# فصل دوم. نظریه نقطه ثابت در فضاهای متریک

در این فصل، ابتدا قضایایی وجودی در فضاهای متریک کامل که تعمیم اصل انقباضی باناخ اند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس مفهوم ω-فاصله‌ها را شرح داده و برخی از نتایج در فضاهای متریک را ثابت می‌کنیم.

## ۱.۲ قضایای وجودی در فضاهای متریک کامل

قضیه ۱.۱.۱۴ (اصل انقباض باناخ) در فضاهای متریک کامل بسیار مهم است. قضیه زیر نیز برای اثبات اصل $\varepsilon$-تغییرات اکلند (قضیه　　) و قضیه نقطه ثابت کاریستی (قضیه　　) که تعمیم‌های اصل انقباضی باناخ اند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

قضیه ۱. فرض کنید $X$ یک فضای متریک کامل و $F: X \to (-\infty, \infty]$ یک تابع نیم‌پیوسته پایینی، از پایین کراندار و سره است. فرض کنید برای هر $u \in X$ با شرط $\inf_{x\in X} F(x) < F(u)$ عضو $v \in X$ وجود دارد به طوری که $v \neq u$ و $F(v) + d(u,v) \le F(u)$. آن‌گاه عضو $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $F(x_0) = \inf_{x\in X} F(x)$.

اثبات. فرض کنید برای هر $y \in X$،
$$\inf_{x\in X} F(x) < F(y),$$
و $u \in X$ با شرط $F(u) < \infty$ است. آن‌گاه به طور استقرایی دنباله $\{u_n\}$ در $X$ با شروع $u = u_1$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $u_{n-1} \in X$ معلوم است. عضو $u_n$ در مجموعه
$$S_n = \{w \in X : F(w) \le F(u_{n-1}) - d(u_{n-1}, w)\}$$
را انتخاب می‌کنیم به طوری که
$$F(u_n) \le \inf_{w\in S_n} F(w) + \frac{1}{2}\{F(u_{n-1}) - \inf_{w\in S_n} F(w)\} \qquad (1)$$
ادعا می‌کنیم که این دنباله، یک دنباله کشی است. زیرا اگر $m > n$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} d(u_n,u_m) &\le \sum_{i=n}^{m-1} d(u_i,u_{i+1}) \\ &\le \sum_{i=n}^{m-1} \{F(u_i)-F(u_{i+1})\} \qquad (۲) \\ &= F(u_n)-F(u_m) \end{aligned}$$

در نتیجه $\{u_n\}$ در $X$ یک دنباله کشی است. چون $X$ کامل است، پس $\{u_n\}$ همگراست، مثلاً $u_n \to v$. حال اگر در (۲)، $m\to\infty$ داریم

$$\begin{aligned} d(u_n,v) &\le F(u_n)-\lim_{m\to\infty} F(u_m) \\ &\le F(u_n)-F(v) \end{aligned}$$

از طرف دیگر، طبق فرض، عضو $z\in X$ وجود دارد به طوری که $v\neq z$ و

$$F(z)\le F(v)-d(v,z)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} F(z) &\le F(v)-d(v,z) \\ &\le F(v)-d(v,z)+F(u_n)-F(v)-d(u_n,v) \\ &= F(u_n)-\{d(u_n,v)+d(v,z)\} \\ &\le F(u_n)-d(u_n,z) \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $n\in\mathbb{N}$، $z\in S_{n+1}$. با استفاده از (۱) داریم

$$2F(u_n)-F(u_{n-1}) \le \inf_{x\in S_n} F(x) \le F(z)$$

پس

$$F(v)\le \lim_{n\to\infty} F(u_n) \le F(z)\le F(v)-d(v,z)<F(v),$$

که یک تناقض است. بنابراین عضو $x_0\in X$ وجود دارد به طوری که

$$F(x_0)=\inf_{x\in X} F(x).$$

قضیه ۲. اصل تغییرات اکلند. فرض کنید $X$ یک فضای متریک کامل و $F: X\to(-\infty,\infty]$ تابع نیم پیوسته پایینی از پایین کراندار و سره است. آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ و $u\in X$ با شرط

$$F(u)\le \inf_{x\in X} F(x)+\varepsilon,$$

عضو $v \in X$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند

الف) $F(v) \leq F(u)$؛

ب) $d(u,v) \leq 1$؛

ج) برای هر $w \in X$ با $w \neq v$، $F(w) > F(v) - \varepsilon d(v,w)$.

اثبات. فرض کنید

$$X_0 = \{x \in X : F(x) \leq F(u) - \varepsilon d(x,u)\}$$

واضح است که $X_0$ ناتهی و بسته می‌باشد (چرا؟). علاوه بر آن برای هر $x \in X_0$

$$\varepsilon d(u,x) \leq F(u) - F(x) \leq F(u) - \inf_{z \in X} F(z) \leq \varepsilon,$$

زیرا برای $d(u,x) \leq 1$، همچنین $F(x) \leq F(u)$. حال فرض کنید برای هر $x \in X_0$ عضو $w \in X$ وجود دارد به طوری که $w \neq x$ و $F(w) \leq F(x) - \varepsilon d(x,w)$. در این صورت

$$\begin{aligned}\varepsilon d(w,u) &\leq \varepsilon d(w,x) + \varepsilon d(x,u)\\ &\leq F(x) - F(w) + F(u) - F(x)\\ &= F(u) - F(w)\end{aligned}$$

بنابراین $w \in X_0$. طبق قضیه ۱ عضو $x_0 \in X_0$ وجود دارد به طوری که

$$F(x_0) = \inf_{z \in X_0} F(z)$$

که متناقض است، زیرا $w_0 \in X_0$ وجود دارد به طوری که $F(w_0) < F(x_0)$، پس عضوی مانند $v \in X$ وجود دارد به طوری که برای هر $w \in X$ با $w \neq v$ داریم

$$F(w) > F(v) - \varepsilon d(v,w).$$

نتیجه ۳. فرض کنید $X$ یک فضای متریک کامل و $F$ تابع نیم پیوسته پایینی از پایین کراندار رو به سره از $X$ بتوی $(-\infty, \infty]$ است. آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عضو $v \in X$ وجود دارد که در دو شرط زیر صدق می‌کند

الف) $F(v) \leq \inf_{x \in X} F(x) + \varepsilon$؛

ب) برای هر $w \in X$، $F(w) \geq F(v) - \varepsilon d(v,w)$.

اثبات. برای هر $\varepsilon > 0$ عضو $u \in X$ وجود دارد به طوری که

$$F(u) \le \inf_{x\in X} F(x) + \varepsilon.$$

طبق قضیه ۲، عضو $v \in X$ وجود دارد به طوری که

$$F(v) \le F(u) \le \inf_{x\in X} F(x) + \varepsilon,$$

و برای هر $w \in X$

$$F(w) \geqslant F(v) - \varepsilon d(v,w);$$

و حکم حاصل می‌شود.

نتیجه ۴. با استفاده از نتیجه ۳ اصل انقباض باناخ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $X$ یک فضای متریک کامل و $f$ نگاشتی از $X$ بتوی خودش است به طوری که عدد حقیقی $r$ با شرط $0 \le r < 1$ موجود است و

$$d(f(x), f(y)) \le r\, d(x,y), \qquad \forall x,y \in X,$$

آنگاه $f$ دارای یک نقطه ثابت منحصر بفرد در $X$ است.

اثبات. قرار می‌دهیم $F(w) = d(w, f(w))$ و $\varepsilon$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$0 < \varepsilon < 1 - r$$

طبق نتیجه ۳، $v \in X$ وجود دارد که برای هر $w \in X$ در شرط

$$F(w) \geqslant F(v) - \varepsilon d(v,w)$$

صدق می‌کند. قرار می‌دهیم $w = f(v)$ داریم

$$\begin{aligned} d(v, f(v)) &\le d(f(v), f(f(v))) + \varepsilon d(v, f(v)) \\ &\le r\, d(v, f(v)) + \varepsilon\, d(v, f(v)) \\ &= (r+\varepsilon)\, d(v, f(v)) \end{aligned}$$

حال اگر $v \ne f(v)$ داریم $1 \le r+\varepsilon$ که با $r+\varepsilon < 1$ در تناقض است. پس باید

$$v = f(v).$$

مشابه اثبات قضیه ۱.۱.۱۶ می‌توان نشان داد که $v$ منحصر بفرد است.

حال با استفاده از قضیه ۲، قضیه نقطه ثابت کاریستی در یک فضای متریک کامل را ثابت

می‌کنیم.

قضیه ۵. قضیه نقطه ثابت کاریستی. فرض کنید $X$ یک فضای متریک کامل و $f$ یک جنون(؟) نگاشت روی $X$ است به طوری که برای هر $x \in X$،

$$d(x, f(x)) + F(f(x)) \leq F(x),$$

که در آن $F$ تابع نیم پیوسته پایینی از پایین کراندار و سره از $X$ به توی $(-\infty, \infty]$ است. آن‌گاه عضو $z \in X$ وجود دارد به طوری که $z = f(z)$ و $F(z) < \infty$.

اثبات. چون $F$ سره است، پس $u \in X$ با $F(u) < \infty$ وجود دارد. فرض کنید

$$X' = \{x \in X : F(x) \leq F(u) - d(u, x)\}.$$

در این صورت $X'$ ناتهی و بسته است (چرا؟). همچنین دیده می‌شود که $X'$ تحت نگاشت $f$ پایا است. در واقع برای هر $x \in X'$ داریم

$$F(f(x)) + d(x, f(x)) \leq F(x) \leq F(u) - d(u, x),$$

بنابراین

$$F(f(x)) \leq F(u) - \{d(u, x) + d(x, f(x))\}$$
$$\leq F(u) - d(u, f(x)).$$

پس $f(x) \in X'$. حال فرض کنید برای هر $x \in X'$، $f(x) \neq x$. آن‌گاه برای هر $x \in X'$ عضو $w \in X'$ وجود دارد که $x \neq w$ و

$$F(w) + d(x, w) \leq F(x).$$

بنابراین طبق قضیه ۲، $x_0 \in X'$ وجود دارد به طوری که

$$F(x_0) = \inf_{x \in X'} F(x)$$

برای چنین $x_0$یی در $X'$ داریم

$$0 < d(x_0, f(x_0)) \leq F(x_0) - F(f(x_0))$$
$$\leq F(f(x_0)) - F(f(x_0)) = 0$$

که تناقض است. پس $x$یی در $X'$ مانند $z$ وجود دارد به طوری که $f(z) = z$ و $F(z) < \infty$.

با استفاده از قضیه کاریستی (قضیه ۵)، یک قضیه نقطه ثابت برای نگاشت های چندمقداری را بدست می‌آوریم.

قضیه ۶. فرض کنید $X$ یک فضای متریک کامل و $T$ نگاشتی از $X$ به توی خانواده تمام زیر مجموعه های ناتهی $X$ است به طوری که برای هر $x \in X$ عضو $y \in Tx$ وجود دارد که

$$F(y) + d(x,y) \leq F(x),$$

که در آن $F$ یک تابع نیم پیوسته پایینی از پایین کراندار و سره از $X$ به توی $(-\infty,\infty]$ است. آنگاه $z \in X$ وجود دارد به طوری که $z \in Tz$ و $F(z) < \infty$.

اثبات. برای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم $f(x) = y$، که در آن $y$ عضوی از $X$ بطوری که $y \in Tx$ و $F(y) + d(x,y) \leq F(x)$. در نتیجه $f$ یک خود نگاشت روی $X$ است که در

$$F(f(x)) + d(x, f(x)) \leq F(x),$$

برای هر $x \in X$ صدق می‌کند. حال با استفاده از قضیه نقطه ثابت کاریستی (قضیه ۵) $z \in X$ وجود دارد به طوری که $z = f(z) \in Tz$ و $F(z) < \infty$.

نهایتاً در این بخش، با استفاده از قضیه ۱، قضیه نقطه ثابت نادلر را بدست می‌آوریم. قبل از آن به برخی از تعاریف و مفاهیم نیاز است.

تعریف ۷. فرض کنید $X$ یک فضای متریک است. برای هر $x \in X$ و $A \subset X$ تعریف می‌کنیم

$$d(x, A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}.$$

فرض کنید $CB(X)$ کلاس تمام زیرمجموعه های ناتهی بسته و کراندار از $X$ است. برای $A, B \in CB(X)$ تعریف می‌کنیم

$$\delta(A, B) = \sup\{d(x,B) : x \in A\}.$$

لم ۸. فرض کنید $A$ ، $B$ و $C$ اعضایی از $CB(X)$ اند، در این صورت شرایط زیر برقرارند:

الف) $\delta(A,B)=0 \Leftrightarrow A\subset B$ ؛

ب) $\delta(A,B)\leq \delta(A,C)+\delta(C,B)$ .

اثبات. الف) از تعریف $\delta$ داریم

$$\delta(A,B)=0 \Leftrightarrow d(x,B)=0 \quad \forall x\in A$$

چون $B$ در $X$ بسته است، پس

$$d(x,B)=0 \Leftrightarrow x\in B.$$

بنابراین

$$\delta(A,B)=0 \Leftrightarrow A\subset B.$$

ب) برای $a\in A$، $b\in B$ و $c\in C$ داریم

$$d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b),$$

و بنابراین

$$d(a,B)\leq d(a,c)+d(c,B).$$

چون $c\in C$ دلخواه است پس

$$d(a,B)\leq d(a,C)+\delta(C,B)$$

چون $a\in A$ دلخواه است، داریم

$$\delta(A,B)\leq \delta(A,C)+\delta(C,B).$$

با استفاده از لم ۸، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۹. فرض کنید $X$ یک فضای متریک و $CB(X)$ کلاس تمام زیرمجموعه‌های ناتهی بسته و کراندار $X$ است. برای $A,B\in CB(X)$ تعریف می‌کنیم

$$H(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}$$

آن‌گاه $H$ روی $CB(X)$ یک متر است.

اثبات. با توجه به تعریف $H$، واضح است که $H(A,B)\geq 0$ و $H(A,B)=H(B,A)$.

همچنین

$$H(A,B)=0 \Leftrightarrow \delta(A,B)=\delta(B,A)=0 \Leftrightarrow A\subset B,\ B\subset A \Leftrightarrow A=B$$

نهایتاً داریم

$$\begin{aligned}
H(A,B) &= \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} \\
&\leq \max\{\delta(A,C)+\delta(C,B), \delta(B+C)+\delta(C,A)\} \\
&= \max\{\delta(A,C)+\delta(C,B), \delta(C,A)+\delta(B,C)\} \\
&\leq \max\{\delta(A,C), \delta(C,A)\}+\max\{\delta(C,B), \delta(B,C)\} \\
&= H(A,C)+H(C,B).
\end{aligned}$$

تعریف ۱۰. تر $H$ روی $CB(X)$ را متریک هاسدورف نامیم.

تعریف ۱۱. فرض کنید $T$ نگاشتی از فضای متریک $X$ توی $CB(X)$ است. $T$ را یک نگاشت نا انبساطی (غیر انبساطی) نامیم هرگاه

$$H(Tx,Ty) \leq d(x,y), \quad \forall x,y \in X.$$

اگر $k<1$ موجود باشد به طوری که

$$H(Tx,Ty) \leq k\, d(x,y), \quad \forall x,y \in X,$$

آن گاه $T$ را یک انقباض یا $k$-انقباض گوییم.

توضیح ۱۲. اگر $T$ نا انبساطی یا $k$-انقباض باشد، تابع $g$ با مقادیر حقیقی روی $X$ تعریف شده توسط

$$g(x) = d(x,Tx), \quad \forall x \in X,$$

پیوسته است. (تمرین ۴ از H۵).

نتیجه ۱۳. قضیه نقطه ثابت نادلر. فرض کنید $X$ یک فضای متریک کامل و $T$ یک $k$-انقباض از $X$ توی $CB(X)$ است. آن گاه $T$ دارای یک نقطه ثابت در $X$ است.

اثبات. فرض کنید برای هر $x \in X$،

$$d(x,Tx) > 0$$

و عدد مثبت $\epsilon$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که $\epsilon < \frac{1}{k} - 1$. در این صورت برای هر $x \in X$، عضو $y \in Tx$ را می‌توان اختیار کرد به طوری که

$$d(x,y) \le (1+\epsilon)\, d(x,Tx).$$

چون

$$d(y,Ty) \le H(Tx,Ty) \le k\, d(x,y) \le k(1+\epsilon) d(x,Tx),$$

پس $\inf_{x\in X} d(x,Tx) = 0$. علاوه بر آن داریم

$$\begin{aligned} d(x,Tx) - d(y,Ty) &\geq d(x,Tx) - k\,d(x,y) \\ &\geq \frac{1}{1+\epsilon} d(x,y) - k\, d(x,y) \\ &= \left(\frac{1}{1+\epsilon} - k\right) d(x,y) \end{aligned}$$

حال $F: X \to \mathbb{R}$ را توسط

$$F(x) = \left(\frac{1}{1+\epsilon} - k\right)^{-1} d(x,Tx) \qquad \forall x \in X$$

تعریف می‌کنیم. از نامساوی بالا داریم

$$d(x,y) \le F(x) - F(y).$$

حال با استفاده از قضیه ۱، $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $F(x_0) = 0$ یعنی

$$d(x_0, Tx_0) = 0$$

که یک تناقض است، پس عضوی در $X$ باید وجود داشته باشد مانند $x_1$ به طوری که

$$d(x_1, Tx_1) = 0$$

و حکم حاصل می‌شود.

تعریف ۱۴. فرض کنید $X$ و $Y$ مجموعه‌های ناتهی و $2^Y$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی $Y$ است. نگاشت $T$ از $X$ به توی $2^Y$ را یک نگاشت مجموعه مقدار از $X$ به $Y$ نامیم.