frac{1}{n_i}\}$. قرار می دهیم

$$b' = \min\{b+\frac{1}{n_1}, b+\frac{1}{n_2}, \dots, b+\frac{1}{n_m}\}$$

داریم

$$f(x) > b', \quad \forall x \in X$$

پس

$$b = \inf\{f(x) : x \in X\} \geq b' > b$$

که یک تناقض است، مگر اینکه

$$\exists x_0 \in X \quad s.t. \quad b = f(x_0)$$

یعنی $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in X\}$.

تعریف ۳. تابع $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ را از پایین کراندار نامیم، درصورتی که عدد حقیقی M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$، $M \leq f(x)$.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و f تابعی از X توی $(-\infty, \infty]$ است. برای هر تور $\{x_\alpha\}$ در X تعریف می‌کنیم

$$\liminf_\alpha f(x_\alpha) = \sup_\alpha \inf_{\alpha \leq \beta} f(x_\beta),$$

و

$$\limsup_\alpha f(x_\alpha) = \inf_\alpha \sup_{\alpha \leq \beta} f(x_\beta).$$

قضیه ۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و f تابعی از X توی $(-\infty, \infty]$ است. آنگاه، f روی X نیم پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر برای هر $x_0 \in X$

$$x_\alpha \to x_0 \Rightarrow f(x_0) \leq \liminf_\alpha f(x_\alpha).$$

اثبات. فرض کنید f نیم پیوسته پایینی است و $x_\alpha \longrightarrow x_0$. اگر $f(x_0) < \infty$ آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ تعریف می‌کنیم

$$K_\varepsilon = \{x \in X : f(x_0) - \varepsilon < f(x)\},$$

درنتیجه $x_0 \in K_\varepsilon$ و K_ε در X باز است. بنابراین α_0 وجود دارد به طوری که برای هر $\alpha \geq \alpha_0$، $x_\alpha \in K_\varepsilon$. بنابراین برای هر $\alpha_0 \leq \alpha$

$$f(x_0)-\varepsilon < f(x_\alpha).$$

در نتیجه

$$f(x_0)-\varepsilon \le \inf_{\alpha\ge\alpha_0} f(x_\alpha) \le \liminf_\alpha f(x_\alpha)$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، داریم

$$f(x_0)\le \liminf_\alpha f(x_\alpha)$$

حال اگر $f(x_0)=\infty$ آنگاه چون برای هر $a\in\mathbb{R}$ مجموعه $\{x: f(x)>a\}$ در X باز است، پس α_0 وجود دارد به طوری که برای هر $\alpha\ge\alpha_0$، $f(x_\alpha)>a$ و این نتیجه می‌دهد

$$\inf_{\alpha\ge\alpha_0} f(x_\alpha)\ge a,$$

و بنابراین

$$\liminf_\alpha f(x_\alpha)\ge a$$

چون $a\in\mathbb{R}$ دلخواه است، داریم

$$\liminf_\alpha f(x_\alpha)=\infty=f(x_0).$$

برعکس، برای هر $a\in\mathbb{R}$ می‌توان نشان داد که $X_a=\{x: f(x)\le a\}$ در X بسته است (چرا؟). فرض کنید $x_\alpha\to x_0$ و $x_\alpha\in X_a$، چون برای هر α، $f(x_\alpha)\le a$، داریم

$$\inf_{\alpha\le\beta} f(x_\beta)\le a, \qquad \forall\alpha$$

بنابراین

$$f(x_0)\le\liminf_\alpha f(x_\alpha)\le a$$

در نتیجه $x_0\in X_a$. یعنی X_a بسته و در نتیجه f نیم‌پیوسته پایینی است.

قضیه ۵. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $\{f_\alpha:\alpha\in I\}$ خانواده‌ای از توابع نیم‌پیوسته پایینی از X بتوی $(-\infty,\infty]$ است. آنگاه تابع g تعریف شده روی X توسط

$$g(x)=\sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x), \qquad \forall x\in X,$$

نیم‌پیوسته پایینی است.

اثبات. برای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم

$$\{x : g(x) \le a\} = \{x : \sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x) \le a\}$$
$$= \bigcap_{\alpha\in I} \{x : f_\alpha(x) \le a\}.$$

بنابراین $\{x : g(x) \le a\}$ در X بسته است. در نتیجه g نیم پیوسته پایینی است.

قضیه ۶. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک است. فرض کنید f و g توابع نیم پیوسته پایینی از X به توی $(-\infty,\infty]$ اند و α عدد حقیقی نامنفی است. آن گاه توابع $f+g$ و αf تعریف شده روی X توسط

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \qquad \forall x\in X,$$

نیم پیوسته پایینی اند.

اثبات. اگر $\alpha=0$ آن گاه تابع αf نیم پیوسته پایینی است. فرض کنید $\alpha>0$ در این صورت، با توجه به اینکه برای هر $a\in\mathbb{R}$ مجموعه

$$G_a = \{x : (\alpha f)(x) \le a\} = \{x : f(x) \le \frac{a}{\alpha}\},$$

در X بسته است پس αf نیم پیوسته پایینی است.

حال نشان می دهیم $f+g$ نیم پیوسته پایینی است. در واقع، می دانیم که برای هر $a\in\mathbb{R}$،

$$\{x : f(x)+g(x) > a\} = \bigcup [\{x : f(x) > c\} \cap \{x : g(x) > a-c\}]$$

پس $f+g$ نیم پیوسته پایینی است.

قضیه ۷. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک اند، فرض کنید β تابعی پیوسته از X به توی $[0,\infty)$ است و f نیم پیوسته پایینی از Y به توی $(-\infty,\infty]$ است، آن گاه تابع $\beta.f$ تعریف شده روی $X\times Y$ توسط

$$(\beta.f)(x,y) = \beta(x).f(y) \qquad \forall (x,y)\in X\times Y$$

نیم پیوسته پایینی است.

اثبات. فرض کنید $a\in\mathbb{R}$. کافی است نشان دهیم مجموعه

$$A = \{(x,y)\in X\times Y : \beta(x) f(y) > a\},$$

در $X\times Y$ باز است. فرض کنید $(x_0,y_0)\in A$. نخست فرض می کنیم $\beta(x_0)>0$ پس

$\varepsilon>0$ وجود دارد به طوری که

$$\beta(x_0)>\varepsilon,$$

$$(\beta(x_0)-\varepsilon)f(y_0)>a,$$

و

$$(\beta(x_0)+\varepsilon)f(y_0)>a,$$

قرار می‌دهیم $U=X_\varepsilon\times Y_\varepsilon$ که در آن

$$X_\varepsilon=\{x\in X:\ |\beta(x)-\beta(x_0)|<\varepsilon\},$$

و

$$Y_\varepsilon=\{y\in Y:\ f(y)>\max[\frac{a}{\beta(x_0)+\varepsilon},\frac{a}{\beta(x_0)-\varepsilon}]\}.$$

در نتیجه U باز است و $(x_0,y_0)\in U\subset A$. زیرا فرض کنید $(x,y)\in U$. اگر $a\geq 0$ آن‌گاه

$$\beta(x)f(y)>\beta(x)\frac{a}{\beta(x_0)-\varepsilon}\geq a$$

و اگر $a<0$ آن‌گاه

$$\beta(x)f(x)>\beta(x)\frac{a}{\beta(x_0)+\varepsilon}>a$$

پس $(x,y)\in A$ یعنی $U\subset A$. بنابراین (x_0,y_0) دارای همسایگی باز U مشمول در A است.

حال فرض کنید $\beta(x_0)=0$. چون $a<0$ پس $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$\delta f(y_0)>a$$

اگر قرار دهیم

$$V=\{x\in X:\ 0\leq\beta(x)<\delta\}\times\{y\in Y:\ f(y)>\frac{a}{\delta}\},$$

آن‌گاه V باز است و $(x_0,y_0)\in V\subset A$. زیرا اگر $(x,y)\in V$ آن‌گاه

$$\beta(x)f(y)>\beta(x)\frac{a}{\delta}>a$$

بنابراین $(x,y)\in A$ یعنی $V\subset A$. بنابراین (x_0,y_0) دارای همسایگی باز V مشمول در A است یعنی (x_0,y_0) نقطه درونی A است. پس A باز است. بنابراین مجموعه

$$\{(x,y)\in X\times Y:\ (\beta.f)(x,y)=\beta(x)f(y)\leq a\}$$

برای هر $a\in\mathbb{R}$ بسته است. پس $\beta.f$ نیم پیوسته پایینی است.

تعریف ۸. فرض کنید E یک فضای خطی و X زیرمجموعه محدبی از E است. تابع $f: X \to (-\infty, \infty]$ روی X محدب نامیده می‌شود، اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $t \in [0,1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

قضیه ۹. فرض کنید X زیرمجموعه محدبی از فضای خطی E است و فرض کنید $f: X \to (-\infty, \infty]$ روی X تابعی محدب است. آن‌گاه برای هر $a \in \mathbb{R}$ مجموعه $G_a = \{x : f(x) \leq a\}$ محدب است.

اثبات. برای هر $x_1, x_2 \in G_a$ و هر $t \in [0,1]$ داریم

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$
$$\leq ta + (1-t)a = a$$

پس $tx_1 + (1-t)x_2 \in G_a$ یعنی G_a محدب است.

قضیه ۱۰. فرض کنید X زیرمجموعه محدبی از فضای خطی E است و فرض کنید $\{f_\alpha : \alpha \in I\}$ یک خانواده از توابع محدب از X بتوی $(-\infty, \infty]$ است. آن‌گاه تابع g تعریف شده روی X توسط

$$g(x) = \sup_{\alpha \in I} f_\alpha(x), \quad \forall x \in X,$$

روی X محدب است.

اثبات. فرض کنید $x_1, x_2 \in X$ و $t \in [0,1]$. آن‌گاه برای هر $\alpha \in I$

$$f_\alpha(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f_\alpha(x_1) + (1-t) f_\alpha(x_2).$$

بنابراین

$$g(tx_1 + (1-t)x_2) = \sup_{\alpha \in I} f_\alpha(tx_1 + (1-t)x_2)$$
$$\leq t \sup_{\alpha \in I} f_\alpha(x_1) + (1-t) \sup_{\alpha \in I} f_\alpha(x_2)$$
$$= t\, g(x_1) + (1-t)\, g(x_2).$$

یعنی g روی X محدب است.

قضیه ۱۱. فرض کنید X یک زیرمجموعه محدب از فضای خطی E است. فرض کنید f و g توابع

محدبی روی X اند و α یک عدد نامنفی است. در این صورت توابع $f+g$ و αf تعریف شده روی X توسط

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad (\alpha f)(x)=\alpha f(x),\qquad \forall x\in X,$$

روی X محدب اند.

اثبات. تمرین

تعریف ۱۲. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و f تابعی تعریف شده روی X توی $(-\infty,\infty]$ است. گوییم f یک تابع سره است، اگر $x\in X$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x)<\infty$. برای تابع سره f از X توی $(-\infty,\infty]$، مجموعه $D(f)=\{x\in X:\ f(x)<\infty\}$ را دامنه f نامیم.

لم ۱۳. فرض کنید X یک زیرمجموعه محدب بسته از فضای باناخ E است و فرض کنید f یک تابع محدب از X توی $(-\infty,\infty]$ است. آن گاه f در نرم-توپولوژی نیم پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر f در توپولوژی ضعیف نیم پیوسته پایینی باشد.

اثبات. برای هر $a\in\mathbb{R}$، مجموعه $G_a=\{x\in X:\ f(x)\le a\}$ محدب است. بنابراین طبق قضیه ۴۲.۲، G_a در نرم-توپولوژی بسته است اگر و تنها اگر G_a در توپولوژی ضعیف بسته باشد و این اثبات لم را کامل می کند.

قضیه ۱۴. فرض کنید X یک زیرمجموعه محدب به طور ضعیف فشرده از فضای باناخ E است و فرض کنید f یک تابع نیم پیوسته محدب سره از X توی $(-\infty,\infty]$ است. آن گاه $x_0\in D(f)$ وجود دارد به طوری که $f(x_0)=\min\limits_{x\in X} f(x)$.

اثبات. چون f سره است، پس $\lambda_0\in\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$D_0=\{x\in X:\ f(x)\le\lambda_0\}\neq\emptyset.$$

علاوه براین، چون f محدب و نیم پیوسته پایینی است، پس D_0 یک زیرمجموعه بسته محدب از X است. بنابراین D_0 به طور ضعیف فشرده است. از لم ۱۳ دیده می شود که f در توپولوژی

ضعیف نیم پیوسته پایینی است. بنابراین از قضیه ۲ نتیجه می‌شود که $x_0 \in D_0 \subset X$ وجود دارد به طوری که

$$f(x_0) = \min_{x \in D_0} f(x) = \min_{x \in X} f(x).$$

قضیه ۱۵. فرض کنید E یک فضای باناخ انعکاسی است و فرض کنید X یک زیرمجموعه محدب و بسته از E است. فرض کنید f یک تابع نیم پیوسته پایینی محدب سره از X توی $(-\infty, \infty]$ است و وقتی $\|x_n\| \to \infty$ داریم $f(x_n) \longrightarrow \infty$. آنگاه $x_0 \in D(f)$ وجود دارد به طوری که

$$f(x_0) = \inf \{ f(x) : x \in X \}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم $d = \inf\{f(x) : x \in X\}$ و دنباله $\{x_n\}$ در X را چنان انتخاب می‌کنیم که $f(x_n) \to d$. اگر $\{x_n\}$ کراندار نباشد، آنگاه زیردنباله $\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد به طوری که $\|x_{n_i}\| \to \infty$. از فرض داریم $f(x_{n_i}) \to \infty$ که با انتخاب $d \neq \infty$ در تناقض است. پس $\{x_n\}$ کراندار است. حال چون E انعکاسی است از قضیه ۲.۲۵ نتیجه می‌شود که زیردنباله $\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد به طوری که به طور ضعیف همگرا به x_0 ای در X است. حال چون f در توپولوژی ضعیف نیم پیوسته پایینی است، طبق قضیه ۴ داریم

$$d \le f(x_0) \le \liminf_{i \to \infty} f(x_{n_i}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = d$$

پس $f(x_0) = d$ و حکم تمام است.

تعریف ۱۶. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و f تابعی از X توی $[-\infty, \infty)$ است. گوییم f نیم پیوسته بالایی است، اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعه $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ بسته باشد.

تعریف ۱۷. فرض کنید X یک زیرمجموعه محدب از فضای برداری E است و فرض کنید f تابع تعریف شده از X توی $[-\infty, \infty)$ است. گوییم f مقعر است اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $t \in [0,1]$،

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$