۲.۲ w-فاصله‌ها روی فضاهای متریک

تعریف ۱. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. تابع $p: X\times X \to [0,\infty)$ را یک w-فاصله روی X نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱. برای هر $x,y,z\in X$، $p(x,z)\le p(x,y)+p(y,z)$

۲. برای هر $x\in X$، $p(x,\cdot): X\to[0,\infty)$ نیم پیوسته پایینی باشد.

۳. برای هر $\varepsilon>0$ داده شده، $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که $p(z,x)\le\delta$ و $p(z,y)\le\delta$ نتیجه دهد $d(x,y)\le\varepsilon$.

مثال ۲. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. آنگاه $p=d$ یک w-فاصله روی X است.

حل. (۱) و (۲) واضح اند. برای (۳)، فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. قرار می‌دهیم $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. اگر $d(z,x)\le\delta$ و $d(z,y)\le\delta$ داریم

$$d(x,y)\le d(z,x)+d(z,y)\le\delta+\delta=\varepsilon$$

مثال ۳. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. تابع $p:X\times X\to[0,\infty)$ تعریف شده توسط $p(x,y)=c$ برای هر $x,y\in X$ یک w-فاصله روی X است که در آن c عدد حقیقی مثبتی است.

حل. (۱) و (۲) واضح اند. برای (۳)، فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. قرار می‌دهیم $\delta=\frac{c}{2}$. در این صورت $p(z,x)\le\delta$ و $p(z,y)\le\delta$ نتیجه می‌دهد $d(x,y)\le\varepsilon$.

مثال ۴. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار با نرم $\|\cdot\|$ است. در این صورت تابع p از $X\times X$ به توی $[0,\infty)$ تعریف شده توسط

$$p(x,y)=\|x\|+\|y\| \qquad \forall x,y\in X$$

یک w-فاصله روی X است.

حل. فرض کنید $x, y, z \in X$. آن گاه

$$p(x,z) = \|x\| + \|z\| \le p(x,y) + p(y,z).$$

که (۱) را نتیجه می‌دهد. (۲) واضح است. فرض کنید $\varepsilon > 0$ و قرار می‌دهیم $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. در این صورت اگر $p(z,x) \le \delta$ و $p(z,y) \le \delta$ آن گاه

$$d(x,y) = \|x-y\| \le \|x\| + \|y\| \le p(z,x) + p(z,y) \le \delta + \delta = \varepsilon$$

که (۳) را نتیجه می‌دهد.

مثال ۵. فرض کنید X یک فضای متریک و T نگاشتی پیوسته از X به توی خودش است. تابع $p: X \times X \to [0,\infty)$ تعریف شده توسط

$$p(x,y) = \max\{d(Tx,y),\ d(Tx,Ty)\} \qquad \forall x,y \in X,$$

یک w-فاصله روی X است.

حل. فرض کنید $x, y, z \in X$. در این صورت، اگر $d(Tx,z) \geq d(Tx,Tz)$ آن گاه

$$\begin{aligned} p(x,z) = d(Tx,z) &= d(Tx,Ty) + d(Ty,z) \\ &\le \max\{d(Tx,y), d(Tx,Ty)\} + \max\{d(Ty,z), d(Ty,Tz)\} \\ &= p(x,y) + p(y,z) \end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر $d(Tx,Tz) \geq d(Tx,z)$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} p(x,z) = d(Tx,Tz) &\le d(Tx,Ty) + d(Ty,Tz) \\ &\le \max\{d(Tx,y), d(Tx,Ty)\} + \max\{d(Ty,z), d(Ty,Tz)\} \\ &= p(x,y) + p(y,z). \end{aligned}$$

و (۱) حاصل می‌شود.

چون T پیوسته است، پس برای هر $x \in X$، به وضوح $p(x,\cdot): X \to [0,\infty)$ نیم پیوسته پایینی است. حال فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است، قرار می‌دهیم $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. در این صورت اگر $p(z,x) \le \delta$ و $p(z,y) \le \delta$ باشند، داریم $d(Tz,x) \le \delta$ و $d(Tz,y) \le \delta$. بنابراین

$$d(x,y) \le d(Tz,x) + d(Tz,y) \le 2\delta = \varepsilon.$$

که (۳) حاصل می‌شود. پس p یک w-فاصله روی X است.

مثال ۶. فرض کنید F یک زیرمجموعه بسته و کراندار از فضای متریک X است، فرض کنید F شامل حداقل دو نقطه است و c ثابتی با $c \geq \delta(F)$ که در آن $\delta(F)$ قطر F است، در این صورت تابع $p: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ تولید شده توسط

$$p(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & x, y \in F \\ c & x \notin F \text{ یا } y \notin F \end{cases}$$

یک w-فاصله روی X است.

حل. در حالتی که $x, y, z \in F$، داریم

$$p(x,z) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = p(x,y) + p(y,z)$$

از طرف دیگر، داریم

$$p(x,z) \leq c \leq p(x,y) + p(y,z).$$

فرض کنید $x \in X$. اگر $\alpha \geq c$ آن گاه $\{y \in X : p(x,y) \leq \alpha\} = X$ بنابراین مجموعه فوق بسته است. فرض کنید $\alpha < c$، در این صورت $p(x,y) \leq \alpha$ نتیجه می دهد $y \in F$، پس

$$\{y \in X : p(x,y) \leq \alpha\} = \{y \in X : d(x,y) \leq \alpha\} \cap F$$

اگر $x \notin F$ آن گاه $\{y \in X : p(x,y) \leq \alpha\} = \emptyset$. این مجموعه ها نیز بسته اند، بنابراین $p(x,\cdot) : X \longrightarrow [0, \infty)$ نیم پیوسته پایینی است.

حال فرض کنید ε یک عدد حقیقی مثبت است. آن گاه $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{\varepsilon}{n_0} < c$$

قرار می دهیم $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_0}$، در نتیجه $p(z,x) \leq \delta$ و $p(z,y) \leq \delta$ نتیجه می دهند که $x, y, z \in F$. پس

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) = p(z,x) + p(z,y)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2n_0} + \frac{\varepsilon}{2n_0} = \frac{\varepsilon}{n_0} \leq \varepsilon$$

که اثبات را کامل می کند. پس p یک w-فاصله روی X است.

در این قسمت، برخی از خواص w-فاصله ها را شرح می دهیم. لم زیر کلیدی است که در اثبات قضایای این قسمت مورد استفاده قرار می گیرد.

لم ۷. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است و p یک w-فاصله روی X است. فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در X اند. فرض کنید $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ دنباله‌هایی در $[0,\infty)$ همگرا به ۰ هستند و $x, y, z \in X$. آنگاه عبارات زیر برقرارند.

الف) اگر $p(x_n, y) \leq \alpha_n$ و $p(x_n, z) \leq \beta_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ باشند آنگاه $y = z$. بالاخص، اگر $p(x, y) = 0$ و $p(x, z) = 0$ باشند آنگاه $y = z$.

ب) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $p(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ و $p(x_n, z) \leq \beta_n$ آنگاه $\{y_n\}$ همگرا به z است.

ج) اگر برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ با $m > n$ داشته باشیم $p(x_n, x_m) \leq \alpha_n$، آنگاه دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است.

د) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $p(y, x_n) \leq \alpha_n$ آنگاه $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است.

اثبات. ابتدا (ب) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. از تعریف w-فاصله $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $p(u, v) \leq \delta$ و $p(u, z) \leq \delta$ نتیجه می‌دهد $d(v, z) \leq \varepsilon$. عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که برای هر $n \geq n_0$، $\alpha_n \leq \delta$ و $\beta_n \leq \delta$. در این صورت برای هر $n \geq n_0$ داریم

$$p(x_n, y_n) \leq \alpha_n \leq \delta, \quad p(x_n, z) \leq \beta_n \leq \delta$$

و بنابراین $d(y_n, z) \leq \varepsilon$، که نتیجه می‌دهد دنباله $\{y_n\}$ همگرا به z است.

(الف) از (ب) حاصل می‌شود. برای اثبات (ج)، فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. مشابه اثبات (ب)، $\delta > 0$ و سپس $n_0 \in \mathbb{N}$ را انتخاب می‌کنیم. برای هر $n, m \geq n_0 + 1$ داریم

$$p(x_{n_0}, x_n) \leq \alpha_{n_0} < \delta, \quad p(x_{n_0}, x_m) \leq \alpha_{n_0} \leq \delta,$$

و در نتیجه $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$. پس دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است.

اثبات (د) مشابه (ج) است.

در این قسمت، ابتدا یک قضیه مینیمم‌سازی غیرمحدب را ثابت می‌کنیم که تشدیدی برای نتایج بخش ۱.۲ است.

قضیه ۸. فرض کنید X یک فضای متریک کامل و $f: X \to (-\infty, \infty]$ تابع نیم پیوسته سره‌ای است که از پایین کراندار می‌باشد. فرض کنید w-فاصله p روی X وجود دارد به طوری که برای هر $u \in X$ با $\inf_{x \in X} f(x) < f(u)$ عضو $v \in X$ با $v \neq u$ وجود داشته باشد که

$$f(v) + p(u,v) \leq f(u),$$

آنگاه $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $\inf_{x \in X} f(x) = f(x_0)$.

اثبات. فرض کنید برای هر $y \in X$

$$\inf_{x \in X} f(x) < f(y),$$

و $u \in X$ را با $f(u) < \infty$ انتخاب کنید. آنگاه به طور استقرایی دنباله $\{u_n\}$ در X با شروع $u = u_1$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنید $u_n \in X$ انتخاب شده است، $u_{n+1} \in S(u_n)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$S(u_n) = \{x \in X : f(x) + p(u_n, x) \leq f(u_n)\}$$

$$K(u_n) = \inf_{x \in S(u_n)} f(x)$$

و

$$f(u_{n+1}) \leq K(u_n) + \frac{1}{n}.$$

چون $f(u_{n+1}) + p(u_n, u_{n+1}) \leq f(u_n)$ پس دنباله $\{f(u_n)\}$ غیرصعودی است. بنابراین $\lim_{n\to\infty} f(u_n)$ موجود است. قرار می‌دهیم $k = \lim_{n\to\infty} f(u_n)$. ادعا می‌کنیم $\{u_n\}$ یک دنباله کشی است. در واقع، اگر $n < m$ آنگاه

$$\begin{aligned} p(u_n, u_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} p(u_j, u_{j+1}) \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \{f(u_j) - f(u_{j+1})\} \\ &= f(u_n) - f(u_m) \leq f(u_n) - k \qquad (1) \end{aligned}$$

از لم ۷ نتیجه می‌شود که $\{u_n\}$ یک دنباله کشی است. فرض کنید $u_n \to v_0$. در این صورت، اگر در (۱)، $m \to \infty$ داریم:

$$p(u_n, v_0) \leq f(u_n) - k \leq f(u_n) - f(v_0).$$

از طرف دیگر، طبق فرض، $v_1 \in X$ وجود دارد به طوری که $v_1 \neq v_0$ و

$$f(v_1)+p(v_0,v_1)\le f(v_0).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(v_1)+p(u_n,v_1) &\le f(v_1)+p(u_n,v_0)+p(v_0,v_1)\\ &\le f(v_0)+p(u_n,v_0)\\ &\le f(u_n) \qquad (2)\end{aligned}$$

در نتیجه $v_1\in S(u_n)$. چون برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$f(v_0)\le f(u_{n+1})\le k(u_n)+\frac{1}{n}\le f(v_1)+\frac{1}{n}$$

داریم $f(v_0)\le f(v_1)$، پس $f(v_0)=f(v_1)$. بنابراین $p(v_0,v_1)=0$. حال طبق فرض $v_2\in X$ وجود دارد به طوری که $v_2\neq v_1$ و $f(v_2)+p(v_1,v_2)\le f(v_1)$. همانند (۲) داریم $f(v_2)+p(u_n,v_2)\le f(u_n)$ و در نتیجه $v_2\in S(u_n)$. پس

$$f(v_1)=f(v_0)\le f(v_2).$$

در نتیجه $p(v_1,v_2)=0$، از $p(v_0,v_2)\le p(v_0,v_1)+p(v_1,v_2)=0$ داریم $p(v_0,v_2)=1$
پس $p(v_0,v_1)=0$ و $p(v_0,v_2)=0$ و از لم ۷ داریم $v_1=v_2$ که یک تناقض است.

قضیه زیر تعمیم قضیه نقطه ثابت کارستی است.

قضیه ۹. فرض کنید X یک فضای متریک کامل و $f:X\to(-\infty,\infty]$ تابع نیم پیوسته پایینی سره و از پایین کراندار است. فرض کنید T نگاشتی از X توی خودش است. فرض کنید یک w-فاصله p روی X وجود دارد به طوری که برای هر $x\in X$،

$$f(Tx)+p(x,Tx)\le f(x).$$

آن‌گاه $x_0\in X$ وجود دارد به طوری که $Tx_0=x_0$ و $p(x_0,x_0)=0$.

اثبات. چون f سره است، پس $u\in X$ وجود دارد به طوری که $f(u)<\infty$. قرار می‌دهیم

$$Y=\{x\in X:\ f(x)\le f(u)\}.$$

چون f نیم پیوسته پایینی است پس Y بسته است، بنابراین Y کامل است. فرض کنید

$x\in Y$. چون $f(Tx)+p(x,Tx)\le f(x)<f(u)$ داریم $Tx\in Y$، بنابراین Y تحت T پایا است. حال فرض کنید برای هر $x\in Y$، $Tx\neq x$. طبق قضیه (۸)، $v_0\in Y$ وجود دارد به طوری که $f(v_0)=\inf_{x\in Y} f(x)$. چون

$$f(Tv_0)+p(v_0,Tv_0)\le f(v_0),$$

و

$$f(v_0)=\inf_{x\in Y} f(x)$$

داریم

$$f(Tv_0)=f(v_0)=\inf_{x\in Y} f(x)$$

و $p(v_0,Tv_0)=0$. به طور مشابه

$$f(T^2v_0)=f(Tv_0)=\inf_{x\in Y} f(x)$$

و $p(Tv_0,T^2v_0)=0$. حال چون

$$p(v_0,T^2v_0)\le p(v_0,Tv_0)+p(Tv_0,T^2v_0)=0$$

پس

$$p(v_0,T^2v_0)=0$$

بنابراین از لم (۷) داریم $Tv_0=T^2v_0$. که تناقض است. بنابراین T دارای نقطه ثابتی مانند x_0 در Y است. از طرفی چون $f(x_0)<\infty$، از

$$f(x_0)+p(x_0,x_0)=f(Tx_0)+p(x_0,Tx_0)\le f(x_0)$$

داریم $p(x_0,x_0)=0$.

تعریف ۱۵. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. در این صورت نگاشت مجموعه‌مقدار T از X توی خودش را انقباضی ضعیف یا p-انقباضی نامیم، هرگاه یک w-فاصله p روی X و $r\in[0,1)$ وجود داشته باشند به طوری که برای $x_1,x_2\in X$ و $y_1\in Tx_1$، عضو $y_2\in Tx_2$ با $p(y_1,y_2)\le r\,p(x_1,x_2)$ موجود باشد.
بالاخص، یک نگاشت تک‌مقداری T از X توی خودش را انقباض ضعیف یا p-انقباض نامیم هرگاه w-فاصله p روی X و عدد $r\in[0,1)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر

$x, y \in X$ ،

$$p(Tx, Ty) \le r\, p(x, y).$$

قضیه ۱۱. فرض کنید X یک فضای متریک کامل و T نگاشتی چندمقداری p-انقباضی از X توی خودش است به طوری که برای هر $x \in X$، Tx زیرمجموعه بسته و ناتهی از X است. آنگاه $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $x_0 \in Tx_0$ و $p(x_0, x_0) = 0$.

اثبات. فرض کنید p یک w-فاصله روی X و r عددی حقیقی در $[0,1)$ است به طوری که برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $y_1 \in Tx_1$ عضو $y_2 \in Tx_2$ با $p(y_1, y_2) \le r\, p(x_1, x_2)$ وجود دارد.
فرض کنید $u_0 \in X$ و $u_1 \in Tu_0$ ثابت اند، آنگاه $u_2 \in Tu_1$ وجود دارد به طوری که

$$p(u_1, u_2) \le r\, p(u_0, u_1)$$

بنابراین دنباله $\{u_n\}$ در X را داریم به طوری که $u_{n+1} \in Tu_n$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$p(u_n, u_{n+1}) \le r\, p(u_{n-1}, u_n).$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$p(u_n, u_{n+1}) \le r\, p(u_{n-1}, u_n) \le r^2 p(u_{n-2}, u_{n-1}) \le \cdots \le r^n p(u_0, u_1)$$

و بنابراین برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ با $m > n$

$$\begin{aligned} p(u_n, u_m) &\le p(u_n, u_{n+1}) + p(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + p(u_{m-1}, u_m) \\ &\le r^n p(u_0, u_1) + r^{n+1} p(u_0, u_1) + \cdots + r^{m-1} p(u_0, u_1) \\ &\le \frac{r^n}{1-r}\, p(u_0, u_1). \end{aligned}$$

طبق لم (۷)، دنباله $\{u_n\}$ یک دنباله کشی است. بنابراین $\{u_n\}$ همگرا به نقطه $v_0 \in X$ است. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ثابت است. چون $\{u_m\}$ همگرا به v_0 است و $p(u_n, \cdot)$ نیم‌پیوسته پایینی است، داریم

$$p(u_n, v_0) \le \liminf_{m \to \infty} p(u_n, u_m) \le \frac{r^n}{1-r}\, p(u_0, u_1) \qquad (۲)$$

همچنین، طبق فرض داریم $w_n \in Tv_0$ به طوری که $p(u_n, w_n) \le r\, p(u_{n-1}, v_0)$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$p(u_n, w_n) \le r\, p(u_{n-1}, v_0) \le \frac{r^n}{1-r}\, p(u_0, u_1).$$

طبق لم (۷)، $\{u_n\}$ همگرا به v_0 است. حال چون Tv_0 بسته است پس $v_0 \in Tv_0$. برای چنین v_0 یی، $v_1 \in Tv_0$ وجود دارد به طوری که $p(v_0,v_1) \le r\, p(v_0,v_0)$. بنابراین $\{v_n\}$ در X را داریم به طوری که $v_{n+1} \in Tv_n$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$p(v_0,v_{n+1}) \le r\, p(v_0,v_n).$$

پس

$$p(v_0,v_n) \le r\, p(v_0,v_{n-1}) \le \cdots \le r^n p(v_0,v_0).$$

طبق لم (۷)، $\{v_n\}$ یک دنباله کشی است. پس $\{v_n\}$ همگرا به $x_0 \in X$ است. چون $p(v_0,\cdot)$ نیم پیوسته پایینی است، داریم

$$p(v_0,x_0) \le \liminf_n p(v_0,v_n) \le 0$$

و در نتیجه $p(v_0,x_0)=0$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$p(u_n,x_0) \le p(u_n,v_0)+p(v_0,x_0) \le \frac{r^n}{1-r}\, p(u_0,u_1).$$

حال با استفاده از (۳) و لم (۷) نتیجه می‌گیریم که $x_0=v_0$ و بنابراین $p(v_0,v_0)=0$.

نتیجه ۱۲. فرض کنید X یک فضای متریک کامل است. اگر نگاشت T از X به توی خودش یک p-انقباض باشد آن گاه T دارای یک نقطه ثابت منحصربفرد $x_0 \in X$ است. علاوه بر آن، چنین x_0 یی در $p(x_0,x_0)=0$ صدق می‌کند.

اثبات. فرض کنید p یک w-فاصله است و r عددی حقیقی با $r \in [0,1)$ باشد به طوری که برای هر $x,y \in X$،

$$p(Tx,Ty) \le r\, p(x,y).$$

از قضیه (۱۱) نتیجه می‌شود که $x_0 \in X$ با $Tx_0=x_0$ و $p(x_0,x_0)=0$ وجود دارد. حال اگر $y_0=Ty_0$ آن گاه

$$p(x_0,y_0)=p(Tx_0,Ty_0) \le r\, p(x_0,y_0).$$

چون $r \in [0,1)$ پس $p(x_0,y_0)=0$. از $p(x_0,x_0)=0$ و قسمت (الف) لم (۷) داریم $x_0=y_0$.