۴.۱ حدود باناخ و میانگین‌های پایا

در این بخش، حدود باناخ و میانگین‌های پایا را که در بسیاری از قسمت‌های آنالیز تابعی غیر خطی کاربرد دارند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۱. فرض کنید S یک مجموعه ناتهی است و فرض کنید $B(S)$ فضای باناخ تمام توابع با مقدار حقیقی کراندار تعریف شده روی S با نرم سوپریمم است. فرض کنید X یک زیرفضای $B(S)$ و μ عضوی از X^* (فضای دوگان X) است. مقدار μ در $f \in X$ را با $\mu(f)$ نشان می‌دهیم. اگر برای هر $s \in S$، $e(s)=1$ باشد، $\mu(e)$ را معمولاً با $\mu(1)$ نشان می‌دهیم. وقتی X شامل ثابتها باشد، تابعک خطی μ روی X را یک میانگین روی X نامیم، هرگاه $\|\mu\| = \mu(1) = 1$.

قضیه ۲. فرض کنید X یک زیرفضای $B(S)$ شامل ثابت‌ها است و فرض کنید μ یک تابعک خطی روی X است. در این صورت شرایط زیر باهم معادل‌اند

الف) $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ یعنی μ یک میانگین روی X است؛

ب) برای هر $f \in X$ نامساوی

$$\inf_{s \in S} f(s) \le \mu(f) \le \sup_{s \in S} f(s)$$

برقرار است.

اثبات. (الف) $\Rightarrow$ (ب). فرض کنید $f \in X$ و $f \ge 0$، در این صورت $\mu(f) \ge 0$. در واقع، فرض کنید $\mu(f) < 0$ و عدد مثبت M را با $f \le M$ انتخاب می‌کنیم، آنگاه

$$\mu(M-f) = M\mu(1) - \mu(f) = M - \mu(f) > M.$$

از طرف دیگر

$$\mu(M-f) \le \|\mu\| \, \|M-f\| = \|M-f\| = \sup_{s \in S} |M - f(s)| \le M$$

که تناقض است. بنابراین $\mu(f) \ge 0$. حال چون برای هر $f \in X$ داریم

$$\inf_{s \in S} f(s) \le f \le \sup_{s \in S} f(s),$$

پس از نتیجه به دست آمده در قسمت بالا داریم

$$\inf_{s\in S} f(s) = \mu(\inf_{s\in S} f(s)) \le \mu(f) \le \mu(\sup_{s\in S} f(s)) = \sup_{s\in S} f(s)$$

(ب) ⇐ (الف). قرار دهید $f=1$، داریم

$$1 \le \mu(1) \le 1$$

بنابراین $\mu(1)=1$. برای هر $f\in X$ داریم

$$\mu(f) \le \sup_{s\in S} f(s) \le \sup_{s\in S} |f(s)| = \|f\|$$

همچنین داریم

$$-\mu(f) = \mu(-f) \le \|-f\| = \|f\|$$

پس برای هر $f\in X$،

$$|\mu(f)| \le \|f\|$$

بنابراین $\|\mu\| = 1$ یعنی μ روی X یک میانگین است.

تعریف ۳. فرض کنید $S = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. در این صورت $B(S) = \ell^\infty$. برای هر عضو $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^\infty$ تعریف می‌کنیم

$$x' = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \ldots)$$

لم ۴. فرض کنید $H = \{x' : x\in \ell^\infty\}$ و G زیرفضای بسته‌ای از ℓ^∞ باشد که به وسیله H پدید آمده است، آنگاه $d(e,G) = 1$ که در آن $e = (1, 1, \ldots)$ و

$$d(e,G) = \inf\{\|e-x\| : x\in G\}$$

اثبات. فرض کنید $x', y' \in H$ و α عددی حقیقی است، در این صورت

$$x' + y' = (x+y)', \quad \alpha x' = (\alpha x)'$$

یعنی H یک زیرفضای ℓ^∞ است. حال نشان می‌دهیم برای هر $x'\in H$، $\|x'-e\| \ge 1$. در واقع، اگر $\|x'-e\| = a < 1$ به ازای x'ای در H باشد، آنگاه

$$|x_1 - 1| \le a, \quad |x_2 - x_1 - 1| \le a, \quad |x_3 - x_2 - 1| \le a, \ldots$$

و بنابراین

$$1-a \le x_1 \;,\; 2(1-a) \le 1-a+x_1 \le x_2 \;,$$
$$3(1-a) \le 1-a+x_2 \le x_3 \;,\; \dots$$

که نتیجه می‌دهد $x=(x_1,x_2,\dots) \notin \ell^\infty$. زیرا برای هر $x'\in H$، $\|x'-e\|\ge 1$ داریم $d(e,H)\ge 1$، بنابراین $d(e,G)\ge 1$. از طرف دیگر از $\|e-e'\|=1$ نتیجه می‌شود که $d(e,G)=1$.

نمادگذاری. فرض کنید μ یک تابعک خطی پیوسته روی ℓ^∞ است و $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^\infty$. گاهی اوقات برای نمایش مقدار $\mu(x)$ از $\mu_n(x_n)$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۵. وجود حدود باناخ. تابعک خطی پیوسته μ روی ℓ^∞ وجود دارد به طوری که $\|\mu\|=\mu(1)=1$ و برای هر $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^\infty$، $\mu_n(x_n)=\mu_n(x_{n+1})$.

اثبات. فرض کنیم $H=\{x'-x : x\in\ell^\infty\}$ و $G=\overline{H}$. در این صورت طبق قضیه هان-باناخ، تابعک خطی پیوسته μ روی ℓ^∞ وجود دارد به طوری که $\mu(G)=0$، $\mu(e)=1$ و $\|\mu\|=1$. نشان می‌دهیم برای هر $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^\infty$، $\mu_n(x_n)=\mu_n(x_{n+1})$. چون $e'=(1,0,0,\dots)\in H$ داریم $\mu(e')=0$. قرار می‌دهیم $u=(x_1,0,0,\dots)$ داریم

$$\mu(u)=\mu(x_1e')=x_1\mu(e')=0.$$

علاوه بر آن، قرار می‌دهیم $y=(0,x_2,x_3,\dots)$ داریم

$$\mu(x-y)=\mu(u)=0$$

بنابراین $\mu(x)=\mu(y)$. فرض کنید $z=(x_2,x_3,\dots)$، آنگاه چون $z-y\in H$ داریم $\mu(z-y)=0$ پس $\mu(z)=\mu(y)$. بنابراین

$$\mu_n(x_n)=\mu(x)=\mu(y)=\mu(z)=\mu_n(x_{n+1}).$$

تعریف ۶. یک تابعک خطی پیوسته روی ℓ^∞ مانند μ که $\|\mu\|=\mu(1)=1$ و برای هر $x=(x_1,x_2,\dots)$ در ℓ^∞ داشته باشیم $\mu_n(x_n)=\mu_n(x_{n+1})$ را یک حد باناخ نامیم.

قضیه ۷. فرض کنید μ یک حد باناخ است، آنگاه برای هر $x=(x_1,x_2,\dots)\in l^\infty$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \mu(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

مخصوصاً، اگر $x_n\to a$ آنگاه $\mu(x)=a$.

اثبات. چون μ یک حد باناخ است، برای هر $m\in\mathbb{N}$ داریم

$$\mu_n(x_n)=\mu_n(x_{n+1})=\cdots=\mu_n(x_{n+(m-1)})\geq \inf_{m\le n} x_n$$

و بنابراین

$$\mu_n(x_n)\geq \liminf_{n\to\infty} x_n$$

به طور مشابه، چون

$$\mu_n(x_{n+(m-1)})\le \sup_{m\le n} x_n$$

داریم

$$\mu_n(x_n)\le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

بنابراین برای هر $x=(x_1,x_2,\dots)\in l^\infty$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \mu(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

فرض کنید $x_n\to a$ آنگاه

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = a = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

پس $\mu(x)=a$.

توضیح ۸. اگر μ یک تابعک خطی روی l^∞ بر قرار در شرط

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \mu(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

برای هر $x=(x_1,x_2,\dots)\in l^\infty$ باشد آنگاه μ یک میانگین روی l^∞ است.

حال، سعی در توسیع مفهوم حدود باناخی به نیم‌گروه‌های کلی داریم.

تعریف ۹. فرض کنید S یک نیم‌گروه مجرد و $B(S)$ فضای باناخ تمام توابع کراندار با مقادیر حقیقی روی S با نرم سوپریمم است. برای هر $s\in S$ و $f\in B(S)$ تعریف می‌کنیم

$$(\ell_s f)(t) = f(st), \quad (r_s f)(t) = f(ts), \quad \forall t\in S.$$

میانگین μ روی $B(S)$ را پایای چپ نامیم، اگر برای هر $f\in B(S)$ و هر $s\in S$

$$\mu(\ell_s f) = \mu(f).$$

به طور مشابه میانگین μ روی $B(S)$ را پایای راست نامیم، اگر برای هر $f\in B(S)$ و هر $s\in S$

$$\mu(r_s f) = \mu(f).$$

یک میانگین روی $B(S)$ را پایا گوئیم، هرگاه پایای چپ و پایای راست باشد. اگر S یک نیم گروه جابجایی باشد، آنگاه با استفاده از قضیه مارکف-کاکوتانی (قضیه ۴۷.۲) می‌توان قضیه وجودی زیر را ثابت کرد.

قضیه ۱۵. قضیه وجود میانگین های پایا. فرض کنید S یک نیم گروه جابجایی است. در این صورت یک تابعک خطی پیوسته μ روی $B(S)$ وجود دارد به طوری که $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ و برای هر $f\in B(S)$ و هر $s\in S$، $\mu(r_s f) = \mu(f)$.

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$B = \{\mu\in B(S)^* : \|\mu\|\le 1\}.$$

B فشرده ضعیف * و محدب است. فرض کنید

$$X = \{\mu\in B : \|\mu\| = \mu(1) = 1\}.$$

در این صورت X نیز فشرده ضعیف * و محدب است (مسئله ۹ بخش ۴.۱). برای هر $s\in S$، تعریف می‌کنیم $T_s = r_s^*$ که در آن r_s^* عملگر دوگان r_s است. در نتیجه T_s پیوسته ضعیف * و آفین از X توی X است. علاوه بر آن برای هر $s,t\in S$ داریم

$$T_sT_t = r_s^* r_t^* = r_{ts}^* = r_{st}^* = r_t^* r_s^* = T_tT_s$$

یعنی $\{T_s : s\in S\}$ یک نیم گروه جابجایی از نگاشت های پیوسته ضعیف * و آفین از X توی X است. با توجه به قضیه نقطه ثابت مارکف-کاکوتانی (۴۷.۲) عضو $\mu\in X$ وجود دارد به طوری که برای هر $s\in S$

$$T_s\mu = \mu,$$

یعنی یک میانگین μ روی $B(S)$ وجود دارد به طوری که برای هر $f\in B(S)$ و هر $s\in S$،

$$\mu(r_s f) = (r_s^{*}\mu)(f) = (T_s\mu)(f) = \mu(f).$$

تعریف ۱۱. فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک است یعنی S یک نیم گروه با یک توپولوژی هاسدورف است به طوری که برای هر $a\in S$ نگاشت‌های $s\mapsto a.s$ و $s\mapsto s.a$ از S به S پیوسته‌اند. فضای باناخ تمام توابع با مقادیر حقیقی پیوسته کراندار روی S را با $C(S)$ نمایش می‌دهیم. از قضیه ۲ دیده می‌شود که $\mu\in C(S)^{*}$ یک میانگین است اگر و تنها اگر برای هر $f\in C(S)$

$$\inf_{s\in S} f(s) \le \mu(f) \le \sup_{s\in S} f(s).$$

همچنین دیده می‌شود که نگاشت‌های l_s و r_s برای $s\in S$ عملگرهای خطی پیوسته از $C(S)$ توی $C(S)$ اند. پس یک میانگین μ روی $C(S)$ را پایای چپ نامیم، اگر برای هر $f\in C(S)$ و هر $s\in S$ داشته باشیم

$$\mu(l_s f) = \mu(f).$$

به طور مشابه، یک میانگین μ روی $C(S)$ را پایای راست نامیم، اگر برای هر $f\in C(S)$ و هر $s\in S$

$$\mu(r_s f) = \mu(f).$$

یک میانگین μ روی $C(S)$ را پایا نامیم هرگاه پایای چپ و پایای راست باشد.

قضیه ۱۲. فرض کنید μ یک میانگین پایای راست روی $C(S)$ است، آن‌گاه برای هر $f\in C(S)$،

$$\sup_{s} \inf_{t} f(ts) \le \mu(f) \le \inf_{s} \sup_{t} f(ts).$$

به طور مشابه، فرض کنید μ یک میانگین پایای چپ روی $C(S)$ است، آن‌گاه برای هر $f\in C(S)$،

$$\sup_{s} \inf_{t} f(st) \le \mu(f) \le \inf_{s} \sup_{t} f(st).$$

اثبات. فرض کنید μ یک میانگین پایای راست روی $C(S)$ است. در نتیجه، چون μ یک میانگین روی $C(S)$ است، از قضیه ۲، برای هر $f\in C(S)$ و هر $s\in S$ داریم

$$\inf_t (r_s f)(t) \le \mu(r_s f) \le \sup_t (r_s f)(t)$$

حال از $\mu(r_s f) = \mu(f)$ نتیجه می‌شود

$$\inf_t f(ts) \le \mu(f) \le \sup_t f(ts)$$

و بنابراین

$$\sup_s \inf_t f(ts) \le \mu(f) \le \inf_s \sup_t f(ts)$$

به طور مشابه، اگر μ یک میانگین پایای چپ روی $C(S)$ باشد، داریم

$$\sup_s \inf_t f(st) \le \mu(f) \le \inf_s \sup_t f(st)$$

توضیح ۱۳. قضیه ۱۲ را برای اثبات قضایای نقطه ثابت و قضایای ارگودیک غیرخطی در رابطه با نگاشت های روی نیم گروه های ناجابجایی بکار خواهیم برد.