۳.۲ مشخصه‌های کامل بودن متر

فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. مجموعه تمام w-فاصله‌ها روی X را با $W(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱. w-فاصله p روی X را متقارن نامیم درصورتیکه برای هر $x,y\in X$،

$$p(x,y)=p(y,x).$$

مجموعه تمام w-فاصله‌های متقارن روی X را با $W_0(X)$ نمایش می‌دهیم.

توجه داریم که متر d عضوی از $W_0(X)$ است.

تعریف ۲. مجموعه تمام نگاشت‌های T از X توی خودش را که برای آن $p\in W(X)$ و $r\in[0,1)$ وجود داشته باشند به طوری که

$$p(Tx,Ty)\leq r\,p(x,y)\qquad \forall x,y\in X,$$

را با $WC_1(X)$ نشان می‌دهیم. یعنی $WC_1(X)$ مجموعه تمام نگاشت‌های انقباضی ضعیف از X توی خودش است.

تعریف ۳. مجموعه‌های $WC_2(X)$، $WC_0(X)$، $WK_1(X)$، $WK_2(X)$ و $WK_0(X)$ شامل نگاشت‌های T از X توی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$T\in WC_2(X)$ اگر وتنها اگر $p\in W(X)$ و $r\in[0,1)$ وجود داشته باشند به طوری که

$$p(Tx,Ty)\leq r\,p(y,x),\qquad \forall x,y\in X$$

$T\in WC_0(X)$ اگر وتنها اگر $p\in W_0(X)$ و $r\in[0,1)$ وجود داشته باشند به طوری که

$$p(Tx,Ty)\leq r\,p(x,y),\qquad \forall x,y\in X.$$

$T\in WK_1(X)$ اگر وتنها اگر $p\in W(X)$ و $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$ وجود داشته باشند به طوری که

$$p(Tx,Ty)\leq \alpha\{p(Tx,x)+p(Ty,x)\},\quad \forall x,y\in X,$$

$T\in WK_2(X)$ اگر وتنها اگر $p\in W(X)$ و $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$ وجود داشته باشند به طوری که

$$p(Tx,Ty)\leq \alpha\{p(Tx,x)+p(y,Ty)\},\quad \forall x,y\in X,$$

$T\in Wk_0(X)$ اگر و تنها اگر $p\in W_0(X)$ و $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$ وجود داشته باشند به طوری که

$$p(Tx,Ty)\le\alpha\{p(Tx,x)+p(Ty,y)\},\quad \forall x,y\in X.$$

قبل از بیان و اثبات قضایای این بخش، به چند لم زیر توجه می‌کنیم.

لم ۴. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. فرض کنید p یک w-فاصله روی X است و f تابعی از X بتوی $[0,\infty)$ است. آن گاه تابع q از $X\times X$ بتوی $[0,\infty)$ داده شده توسط

$$q(x,y)=f(x)+p(x,y),$$

برای هر $(x,y)\in X\times X$ یک w-فاصله است.

اثبات. تمرین.

لم ۵. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. فرض کنید p یک w-فاصله روی X و T خودنگاشتی روی X است و u نقطه‌ای از X است به طوری که

$$\lim_{m,n\to\infty}p(T^m u,T^n u)=0$$

آن گاه برای هر $x\in X$، حدود $\lim_{k\to\infty}p(T^k u,x)$ و $\lim_{k\to\infty}p(x,T^k u)$ موجودند. علاوه بر آن، فرض کنید β و γ توابعی از X بتوی $[0,\infty)$ تعریف شده توسط

$$\beta(x)=\lim_{k\to\infty}p(T^k u,x),\qquad \gamma(x)=\lim_{k\to\infty}p(x,T^k u)$$

هستند. آن گاه احکام زیر برقرارند:

الف) β نیم پیوسته پایینی روی X است.

ب) برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود دارد به طوری که $\beta(x)\le\delta$ و $\beta(y)\le\delta$ نتیجه می‌دهد $d(x,y)\le\varepsilon$. بالاخص، مجموعه $\{x\in X:\beta(x)=0\}$ شامل حداکثر یک نقطه است.

ج) توابع q_1 و q_2 از $X\times X$ بتوی $[0,\infty)$ تعریف شده توسط

$$q_1(x,y)=\beta(x)+\beta(y),\qquad q_2(x,y)=\gamma(x)+\beta(y)$$

w-فاصله‌هایی روی X اند.

اثبات. فرض کنید $x\in X$. چون برای هر $m,n\in\mathbb{N}$

$$|p(T^m u,x)-p(T^n u,x)|\le \max\{p(T^m u,T^n u),\, p(T^n u,T^m u)\}$$

و

$$|p(x,T^m u)-p(x,T^n u)|\le \max\{p(T^m u,T^n u),\, p(T^n u,T^m u)\}$$

در نتیجه دنباله‌های $\{p(T^k u,x)\}$ و $\{p(x,T^k u)\}$ کشی هستند. پس β و γ خوش تعریف اند. حال نشان می‌دهیم β نیم پیوسته پایینی روی X است. $x\in X$ را ثابت اختیار کرده و فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به x است. فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است آنگاه $k_0\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $m\in\mathbb{N}$ با $m\geq k_0$

$$p(T^{k_0}u,x)\geq\beta(x)-\varepsilon,\quad p(T^{k_0}u,T^m u)\le\varepsilon.$$

$n\in\mathbb{N}$ را ثابت گرفته و $k_0\le k_1$ را چنان اختیار می‌کنیم که

$$p(T^{k_1}u,x_n)\le\beta(x_n)+\varepsilon.$$

در این صورت

$$p(T^{k_0}u,x_n)\le p(T^{k_0}u,T^{k_1}u)+p(T^{k_1}u,x_n)\le\beta(x_n)+2\varepsilon.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\beta(x)&\le p(T^{k_0}u,x)+\varepsilon\le\liminf_{n\to\infty}p(T^{k_0}u,x_n)+\varepsilon\\&\le\liminf_{n\to\infty}\beta(x_n)+3\varepsilon\end{aligned}$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، پس

$$\beta(x)\le\liminf_{n}\beta(x_n)$$

بنابراین β نیم پیوسته روی X است. حال قسمت (ب) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است و $\delta>0$ را چنان انتخاب کرده‌ایم که

$$p(z,v)\le2\delta,\quad p(z,w)\le2\delta\Rightarrow d(v,w)<\varepsilon.$$

فرض کنید $\beta(x)\le\delta$ و $\beta(y)\le\delta$. آنگاه $k_2\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$p(T^{k_2}u,x)\le2\delta,\quad p(T^{k_2}u,y)\le2\delta.$$

بنابراین $d(x,y)\le\varepsilon$.

برای اثبات (ج)، از (الف) و (ب) تابع q_3 از $X\times X$ بتوی $[0,\infty)$ تعریف شده

توسط $q_3(x,y)=\beta(y)$ یک ω-فاصله است. بنابراین طبق لم (۴)، q_1 و q_2 روی X، ω-فاصله‌اند و این اثبات را کامل می‌کند.

لم ۶. $WC_1(X)\subset Wk_0(X)$.

اثبات. فرض کنید $T\in WC_1(X)$، یعنی ω-فاصله p و $r\in[0,1)$ وجود دارند به طوری که برای هر $x,y\in X$

$$p(Tx,Ty)\le r\,p(x,y)$$

$u\in X$ را ثابت گرفته، برای $m,n\in\mathbb{N}$ داریم

$$p(T^m u,T^n u)\le \frac{r^{\min\{m,n\}}}{1-r}\max\{p(u,u),\,p(Tu,u),\,p(u,Tu)\},$$

چون $0\le r<1$ پس

$$\lim_{m,n\to\infty}p(T^m u,T^n u)=0.$$

طبق لم (۵) تابع $\beta(x)=\lim_{k\to\infty}p(T^k u,x)$ خوش‌تعریف است و

$$q_1(x,y)=\beta(x)+\beta(y)$$

یک ω-فاصله روی X است. از

$$\beta(Tx)\le r\,\beta(x),\quad \forall x\in X$$

داریم

$$q_1(Tx,Ty)+r\,q_1(Tx,Ty)\le r\beta(x)+r\beta(y)+r\beta(Tx)+r\beta(Ty)$$
$$=r\{q_1(Tx,x)+q_1(Ty,y)\},$$

و بنابراین

$$q_1(Tx,Ty)\le r(1+r)^{-1}\{q_1(Tx,x)+q_1(Ty,y)\},\quad \forall x,y\in X.$$

درنتیجه $T\in Wk_0(X)$.

لم ۷. $Wk_1(X)\subset WC_0(X)$.

اثبات. فرض کنید $T\in Wk_1(X)$ یعنی یک ω-فاصله p و $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$ وجود دارند به طوری که برای هر $x,y\in X$،

$$p(Tx,Ty) \le \alpha p(Tx,x) + \alpha p(Ty,y).$$

قرار می‌دهیم $r = \alpha(1-\alpha)^{-1}$. توجه داریم که برای هر $x \in X$،

$$p(T^2x, Tx) \le r\, p(Tx,x).$$

$u \in X$ را ثابت اختیار کرده، برای هر $m,n \in \mathbb{N}$ داریم

$$p(T^m u, T^n u) \le \alpha p(T^m u, T^{m-1} u) + \alpha p(T^n u, T^{n-1} u)$$
$$\le \alpha (r^{m-1} + r^{n-1})\, p(Tu,u),$$

و بنابراین

$$\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u, T^n u) = 0$$

از لم (۵) نتیجه می‌شود $\beta(x) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u, u)$ خوش تعریف است و

$$q_1(x,y) = \beta(x) + \beta(y),$$

یک w-فاصله روی X است. حال ثابت می‌کنیم برای هر $x \in X$، $\beta(Tx) \le r\beta(x)$
درواقع از

$$p(Tx,x) \le p(Tx, T^k u) + p(T^k u, x)$$
$$\le \alpha p(Tx,x) + \alpha p(T^k u, T^{k-1} u) + p(T^k u, x),$$

داریم

$$(1-\alpha)\, p(Tx,x) \le \alpha p(T^k u, T^{k-1} u) + p(T^k u, x),$$

و بنابراین

$$p(T^k u, Tx) \le \alpha p(T^k u, T^{k-1} u) + \alpha p(Tx,x)$$
$$\le r\, p(T^k u, T^{k-1} u) + r\, p(T^k u, x).$$

پس $\beta(Tx) \le r\beta(x)$. درنتیجه برای هر $x,y \in X$

$$q_1(Tx,Ty) \le r\, q_1(x,y)$$

بنابراین $T \in WC_2(X)$.

لم ۸. $WC_2(X) = WK_2(X)$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $WC_2(X) \subset WK_2(X)$. فرض کنید $T \in WC_2(X)$ یعنی

ω-فاصله p و $r\in[0,1)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x,y\in X$،

$$p(Tx,Ty)\le r\,p(x,y).$$

$u\in X$ را ثابت اختیار کرده و برای $m,n\in\mathbb{N}$، اگر $m>n$ آنگاه،

$$p(T^m u,T^n u)+p(T^n u,T^m u)\le \sum_{i=n}^{m-1}\{p(T^{i+1}u,T^i u)+p(T^i u,T^{i+1}u)\}$$

$$\le \frac{r^n}{1-r}\{p(Tu,u)+p(u,Tu)\}.$$

اگر $m=n$ آنگاه $p(T^m u,T^n u)\le r^m p(u,u)$. بنابراین

$$p(T^m u,T^n u)\le \frac{r^{\min\{m,n\}}}{1-r}\{p(u,u)+p(Tu,u)+p(u,Tu)\}$$

و در نتیجه

$$\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u,T^n u)=0$$

پس از لم (۵) نتیجه می‌شود که توابع

$$\beta(x)=\lim_{k\to\infty}p(T^k u,x),\quad \gamma(x)=\lim_{k\to\infty}p(x,T^k u),$$

خوش‌تعریف اند و $q_2(x,y)=\gamma(x)+\beta(y)$ روی X یک ω-فاصله است. از آنجا که برای هر $x\in X$

$$\beta(Tx)\le r\gamma(x),\quad \gamma(Tx)\le r\beta(x),$$

داریم

$$q_2(Tx,Ty)\le r(1+r)^{-1}\{q_2(Tx,x)+q_2(y,Ty)\},\qquad \forall x,y\in X.$$

در نتیجه $T\in WK_2(X)$. یعنی $WC_2(X)\subset WK_2(X)$.

حال نشان می‌دهیم $WK_2(X)\subset WC_2(X)$. فرض کنید $T\in WK_2(X)$، یعنی ω-فاصله p و $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$ وجود دارند به طوری که برای هر $x,y\in X$،

$$p(Tx,Ty)\le\alpha p(Tx,x)+\alpha p(y,Ty).$$

قرار می‌دهیم $r=\alpha(1-\alpha)^{-1}$. توجه داریم که برای هر $x\in X$

$$p(T^2x,Tx)\le r p(x,Tx),\qquad p(Tx,T^2x)\le r p(Tx,x).$$

$u\in X$ را ثابت اختیار می‌کنیم. برای $m,n\in\mathbb{N}$ داریم

$$p(T^m u,T^n u)\le\alpha p(T^m u,T^{m-1}u)+\alpha p(T^{n-1}u,T^n u)$$

$$\le p(T^m u,T^{m-1}u)+p(T^{n-1}u,T^n u)$$

$$\le (r^{m-1}+r^{n-1})\{p(Tu,u)+p(u,Tu)\},$$

و بنابراین

$$\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u, T^n u)=0$$

پس از لم (۵) نتیجه می‌شود که توابع

$$\beta(x)=\lim_{k\to\infty} p(T^k u,x), \qquad \gamma(x)=\lim_{k\to\infty} p(x,T^k u)$$

خوش تعریف اند و $q_2(x,y)=\gamma(x)+\beta(y)$ روی X یک w-فاصله است. حال ثابت می‌کنیم برای هر $x\in X$، $\beta(Tx)\le r\gamma(x)$. در واقع از

$$p(x,Tx)\le p(x,T^k u)+p(T^k u,Tx)$$
$$\le p(x,T^k u)+\alpha p(T^k u,T^{k-1}u)+\alpha p(x,Tx),$$

داریم

$$(1-\alpha)p(x,Tx)\le p(x,T^k u)+\alpha p(T^k u,T^{k-1}u)$$

و بنابراین

$$p(T^k u,Tx)\le \alpha p(T^k u,T^{k-1}u)+\alpha p(x,Tx)\le r p(T^k u,T^{k-1}u)+r p(x,T^k u).$$

پس $\beta(Tx)\le r\gamma(x)$، به طور مشابه $\gamma(Tx)\le r\beta(x)$، در نتیجه برای هر $x,y\in X$

$$q_2(Tx,Ty)\le r q_2(y,x).$$

یعنی $T\in WC_2(X)$ و حکم تمام است.

اکنون می‌توانیم اولین قضیه در این بخش را بیان کنیم.

قضیه ۹. فرض کنید X یک فضای متریک است. آنگاه

$$WC_1(X)=WC_0(X)=WK_1(X)=WK_0(X)\subset WC_2(X)=WK_2(X).$$

اثبات. واضح است که $WC_0(X)\subset WC_1(X)$ و $WK_0(X)\subset WK_1(X)$. طبق لم های (۹) و (۷) داریم

$$WC_0(X)=WC_1(X)=WK_0(X)=WK_1(X).$$

و از لم (۵) حکم حاصل می‌شود.

حال می‌خواهیم قضیه زیر را بیان و اثبات کنیم. قبل از آن تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱۰. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. نگاشت T از X به توی خودش را کانان نامیم هرگاه $r\in[0,\frac{1}{2})$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x,y\in X$،

$$d(Tx,Ty)\le r\{d(Tx,x)+d(Ty,y)\}.$$

قضیه ۱۱. فرض کنید X یک فضای متریک با متر d است. در این صورت عبارات زیر با هم معادلند.

الف) X کامل است؛

ب) هر نگاشت کانان T از X به توی خودش دارای یک نقطه ثابت در X است،

ج) برای هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در X و هر میانگین μ روی $\mathbb{N}$ به طوری که داشته باشیم

$$\inf_{x\in X}\mu_n d(x_n,x)=0$$

$x_0\in X$ وجود دارد که برای آن $\mu_n d(x_n,x_0)=0$.

اثبات. (الف) $\Rightarrow$ (ب) از نتیجه (۱۲.۲) و قضیه (۱۰) واضح است. (اثبات مستقیم به عنوان تمرین واگذار می‌شود).

(ب) $\Rightarrow$ (ج) فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار در X است و μ یک میانگین روی $\mathbb{N}$ است به طوری که $\inf_{x\in X}\mu_n d(x_n,x)=0$.

نگاشت T از X به توی خودش را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $x\in X$، نقطه $Tx\in X$ با $\mu_n d(x_n,Tx)\le\frac{1}{4}\mu_n d(x_n,x)$ اختیار می‌کنیم. نشان می‌دهیم T یک نگاشت کانان است. فرض کنید x و y نقاط دلخواهی در X اند. در این صورت

$$\mu_n d(x_n,Tx)\le\frac{1}{4}\mu_n d(x_n,x)\le\frac{1}{4}\{\mu_n d(x_n,Tx)+\mu_n d(Tx,x)\}$$

بنابراین $\mu_n d(x_n,Tx)\le\frac{1}{3}d(Tx,x)$. به طور مشابه $\mu_n d(x_n,Ty)\le\frac{1}{3}d(Ty,y)$.
پس

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&=\mu_n d(Tx,Ty)\\&\le\mu_n d(x_n,Tx)+\mu_n d(x_n,Ty)\\&\le\frac{1}{3}d(Tx,x)+\frac{1}{3}d(Ty,y).\end{aligned}$$

بنابراین T یک نگاشت کانان است. از (ب) نتیجه می‌شود که نقطه ثابت $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $Tx_0 = x_0$. پس

$$\mu_n d(x_n, x_0) = \mu_n d(x_n, Tx_0) \leq \frac{1}{4} \mu_n d(x_n, x_0).$$

بنابراین $\mu_n d(x_n, x_0) = 0$ و این (ج) را نتیجه می‌دهد.

حال نشان می‌دهیم (ج) $\Leftarrow$ (الف). فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله کشی در X است و μ یک حد باناخ باشد. به سادگی دیده می‌شود که برای هر $x \in X$،

$$\mu_n d(x_n, x) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, x),$$

و

$$\inf_{x \in X} \mu_n d(x_n, x) = 0.$$

پس از (ج) نتیجه می‌شود که نقطه $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $\mu_n d(x_n, x_0) = 0$. بنابراین $\lim_n d(x_n, x_0) = 0$. در نتیجه X کامل است.

با استفاده از قضیه (۱۱) نتیجه را داریم.

نتیجه ۱۲. فرض کنید X یک فضای متریک است. در این صورت عبارات زیر باهم معادلند.

الف) X کامل است؛

ب) هر نگاشت انقباضی ضعیف از X بتوی خودش دارای یک نقطه ثابت در X است.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب). در بخش (۲.۲) ثابت شده است.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). طبق قضیه (۱۰)، $WK_0(X) = WC_1(X)$. چون $WK_0(X)$ شامل تمام نگاشت‌های کانان از X بتوی خودش است، پس از قضیه (۱۱) حکم حاصل می‌شود.