انتگرال ریمان - استیلجس

۱. تعاریف عمومی و برخی از خواص

انتگرال ریمان - استیلجس در واقع تعمیم مستقیم انتگرال ریمان ارائه شده در فصل ۱ است. در این بخش تعریف عمومی این انتگرال را بیان می‌کنیم و در بخشهای بعد حالتهایی را در نظر می‌گیریم که در بیشتر مراجع آنها نیز مطرح می‌گردند.

۱.۱. تعریف: فرض کنید توابع f و g بر $[a,b]$ کراندارند. افراز P از فاصله $[a,b]$ به صورت $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ که در آن $x_0=a$ و $x_n=b$ را در نظر بگیرید. اگر افراز P' از فاصله $[a,b]$ چنان باشد که $P \subseteq P'$، گوییم P' ظریفتر از P است.

قرار می‌دهیم

$$\|P\| = \max\{|x_i - x_{i-1}| : 1 \le i \le n\}$$

$\|P\|$ را نُرم افراز نامیم. واضح است که اگر P' تظریفی از P باشد آنگاه $\|P'\| \le \|P\|$. نمو تابع g نظیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ را در نظر بگیرید:

$$\Delta g_i = \Delta g_i(x) = g(x_i) - g(x_{i-1}) \qquad i=1,\ldots,n$$

مجموع

$$S(P,f,g) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta g_i$$

که در آن t_i نقاط دلخواهی در $[x_{i-1}, x_i]$ است را مجموع ریمان - استیلجس f نسبت به g نامیم.

۲.۱ تعریف: فرض کنید f و g توابعی کراندار روی $[a,b]$ باشند. گوییم f نسبت به g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان استیلجس (R.S.) است هرگاه عددی مانند A وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر $\varepsilon > 0$ داده شده افرازی مانند P_ε بتوان

یافت که برای هر تظریف P از P_ε داشته باشیم

$$|S(P,f,g)-A|<\varepsilon$$

مقدار A را به صورت $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ یا $\int_a^b f\,dg$ نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات برای تأکید بر این مطلب که با انتگرال ریمان - استیلیجس سروکار داریم، آن را به فرمهای زیر نیز می‌نویسیم:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) \quad \text{یا} \quad \overset{b}{\underset{a}{S}} f(x)dg(x)$$

هرگاه f نسبت به g انتگرال‌پذیر ریمان - استیلیجس باشد، می‌نویسیم $f\in\mathcal{R}(g)$ بر $[a,b]$.

درواقع حد تناهی مجموع استیلیجس وقتی که نرم افراز P به سمت صفر میل کند، انتگرال ریمان - استیلیجس تابع $f(x)$ نسبت به تابع $g(x)$ است، یعنی

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,g)=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_k)\Delta g_i$$

در اینجا حد را به همان معنای حالت انتگرال معین معمولی می‌گیریم. به زبان دقیق‌تر: عدد A را انتگرال ریمان - استیلیجس نامیم هرگاه برای $\varepsilon>0$ دلخواه بتوان عدد $\delta>0$ را چنان یافت که تنها با تقسیم بازهٔ $[a,b]$ به زیربازه‌هایی و انتخاب نقاط این زیربازه‌ها به عنوان افراز P به نحوی که داشته باشیم $\|P\|<\delta$ بلافاصله نابرابری زیر برای هر انتخاب دلخواه t_i در بازه‌های متناظر برقرار شود:

$$|S(P,f,g)-A|<\varepsilon$$

دیده می‌شود که تنها اختلاف تعریف فوق با تعریف معمولی انتگرال ریمان (که البته اختلافی اساسی است) در این است که $f(t_i)$ به جای نمو Δx_i متغیر مستقل، در نمو $\Delta g(x_i)$ تابع دوم ضرب می‌شود. به این ترتیب با انتخاب $g(x)=x$، انتگرال ریمان حالت خاصی از انتگرال ریمان - استیلیجس است.

<u>۳.۱ قضیه</u>: با اطلاعات تعریف ۲.۱ اگر f نسبت به g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان - استیلیجس باشد، مقدار این انتگرال منحصربفرد است.

اثبات. فرض کنید $f\in \mathcal{R}(g)$ روی $[a,b]$ و A_1 و A_2 دو مقدار برای $\int_a^b f\,dg$ باشد. فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است طبق تعریف برای A_1 و A_2 به ترتیب افرازهای P_1 و P_2 وجود دارد بطوری که

$$\forall P\supseteq P_1 \quad , \quad |S(P,f,g)-A_1|<\frac{\epsilon}{2}$$
$$\forall P\supseteq P_2 \quad , \quad |S(P,f,g)-A_2|<\frac{\epsilon}{2}$$

قرار می‌دهیم $P_\epsilon=P_1\cup P_2$. برای $P\supseteq P_\epsilon$ داریم

$$\begin{aligned}|A_1-A_2| &= |A_1-S(P,f,g)+S(P,f,g)-A_2|\\ &\le |A_1-S(P,f,g)|+|S(P,f,g)-A_2|\\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

پس به ازای هر $\epsilon>0$ داریم $|A_1-A_2|<\epsilon$. در نتیجه $A_1-A_2=0$ یعنی $A_1=A_2$.

۴.۱ قضیه: الف) اگر $f_1,f_2\in\mathcal{R}(g)$ و c_1 و c_2 دو عدد ثابت باشند آنگاه $c_1f_1+c_2f_2\in\mathcal{R}(g)$ روی $[a,b]$ و

$$\int_a^b (c_1f_1+c_2f_2)\,dg=c_1\int_a^b f_1\,dg+c_2\int_a^b f_2\,dg$$

ب): اگر $f\in\mathcal{R}(g_1)$ و $f\in\mathcal{R}(g_2)$ روی $[a,b]$ بوده و c_1 و c_2 اعداد ثابت باشند آنگاه $f\in\mathcal{R}(c_1g_1+c_2g_2)$ روی $[a,b]$ و داریم

$$\int_a^b f\,d(c_1g_1+c_2g_2)=c_1\int_a^b f\,dg_1+c_2\int_a^b f\,dg_2$$

اثبات: الف) فرض $\epsilon>0$ دلخواه داده شده است. چون $f_1\in\mathcal{R}(g)$ و $f_2\in\mathcal{R}(g)$ داریم: ($c_1\neq 0$ ، $c_2\neq 0$)

$$\exists P_\epsilon' \ \text{s.t.}\ \forall P\supseteq P_\epsilon' \quad , \quad \left|S(P,f_1,g)-\int_a^b f_1\,dg\right|<\epsilon/2|c_1|$$
$$\exists P_\epsilon'' \ \text{s.t.}\ \forall P\supseteq P_\epsilon'' \quad , \quad \left|S(P,f_2,g)-\int_a^b f_2\,dg\right|<\epsilon/2|c_2|$$

حال به جمع ریمان-استیلیجس تابع $c_1f_1+c_2f_2$ نگاه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}S(P,c_1f_1+c_2f_2,g) &= \sum_{i=1}^{n}(c_1f_1+c_2f_2)(t_i)\,\Delta g_i\\ &= c_1\sum_{i=1}^{n}f_1(t_i)\,\Delta g_i+c_2\sum_{i=1}^{n}f_2(t_i)\,\Delta g_i\end{aligned}$$

$$= c_1 S(P, f_1, g) + c_2 S(P, f_2, g)$$

پس اگر قرار دهیم $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$. برای هر افراز P که $P \supseteq P_\varepsilon$ داریم

$$|S(P, c_1f_1+c_2f_2, g) - c_1\int_a^b f_1 dg - c_2\int_a^b f_2 dg| \le |c_1 S(P, f_1, g) - c_1\int_a^b f_1 dg|$$
$$+ |c_2 S(P, f_2, g) - c_2\int_a^b f_2 dg|$$
$$< |c_1| \frac{\varepsilon}{2|c_1|} + |c_2|\frac{\varepsilon}{2|c_2|} = \varepsilon$$

پس $c_1f_1+c_2f_2 \in \mathcal{R}(g)$ روی $[a,b]$ و

$$\int_a^b (c_1f_1+c_2f_2) dg = c_1\int_a^b f_1 dg + c_2\int_a^b f_2 dg$$

در حالتی که $c_1 = 0$ یا $c_2 = 0$ یا هر دو صفر باشند، حکم واضح است.

<u>ب)</u> فرض کنید $c_1 \neq 0$، $c_2 \neq 0$ و $\varepsilon > 0$ داده شده است. بنابراین

$$\exists P'_\varepsilon \quad s.t. \quad \forall P \supseteq P'_\varepsilon, \quad |S(P, f, g_1) - \int_a^b f dg_1| < \varepsilon/2|c_1|$$
$$\exists P''_\varepsilon \quad s.t. \quad \forall P \supseteq P''_\varepsilon, \quad |S(P, f, g_2) - \int_a^b f dg_2| < \varepsilon/2|c_2|$$

از طرفی داریم:

$$S(P, f, c_1g_1+c_2g_2) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta(c_1g_1+c_2g_2)_i$$

که در آن برای $i = 1, 2, \ldots, n$ ؛

$$\Delta(c_1g_1+c_2g_2)_i = (c_1g_1+c_2g_2)(x_i) - (c_1g_1+c_2g_2)(x_{i-1})$$
$$= c_1(g_1(x_i) - g_1(x_{i-1})) + c_2(g_2(x_i) - g_2(x_{i-1}))$$
$$= c_1 \Delta g_1(x_i) + c_2 \Delta g_2(x_i)$$

پس

$$S(P, f, c_1g_1+c_2g_2) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\,(c_1\Delta g_1(x_i) + c_2\Delta g_2(x_i))$$
$$= c_1\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta g_1(x_i) + c_2\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta g_2(x_i)$$
$$= c_1 S(P, f, g_1) + c_2 S(P, f, g_2)$$

حال اگر قرار دهیم $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$. برای هر افراز P که $P \supseteq P_\varepsilon$ داریم

$$|S(P, f, c_1g_1+c_2g_2) - c_1\int_a^b f dg_1 - c_2\int_a^b f dg_2| < \varepsilon$$

پس $f \in \mathcal{R}(c_1g_1+c_2g_2)$ روی $[a,b]$ ، $\int_a^b f\, d(c_1g_1+c_2g_2) = c_1\int_a^b f dg_1 + c_2\int_a^b f dg_2$

درحالتی که $c_1=0$ یا $c_2=0$ یا هردو صفر باشند حکم واضح است.

۵.۱ قضیه: فرض کنید $f\in\mathcal{R}(g)$ روی $[a,b]$ و c نقطه دلخواهی از (a,b) است. آنگاه $f\in\mathcal{R}(g)$ روی $[a,c]$ و $[c,b]$ و

$$\int_a^b f\,dg=\int_a^c f\,dg+\int_c^b f\,dg$$

اثبات.

۴.۱ تبصره: در حالت کلی از وجود انتگرال‌های $\int_a^c f\,dg$ و $\int_c^b f\,dg$ نمی‌توان وجود انتگرال $\int_a^b f\,dg$ را نتیجه گرفت. به عنوان مثال، فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[-1,1]$ بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -1\le x\le 0 \\ 1 & 0<x\le 1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & -1\le x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

برای فاصله $[-1,0]$ همیشه $f(x)=0$ پس هر مجموع استیلجس مربوط به آن صفر است.

یعنی برای هر افراز P از $[-1,0]$

$$S(P,f,g)=0$$

در نتیجه $\int_{-1}^{0} f(x)\,dg(x)=0$. در فاصله $[0,1]$، چون تابع g ثابت یک است پس برای هر افراز P از $[0,1]$،

$$\Delta g(x_i)=0$$

در نتیجه مجموع استیلجس صفر است. بنابراین $\int_0^1 f(x)\,dg(x)=0$

اما در بازه $[-1,1]$، فرض کنید $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ افرازی از این فاصله باشد بطوری که $x_i\neq 0$، $i=0,1,\dots,n$. مثلا فرض کنید نقطه ۰ در بازه k ام قرار دارد یعنی

$$x_{k-1}<0<x_k$$

آنگاه برای $i\neq k$

$$\Delta g(x_i)=g(x_i)-g(x_{i-1})=0$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} S(P,f,g) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta g(x_i) \\ &= f(t_k)\,\Delta g(x_k) \\ &= f(t_k)\,(g(x_k)-g(x_{k-1})) \\ &= f(t_k)\,(1-0)=f(t_k) \end{aligned}$$

حال اگر $x_{k-1}\le t_k\le 0$ آنگاه $S(P,f,g)=f(t_k)=0$ و اگر $0<t<x_k$ آنگاه

$S(P,f,g) = f(t_k) = 1$. درنتیجه $S(P,f,g)$ دارای حد نیست. بنابراین $\int_{-1}^{1} f(x)\,dg(x)$ وجود ندارد.

۲ حالتهای وجود انتگرال R.S.

۱.۲ قضیه: فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ و g تابعی با تغییر کراندار روی $[a,b]$ است، آنگاه انتگرال $\int_a^b f\,dg$ وجود دارد.

اثبات: نخست فرض کنید g بر $[a,b]$ صعودی است. چون f بر $[a,b]$ پیوسته است بنابراین بر بازهٔ فوق پیوستهٔ یکنواخت می‌باشد. حال برای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $\delta>0$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $t,s\in[a,b]$ که $|t-s|<\delta$ داریم

$$|f(t)-f(s)| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$$

حال افراز P از $[a,b]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|P\|<\delta$ بنابراین برای هر t_i و s_i در $[x_{i-1},x_i]$ داریم

$$|f(t_i)-f(s_i)| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$$

چون f بر $[a,b]$ کراندار است پس بر هر زیرفاصله $[x_{i-1},x_i]$ نیز کراندار می‌باشد و درنتیجه $m_i=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$ و $M_i=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$ وجود دارند و از پیوستگی تابع f داریم

$$\exists\, t_i\in[x_{i-1},x_i] \quad \text{s.t} \quad M_i=f(t_i)$$

$$\exists\, s_i\in[x_{i-1},x_i] \quad \text{s.t.} \quad m_i=f(s_i)$$

پس

$$|M_i-m_i| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \qquad i=1,2,\dots,n$$

از طرفی واضح است که

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta g(x_i) \le S(P,f,g) \le \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta g(x_i)$$

زیرا برای هر $i=1,2,\dots,n$ ، $m_i\le f(t_i)\le M_i$ پس

از آنجایی g بر [a,b] صعودی است داریم $m_i \Delta g(x_i) \leq M_i \Delta g(x_i)$

بالا عبارت (۱) برقرار است). بنابراین

$$\sum (M_i - m_i) \Delta g(x_i) < \frac{\epsilon}{g(b)-g(a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta g(x_i)$$

$$= \frac{\epsilon}{g(b)-g(a)} (g(b)-g(a))$$

$$= \epsilon$$

طبق قضیه فشار $\lim_{\|P\| \to 0} S(P,f,g) < \infty$ در نتیجه تابع f ریمان - استیلجس است (طبق توضیحات قبل از قضیه ۱

حال فرض کنید g بر [a,b] با تغییر کراندار است. پس می ... تابع صعودی کراندار نوشت: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. بنابراین ... g(x) برای افراز P عبارت است از

$$S(P,f,g) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta g(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta g_1(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta g_2(x_i)$$

... وقتی $\|P\| \to 0$ دو مجموع سمت راست دارای حد متناهی ...

$\lim_{\|P\| \to 0} S(P,f,g) < \infty$ روی [a,b] و حکم تمام است.

... فرض کنید تابع f بر [a,b] انتگرال‌پذیر ریمان باشد و تابع g پیوسته

$|g(t) - g(s)| \leq L|t-s|$

... ثابت صدق کند. آنگاه f نسبت به تابع g بر [a,b] انتگرال‌پذیر

... دوم تابع g بر [a,b] با تغییر کراندا ...

۲.۲ قضیه: فرض کنید f بر [a,b] انتگرال پذیر ریمان است و تابع g به صورت زیر تعریف شده باشد

$$g(x)=c+\int_a^x \varphi(t)\,dt$$

که در آن φ در بازه [a,b] بطور مطلق انتگرال پذیر است. آنگاه f نسبت به g بر [a,b] انتگرال پذیر ریمان ـ استیلجس است.

اثبات: I). ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که بر [a,b]، تابع φ نامنفی است. در نتیجه اگر $x_1,x_2\in[a,b]$ و $x_1<x_2$ آنگاه

$$g(x_2)=c+\int_a^{x_2}\varphi(t)\,dt=c+\int_a^{x_1}\varphi(t)\,dt+\int_{x_1}^{x_2}\varphi(t)\,dt$$
$$\geq c+\int_a^{x_1}\varphi(t)\,dt=g(x_1)$$

پس g بر [a,b] بطور یکنوا صعودی است. چون $\varphi(t)\geq 0$ و φ در بازه [a,b] بطور مطلق انتگرال پذیر است پس φ انتگرال پذیر می‌باشد و در نتیجه کراندار است. حال برای $a\leq x_1<x_2\leq b$ داریم

$$|g(x_2)-g(x_1)|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\varphi(t)\,dt\right|\leq L|x_2-x_1|=L(x_2-x_1)$$

بنابراین g بر [a,b] در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کند و با توجه به نتیجه ۲.۲، تابع f نسبت به g بر بازه [a,b] انتگرال پذیر ریمان ـ استیلجس است.

II). فرض کنید برای $\varepsilon>0$ دلخواه، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد بطوری که

$$\int_{b-\delta}^{b}\varphi(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2W}$$

که در آن

$$W=\sup_{a\leq x\leq b}f(x)-\inf_{a\leq x\leq b}f(x)$$

در این صورت b را یک نقطه خاص نامیم. فرض کنید $\varphi(t)$ بر [a,b] انتگرال پذیر بوده و b یک نقطه خاص باشد. برای افراز $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از [a,b] قرار میدهیم

$$A=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta g(x_i)$$

که در آن $M_i=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$، $m_i=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$، $\Delta g(x_i)=g(x_i)-g(x_{i-1})$

حال A را به صورت B + C می‌نویسیم، که در آن B مجموع جملاتی از جمع بالا است

که زیرفاصله‌های آن در بازهٔ $[a, b-\frac{\delta}{2}]$ قرار دارند و C جمع جملاتی از مجموع A است که متناظر با بقیه بازه‌هاست. حال هر زیربازه زمانی در $[b-\delta, b]$ قرار دارد که داشته باشیم $\|P\| = \max \Delta x_i < \frac{\delta}{2}$. پس

$$C < W \int_{b-\delta}^{b} \varphi(t)dt < \frac{\epsilon}{2}$$

از طرف دیگر، چون $\varphi(t)$ در بازهٔ $[a, b-\frac{\delta}{2}]$ انتگرال‌پذیر است پس برای $\|P\|$ به قدر کافی کوچک، B از $\frac{\epsilon}{2}$ کوچکتر می‌شود. پس

$$\lim_{\|P\| \to 0} A = \lim_{\|P\| \to 0} (B+C) = 0$$

در نتیجه f نسبت به g تحت این شرایط بر بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان ـ استیلیس است.

III) حال اگر $\varphi(t)$ در بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر مطلق باشد، توابع

$$\varphi_1(t) = |\varphi(t)| + \varphi(t)$$

$$\varphi_2(t) = |\varphi(t)| - \varphi(t)$$

نامنفی بوده و در بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند. چون

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$

بنابراین مسئله به حالتهای قبل برمی‌گردد و اثبات تمام است.

۴.۲. تبصره: اگر تابع $g(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ بجز در تعدادی متناهی نقطه دارای مشتق $g'(x)$ باشد و g همواره پیوسته بوده و درضمن g' بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)dt$$

حال اگر $g'(x)$ انتگرال‌پذیر مطلق باشد آنگاه حکم ۳.۲ را می‌توانیم درمورد تابع $g(x)$ مورد استفاده قرار دهیم.

۵.۲. قضیه: انتگرال جزء به جزء: اگر $f \in \mathcal{R}(g)$ روی $[a,b]$ باشد، آنگاه $g \in \mathcal{R}(f)$ روی $[a,b]$ داریم

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

<u>اثبات :</u> فرض کنید $\int_a^b f\,dg$ وجود دارد. افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از بازه $[a,b]$ و نقطه‌های t_i دلخواه در $[x_{i-1}, x_i]$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم، که در آن

$$a=x_0 \le t_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{i-1} \le t_{i-1} \le x_i \le \cdots \le x_{n-1} \le t_{n-1} \le x_n = b$$

مجموع ریمان - استیلیجس برای انتگرال $\int_a^b g\,df$ عبارت است از

$$S(P,g,f) = \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$

$S(P,g,f)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S(P,g,f) = \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})f(x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})f(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)f(x_i)$$

$$= -\Big\{g(t_0)f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\big(g(t_i)-g(t_{i-1})\big) - g(t_{n-1})f(b)\Big\}$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \Big\{f(a)[g(t_0)-g(a)] + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[g(t_i)-g(t_{i-1})] + f(b)[g(b)-g(t_{n-1})]\Big\}$$

عبارت داخل $\{\cdots\}$ همان جمع ریمان استیلیجس f نسبت به g بر $[a,b]$ برای افراز P_1 است که وجود آن طبق فرض قضیه داده شده است. این مجموع متناظر به افراز

$$P_1 = (a, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, b)$$

از $[a,b]$ است، یعنی برابر با $S(P_1, f, g)$ خواهد بود، مشروط به اینکه نقاط x_i به عنوان نقطه‌های انتخابی در بازه‌های $[t_{i-1}, t_i]$ برای $i=1,2,\ldots,n$ و نقاط b, a برای بازه‌های $[a, t_0]$ و $[t_{n-1}, b]$ است. فرض کنید $\lambda = \max(x_i - x_{i-1})$. در این صورت طول تمام زیربازه‌ها کوچکتر از 2λ می‌باشد و وقتی $\lambda \to 0$، مجموع فوق به $\int_a^b f\,dg$ میل می‌کند. پس $S(P,g,f)$ برای هر افراز P از $[a,b]$ دارای حدی است که مقدار آن به صورت $\int_a^b g\,df$ نمایش داده می‌شود پس

$$S(P,g,f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - S'(P_1,f,g)$$

و داریم

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,g,f) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \lim_{\lambda\to 0} S(P_1,f,g)$$

پس

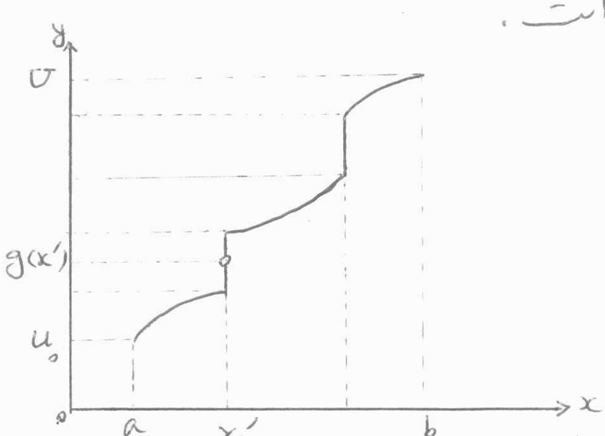
$$\int_a^b g\,df + \int_a^b f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

و حکم تمام است.

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۵.۲ دیده می‌شود که اگر تابع f در بازه $[a,b]$ نسبت به تابع g انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه تابع g نیز در بازه $[a,b]$ نسبت به تابع f انتگرال‌پذیر است. این نکته به ما امکان می‌دهد تا برای وجود انتگرال ریمان - استیلجس، علاوه بر قضیه ۱.۲، نتیجه ۲.۲ و قضیه ۳.۲ حالتهای تازه‌ای نیز با تغییر نقش f و g به یکدیگر به دست آوریم.

۶.۲. تبدیل انتگرال R.S به انتگرال R.: تابع $f(x)$ را در بازه $[a,b]$ پیوسته و تابع $g(x)$ را در $[a,b]$ صعودی یکنوا می‌گیریم. برای ساده‌تر شدن بحث فرض می‌کنیم g بر $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد. در این صورت، همانطور که لبگ ثابت کرده است: انتگرال ریمان - استیلجس $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ را می‌توان با تبدیل $u=g(x)$ مستقیماً به انتگرال ریمان منجر کرد. در شکل زیر نمودار تابع $u=g(x)$ نشان داده شده است. در نقاطی از بازه $[a,b]$ که تابع $g(x)$ در آن نقاط جهش دارد (لزومی ندارد که g پیوسته باشد) نمودار را توسط پاره‌خطهای قائم و با وصل کردن نقاط $(x', g(x'-0))$ و $(x', g(x'+0))$ به یکدیگر تکمیل می‌کنیم. به این ترتیب خط نمودار پیوسته‌ای حاصل می‌شود که برای هر مقدار u بین $u_0 = g(a)$ و $U = g(b)$ یک مقدار معین x بین a و b وجود دارد. واضح است که تابع $x = g^{-1}(u)$ پیوسته و به معنای عام خود صعودی یکنوا است. این تابع را می‌توان به عنوان معکوس تابع $u=g(x)$ بحساب آورد. بخصوص، اگر تنها مقادیری از u ها را در نظر بگیریم که تابع $u=g(x)$ واقعاً به ازای تغییر x از a تا b اختیار می‌کند آنگاه

$x = g^{-1}(u)$ تابع معکوس به معنای عادی خواهد بود. یعنی u را تنها به مقادیری از x نسبت می دهد که به ازای آنها $u = g(x)$ است. ولی از بازه مقادیر u یعنی $[g(x'-0), g(x'+0)]$ که به جهش تابع g مربوط می شود، تنها یک مقدار $u' = g(x')$ دارای مقدار متناظر $x = x'$ است و واضح است که مقادیر دیگر u با مقادیری از x متناظر نیستند. ولی بطور قراردادی آنها را نیز متناظر به $x = x'$ می گیریم. این قرارداد از نظر هندسی همان تکمیل شدن تابع با یک تعداد پاره خطهای قائم است.



اکنون ثابت می کنیم که:

$$(R.S.)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R.)\int_{u_0}^{U} f(g^{-1}(u))\,du$$

چون $g^{-1}(u)$ و تابع مرکب $f(g^{-1}(u))$ پیوسته‌اند، انتگرال سمت راست وجود دارد.

افراز $P=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ که در آن $x_0 = a$ و $x_n = b$ را در نظر می گیریم و مجموع $S(P, f, g)$ را تشکیل می دهیم

$$S(P,f,g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

در اینجا برای سادگی خود نقطه x_i را از فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ انتخاب کرده ایم. اگر قرار دهیم $u_i = g(x_i)$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ داریم

$$u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_i < u_{i+1} < \dots < u_n = U$$

چون $x_i = g^{-1}(u_i)$ ، پس

$$S(P,f,g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(g^{-1}(u_i))\,\Delta u_i$$

که مجموع ریمانی برای انتگرال زیر است:

$$\int_{u_0}^{U} f(g^{-1}(u))\,du$$

اما نمی‌توان مستقیماً با حدگیری رابطهٔ خواسته شده را نتیجه گرفت، زیرا حتی وقتی $\Delta x_i \to 0$ ممکن است Δu_i به سمت صفر میل نکند بعنوان مثال اگر بین x_i و x_{i+1} که بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک اند ممکن است مقدار x بی وجود داشته باشد که در آن g دارای جهش باشد.

به این دلیل بحث را بصورت دیگری تکمیل می‌کنیم. داریم

$$\int_{u_0}^{v} f(g^{-1}(u))du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} f(g^{-1}(u))du$$

و

$$S(P,f,g) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} f(x_i)dv$$

به نحوی که

$$S(P,f,g) - \int_{u_0}^{v} f(g^{-1}(u))du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} [f(x_i) - f(g^{-1}(u))]du$$

حال Δx_i را آن قدر کوچک می‌گیریم تا نوسان تابع $f(x)$ در بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ کمتر از عدد دلخواه مفروض $\varepsilon > 0$ باشد. چون برای $u_i \le u \le u_{i+1}$ داریم $x_i \le g^{-1}(u) \le x_{i+1}$

پس

$$|f(x_i) - f(g^{-1}(u))| < \varepsilon$$

در نتیجه

$$\left|S(P,f,g) - \int_{u_0}^{v} f(g^{-1}(u))du\right| < \varepsilon\,(v - u_0)$$

بنابراین

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(P,f,g) = \int_{u_0}^{v} f(g^{-1}(u))du$$

و حکم ثابت است.

با وجود اهمیت اصولی قضیه و نتیجه گیری فوق، در عمل ابزار راحتی برای محاسبهٔ انتگرال ریمان استیلجس نمی‌باشد. در قضیه بعد نشان می‌دهیم که محاسبات فوق، برای برخی از حالتهای ساده چگونه انجام می‌پذیرد.

۷.۲ قضیه. محاسبهٔ انتگرال R.S.: فرض کنید f در بازهٔ $[a,b]$ به مفهوم ریمانی

انتگرال‌پذیر باشد و g توسط رابطه انتگرالی

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt$$

تعریف شود که در آن $\varphi(t)$ در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر مطلق است. آنگاه

$$(R.S.)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R.)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

<u>اثبات</u>: انتگرال سمت راست با توجه به فرض قضیه وجود دارد و انتگرال ریمان-استیلیس سمت چپ نیز طبق قضیه ۳.۲ موجود است. کافی است نشان دهیم رابطه انتگرالی بیان شده برقرار است. با توجه به قضیه ۳.۲ و اثبات آن، بدون کم شدن از کلیت حکم، می‌توان فرض کرد φ تابعی مثبت است. مجموع ریمان-استیلیس را تشکیل می‌دهیم. فرض کنید $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ افرازی از $[a,b]$ با $x_0=a$ و $x_n=b$ است. قرار می‌دهیم:

$$S(P,f,g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\,[g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t_i)\,\varphi(x)\,dx$$

از طرف دیگر

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

بنابراین

$$S(P,f,g) - \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(t_i)-f(x)]\,\varphi(x)\,dx$$

برای $x_i \le x \le x_{i+1}$ داریم

$$|f(t_i)-f(x)| \le M_i - m_i$$

که در آن $M_i = \sup\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\}$، $m_i = \inf\{f(x) \mid x_i \le x \le x_{i+1}\}$. بنابراین

$$\left|S(P,f,g) - \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\,\Delta g(x_i)$$

حال به ازای $\|P\| \to 0$ داریم $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\,\Delta g(x_i) = 0$ پس

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,g) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

و حکم تمام است.

با توجه به قضیه ۷.۲ و تبصره ۴.۲ ، می توان نتیجه زیر را که در عمل کاربردی مستقیم دارد به دست آورد.

۸.۲ نتیجه: فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان است و فرض کنید تابع g در بازه $[a,b]$ پیوسته بوده و در این فاصله بجز احتمالاً در تعداد متناهی نقطه مشتق پذیر باشد و $g'(x)$ در بازه $[a,b]$ بطور مطلق انتگرال پذیر است. (دقت کنید در نقاطی که مشتق وجود ندارد آن را به دلخواه انتخاب می کنیم) آنگاه

$$(R.S.)\int_a^b f(x)\,dg(x)=(R.)\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

اثبات. با توجه به قضیه ۷.۲ و دقت به اینکه دستور فوق درست است نتیجه ای صوری از انتگرال سمت چپ است که واضح می باشد. اگر نماد $dg(x)$ را به معنای دیفرانسیل بگیریم، می توان بجای آن از $g'(x)\,dx$ استفاده کرد.

۹.۲ توضیح: تابع ناپیوسته I تعریف شده توسط

$$I(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. تابع فوق دارای ناپیوستگی اساسی در نقطه $x=0$ است و از سمت چپ پیوسته می باشد. مقدار پرش تابع در $x=0$ برابر $I(+0)-I(0)=1$ است. تابع I در سمت چپ نقطه $x=0$ و در سایر نقاط پیوسته است. حال تابع $I(x-c)$ ناپیوستگی فوق را در نقطه $x=c$ دارا است اما در تابع $I(c-x)$ ناپیوستگی در سمت چپ نقطه $x=c$ است و مقدار جهش برابر -1 است.

حال فرض کنید تابع f در $x=c$ پیوسته است. با این فرض انتگرال

$$(R.S.)\int_a^b f(x)\,dI(x-c)$$

را محاسبه می کنیم که در آن $a\le c<b$. (به ازای $c=b$ مقدار انتگرال برابر صفر می شود).
مجموع ریمان-استیلجس را تشکیل می دهیم:

$$S(P,f,I)=\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\,\Delta I(x_i-c)$$

فرض کنید نقطه c در بازه kام بیافتد بطوری که $x_k \le c < x_{k+1}$. در این صورت

$$\Delta I(x_k-c)=1$$

و برای $i\neq k$

$$\Delta I(x_i-c)=0$$

در نتیجه

$$S(P,f,I)=f(t_k)$$

حال وقتی $\|P\|\to 0$ با توجه به پیوستگی تابع f ، $f(t_k)\to f(c)$. بنابراین به ازای $a\le c<b$ داریم

$$(R.S)\int_a^b f(x)\,dI(x-c)=\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,I)=f(c)$$

بطریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت که به ازای $a<c\le b$

$$(R.S.)\int_a^b f(x)\,dI(c-x)=-f(c)$$

انتگرال فوق به ازای $c=a$ صفر است.

حال می‌خواهیم نتیجه ۸.۲ را در حالتی کلی‌تر یعنی بدون شرط پیوستگی تابع g ثابت کنیم.

<u>۱۵.۲ قضیه:</u> فرض کنید f تابعی پیوسته در بازه $[a,b]$ و g در همه جا بجز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه در بازه $[a,b]$ دارای مشتق است. بعلاوه فرض کنید g' در $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. اگر تابع g در تعداد متناهی نقطه

$$c_0=a<c_1<\dots<c_k<\dots<c_m=b$$

ناپیوستگی غیراساسی (نوع اول) داشته باشد. آنگاه انتگرال ریمان استیلجس f نسبت به g وجود دارد و توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$(R.S.)\int_a^b f(x)\,dg(x)=(R.)\int_a^b f(x)g'(x)\,dx+f(a)[g(a+0)-g(a)]$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]$$
$$+f(b)[g(b)-g(b-0)]$$

اثبات. برای سادگی در اثبات، جهش‌های تابع g را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

جهش از راست $\alpha_k^+ = g(c_k+0) - g(c_k)$ $\quad k=0,1,2,\dots,m-1$

جهش از چپ $\alpha_k^- = g(c_k) - g(c_k-0)$ $\quad k=1,2,\dots,m$

برای $1\le k\le m-1$ داریم

$$\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k+0) - g(c_k-0)$$

تابع g_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+ I(x-c_k) - \sum \alpha_k^- I(c_k-x)$$

در واقع تابع g_1 همهٔ ناپیوستگی‌های تابع g را در خود جمع کرده است به نحوی که تفاضل

$$g_2(x) = g(x) - g_1(x)$$

پیوسته است. تابع g_2 به ازای مقادیری از x که مخالف c_kها باشد پیوسته است، زیرا هر دو تابع g و g_1 در این گونه مقادیر پیوسته‌اند. حال نشان می‌دهیم تابع g_2 در نقطهٔ c_k برای $0<k<m$ پیوسته است و در c_m پیوسته چپ و در c_0 پیوسته راست است.

فرض کنید $x=c_k$ که $k<m$، در این صورت تمام جمله‌های مجموع $g_1(x)$ به جز جملهٔ $\alpha_k^+ I(x-c_k)$ به ازای $x=c_k$ از سمت راست پیوسته‌اند. بنابراین کافی است رفتار عبارت $g(x)-\alpha_k^+ I(x-c_k)$ را مطالعه کنیم. این عبارت به ازای $x=c_k$ برابر $g(c_k)$ است و وقتی $x\to c_k+0$ داریم

$$\lim_{x\to c_k+0}[g(x)-\alpha_k^+ I(x-c_k)] = g(c_k+0)-\alpha_k^+ = g(c_k)$$

پس g_2 در $x=c_k$ برای $0\le k<m$ پیوسته راست است. به طور مشابه g_2 در $x=c_k$ برای $0<k\le m$ پیوسته چپ است. در نتیجه g_2 در $c_{m-1},\dots,c_1$ پیوسته و در c_m پیوسته چپ و در c_0 پیوسته راست می‌باشد.

حال اگر x نقطه‌ای غیر از همهٔ c_kها باشد که در آن تابع g دارای مشتق است، آنگاه در نزدیکی این نقطه g_1 مقداری ثابت است و در نتیجه g_2 نیز در این نقطه مشتق‌پذیر می‌باشد و داریم

$$g_2'(x) = g'(x)$$

حال برای تابع پیوستهٔ g_2 طبق قضیهٔ ۸.۲ انتگرال ریمان-استیلتیس وجود دارد:

$$(R.S.)\int_a^b f\, dg_2 = (R.)\int_a^b f(x)\, g_2'(x)\, dx = (R.)\int_a^b f(x) g'(x) dx$$

و با توجه به توضیح ۹.۲

$$(R.S.)\int_a^b f(x)\, dg_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \cdot (R.S.)\int_a^b f(x)\, dI(x-c_k)$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- \cdot (R.S.)\int_a^b f(x)\, dI(c_k - x)$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ f(c_k) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- f(c_k)$$
$$= f(a)\,[g(a+0) - g(a)]$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)]$$
$$+ f(b)\,[g(b) - g(b-0)]$$

حال اگر دو انتگرال فوق را با هم جمع کنیم، به رابطه خواسته شده می‌رسیم که وجود انتگرال ریمان - استیلجس f را نسبت به $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ نیز ثابت می‌کند.

۳. مثالها

۱.۳. انتگرالهای زیر را با توجه به رابطه بیان شده در قضیه ۷.۲ محاسبه کنید.

الف) $(R.S.)\int_0^2 x^2\, d\ln(1+x)$ ب) $(R.S.)\int_0^{\pi/2} x\, d\sin x$

ج) $(R.S.)\int_{-1}^1 x\, d\tan^{-1} x$

حل: الف)

$$(R.S.)\int_0^2 x^2\, d\ln(1+x) = (R.)\int_0^2 \frac{x^2}{1+x}\, dx$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right)\Big|_0^2$$
$$= \ln 3$$

ب)
$$(R.S.)\int_0^{\pi} x\, d\sin x = (R.)\int_0^{\pi} x\cos x\, dx$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

ج)
$$(R.S.)\int_{-1}^1 x\, d\tan^{-1} x = (R.)\int_{-1}^1 x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-1}^1$$
$$= 0$$

۲.۴. انتگرال‌های زیر را با توجه به قضیه ۱۰.۲ محاسبه کنید.

الف) $(R.S.)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)$ که در آن

$$g(x)=\begin{cases} 0 & x=-1 \\ 1 & -1<x<2 \\ -1 & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

ب) $(R.S.)\int_{0}^{2} x^2\,dg(x)$ که در آن

$$g(x)=\begin{cases} -1 & 0\le x<1/2 \\ 0 & 1/2\le x<3/2 \\ 2 & x=\frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2}<x\le 2 \end{cases}$$

حل: الف) تابع $g(x)$ در نقطه $x=-1$ دارای جهش ۱ و در نقطه $x=2$ دارای جهش -2 است و در بقیه نقطه‌ها داریم $g'(x)=0$. پس

$$(R.S.)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)=(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)=-5$$

ب) تابع $g(x)$ در نقطه $x=1/2$ دارای جهش ۱ و در نقطه $x=\frac{3}{2}$ دارای جهش -2 است (مقدار تابع g در نقطه $x=\frac{3}{2}$ تأثیری در نتیجه ندارد) و در سایر نقطه‌ها داریم $g'(x)=0$
پس

$$(R.S.)\int_{0}^{2} x^2\,dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2)=-\frac{17}{4}$$

۳.۴. انتگرال‌های زیر را با توجه به قضیه ۱۰.۲ محاسبه کنید.

الف) $\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dg(x)$ ب) $\int_{-2}^{2}x^2\,dg(x)$ ج) $\int_{-2}^{2}x\,dg(x)$

که در آن

$$g(x)=\begin{cases} x+2 & -2\le x\le -1 \\ 2 & -1<x<0 \\ x^2+3 & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

حل: تابع $g(x)$ در نقطه‌های $x=-1$ و $x=0$ دارای جهش ۱ می‌باشد و داریم

$$g'(x)=\begin{cases} 1 & -2\le x\le -1 \\ 0 & -1< x< 0 \\ 2x & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

بنابراین

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dg(x)=\frac{301}{20}$$

$$\int_{-2}^{2}x^2\,dg(x)=\frac{34}{3}$$

$$\int_{-2}^{2}x\,dg(x)=\int_{-2}^{-1}x\,dx+2\int_{0}^{2}x^2\,dx+(-1).1+(0)(1)=\frac{17}{6}$$

۴.۲. در طول پاره خط $[a,b]$ از محور xها، جرمهایی قرار دارند که یا در چند نقطه جداگانه متمرکز شده‌اند و یا در طول پاره خط، بطور پیوسته توزیع شده‌اند. بدون آنکه بین این دو حالت فرقی قائل شویم، برای $x>a$ مجموع همهٔ جرمهایی را که در بازهٔ $[a,x]$ واقع‌اند با $\Phi(x)$ نشان می‌دهیم. علاوه بر آن فرض کنید $\Phi(a)=0$. واضح است که $\Phi(x)$ تابعی صعودی و یکنوا است. گشتاور ایستایی (همان استاتیک) و گشتاور لختی (همان اینرسی) این جرمها را نسبت به مبداء مختصات بدست آورید.

حل: ابتدا گشتاور ایستایی را تعیین می‌کنیم. بازهٔ $[a,b]$ را با نقاط

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

تقسیم می‌کنیم. واضح است که روی پاره خط $[x_i,x_{i+1}]$ به ازای $i>0$، جرم

$$\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)=\Delta\Phi(x_i)$$

واقع است. در بازهٔ $[a,x_1]$ جرم $\Phi(x_1)-\Phi(x_0)=\Delta\Phi(x_0)$ قرار دارد. اگر در تمام حالتها جرم را مثلاً متمرکز در انتهای راست بازه محسوب کنیم، برای گشتاور ایستایی مطلوب، عبارت تقریبی

$$M\simeq\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+1}\,\Delta\Phi(x_i)$$

بدست می‌آید. اگر Δx_iها را به سمت صفر میل دهیم، به نتیجهٔ دقیق زیر می‌رسیم:

$$M=(R.S.)\int_a^b x\,d\Phi(x) \qquad (1)$$

به همین ترتیب، گشتاور لختی همان جرمها نسبت به مبداء عبارت است از:

$$I=(R.S.)\int_a^b x^2\, d\Phi(x). \qquad (2)$$

درواقع انتگرال ریمان - استیلجس به ما امکان می‌دهد تا جرمهای مختلف تقسیم را، توزیع پیوسته ویا جرمهای متمرکز، با یک دستور انتگرالی بیان کنیم.

فرض کنید جرمهایی که بطور پیوسته توزیع شده اند، دارای چگالی خطی $\rho(x)$ باشند. علاوه بر آن، فرض کنید جرمهای m_1، m_2، ...، m_k درنقاط c_1، c_2، ...، c_k متمرکز شده اند. حال اگر این نقاط را استثنا کنیم، مشتق تابع $\Phi(x)$ عبارت است از

$$\Phi'(x)=\rho(x)$$

همچنین در هر نقطه $x=c_j$ برای $j=1,2,\dots,k$ تابع دارای جهشی برابر با جرم m_j در این نقطه است. حال اگر انتگرال (1) را با توجه به دستور قضیه 10.2 بسط دهیم، داریم

$$M=(R.S.)\int_a^b x\, d\Phi(x)=(R.)\int_a^b x\rho(x)\,dx+\sum_{j=1}^{k} c_j m_j.$$

درسمت راست جمله اول گشتاور استاتیکی جرمهایی است که بطور پیوسته توزیع شده اند وجمله دوم گشتاور استاتیکی جرمهایی است که متمرکز هستند. برای انتگرال (2) نیز نتیجه مشابهی می‌توان به دست آورد.

5.4. برای مثال 4.4 حالتهای زیر را بررسی کنید.

الف) عبارت $\Phi(x)$ را تشکیل دهید ونمودار آن را برای حالت زیر رسم کنید: در نقاط $x=1,2,3$ جرمهایی با مقدار واحد و در بازه $[1,3]$ جرمهایی با چگالی 2 بطور پیوسته توزیع شده باشد.

ب) جرم به مقدار 2 برای $x=2,4$، و جرمهای با توزیع پیوسته با چگالی $2x$ در بازه $[0,5]$ توزیع شده اند.

ج) توزیع جرم را شرح دهید، به شرطی که $\Phi(x)$ برابر با تابع $g(x)$ در مثال 3.4 باشد.

حل. الف) در بازه $[1,3]$ داریم:

$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & x=1\\ 2x-1 & 1<x<2\\ 2x & 2\le x<3\\ 7 & x=3\end{cases}$$

ب)

$$\Phi(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<2\\ x^2+2 & 2\le x<4\\ x^2+4 & 4\le x\le 5\end{cases}$$

ج) در نقاط $x=-1$ و $x=0$ جرم‌هایی به مقدار واحد واقع اند و در بازه‌ی $[-2,-1]$ جرم با چگالی واحد و در بازه‌ی $[0,2]$ جرم با چگالی $2x$ توزیع شده است.

۹.۳. فرض کنید بر میله‌ای که بر دو نقطه تکیه دارد بجز باری که بطور پیوسته توزیع شده است، نیروهای متمرکزی هم عمل کند. (شکل زیر) محور طول را در امتداد محور میله و محور y را عمود بر آن و بطرف پایین می‌گیریم. بدون آنکه بین نیروهای عمل کننده فرق بگذاریم، مجموع همه‌ی نیروهای عمل کننده بر میله را در بازه‌ی $[0,x]$ برای $x>0$ به اضافه‌ی واکنش نقطه‌های اتکا، با $F(x)$ نمایش می‌دهیم و فرض کنید $F(0)=0$. نیروی $F(x)$ را نیروی برش در مقطع x میله نامند. نیرویی را که به طرف پایین باشد مثبت و، اگر به طرف بالا باشد، منفی می‌گیریم. گشتاور خمشی M در مقطع دلخواه $x=c$ را پیدا کنید.

حل. برای این منظور گشتاورهای همه‌ی نیروهایی را که در سمت راست (یا چپ) میله نسبت به این مقطع عمل می‌کنند را باید در نظر گرفت. وقتی صحبت از سمت راست میله است، زمانی گشتاور را مثبت می‌گیریم که این قسمت از میله در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند (برای بخش سمت چپ، قاعده برعکس است).

چون بر جزء $[x, x+dx)$ ، مثلاً در سمت راست میله، نیروی

$$F(x+dx) - F(x) = dF(x)$$

عمل می‌کند، گشتاور جزئی عبارت است از

$$dM = (x-c)\, dF(x)$$

پس

$$M = M(c) = (R.S.)\int_c^{\ell} (x-c)\, dF(x)$$

به همین ترتیب، با آغاز از سمت چپ میله (با به حساب آوردن تغییر جهت مثبت برای محاسبه گشتاور) داریم

$$M(c) = (R.S.)\int_0^{c} (c-x)\, dF(x) \qquad (۳)$$

مستقیماً دیده می‌شود که هر دو عبارت گشتاور خمشی در واقع یکی هستند. تساوی آنها با شرط

$$\int_0^{\ell} x\, dF(x) - cF(\ell) = 0$$

هم ارز است که این نیز نتیجه‌ای از شرط تعادل

$$F(\ell) = 0 \quad , \quad \int_0^{\ell} x\, dF(x) = 0$$

است، که در آنها، اولی به معنای صفر بودن مجموع همهٔ نیروها است و دومی بیان می‌کند که مجموع گشتاورهای (نسبت به مبداء) نیروهای موثر بر میله، برابر صفر است.

اگر شدت باری را که بطور ناپیوسته توزیع شده است با $q(x)$ نشان دهیم، آنگاه با حذف نقطه‌هایی که در آنها نیروهای متمرکز عمل می‌کنند، داریم:

$$\frac{dF(x)}{dx} = q(x)$$

فرض کنید، نیروهای متمرکز F_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ در نقاط $x = x_j$ عمل کنند، آنگاه واضح است که نیروی برشی، در این نقاط، دارای جهشی برابر F_j است. بنابراین اگر دستور قضیه ۱۵.۲ را در انتگرال (۳) بکار بریم، داریم

$$M(c) = \int_0^{c} (c-x)\, q(x)\, dx + \sum_{x_j < c} (c - x_j)\, F_j$$

دو جمله سمت راست، به ترتیب عبارتند از گشتاورهای جداگانه‌ای که توسط بار پیوسته

و نیروهای متمرکز به وجود آمده است. انتگرال ریمان - استیلتیس آنها را در یک انتگرال جمع کرده است.

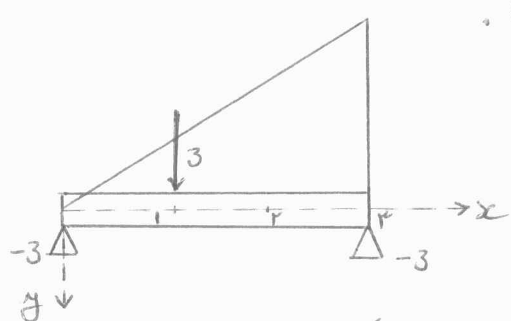
در رابطه (۳) با انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء، داریم

$$M(c)=\int_0^c (c-x)\,dF(x)$$
$$=(c-x)F(x)\Big|_0^c-\int_0^c F(x)\,d(c-x)$$
$$=\int_0^c F(x)\,dx$$

پس در همه جا بجز نقاط اثر نیروهای متمرکز، داریم

$$\frac{dM}{dc}=F(c)$$

۷.۳. میله‌ای به طول $l=3$، بار مثلثی با شدت $\frac{2}{3}x$ را تحمل می‌کند. علاوه بر آن فرض کنید نیرویی متمرکز برابر 3 در نقطه $x=1$ بر آن اثر کند. واکنش هر دو تکیه‌گاه را برابر 3- در نظر بگیرید (از قانون اهرم پیروی می‌کنند) مطلوب است تعیین نیروی برشی $F(x)$ و گشتاور خمشی $M(c)$.



حل:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{3}x^2-3 & 0<x<1 \\ \frac{1}{3}x^2 & 1\le x<3 \\ 0 & x=3 \end{cases}$$

$$M(c)=\begin{cases} \frac{1}{9}c^3-3c & 0\le c\le 1 \\ \frac{1}{9}c^3-3 & 1<c\le 3 \end{cases}$$

۸.۲. دستور قضیه ۲.۱۵ برای محاسبه انتگرال‌های معمولی (به مفهوم ریمانی آن)
نیز مفید است. $\varphi(x)$ را تابعی قطعه قطعه چندجمله‌ای در بازه $[a,b]$ می‌گیریم، یعنی نقاط

$$a=c_0<c_1<\dots<c_k=b$$

در $[a,b]$ وجود دارند بطوری که تابع $\varphi(x)$ بر هر زیربازه به صورت یک چندجمله‌ای است
که درجه آن از n تجاوز نمی‌کند.

$$\varphi(x)=P_{m_i}(x) \qquad x\in[x_{i-1},x_i]$$

که در آن $P_{m_i}(x)$ چندجمله‌ای است با $m_i=\deg P_{m_i}\le n$. مقدار جهش مشتق iام
تابع، $\varphi^{(i)}(x)$، در نقطه jام $x=c_j$ را با $\delta_j^{(i)}$ نمایش می‌دهیم که در آن

$$i=0,1,\dots,n\ ,\qquad j=0,1,\dots,k$$

حال تابع پیوسته دلخواه $f(x)$ را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$F_1(x)=\int f(x)\,dx$$

$$F_m(x)=\int F_{m-1}(x)\,dx \qquad m>1$$

آنگاه

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=-\sum_{j=0}^{k}F_1(c_j)\,\delta_j^{(0)}+\sum_{j=0}^{k}F_2(c_j)\,\delta_j^{(1)}-\dots+(-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}F_{k+1}(c_j)\,\delta_j^{(k)}$$

درواقع داریم

$$(R.)\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=(R.S.)\int_a^b\varphi(x)\,dF_1(x)$$

$$=\varphi(x)F_1(x)\Big|_a^b-(R.S.)\int_a^b F_1(x)\,d\varphi(x)$$

جمله اول حذف می‌شود و برای جمله دوم، داریم

$$(R.S.)\int_a^b F_1(x)\,d\varphi(x)=\sum_{j=0}^{k}F_1(c_j)\,\delta_j^{(0)}+\int_a^b F_1(x)\varphi'(x)\,dx$$

به همین ترتیب

$$\int_a^b F_1(x)\varphi'(x)\,dx=-\sum_{j=0}^{k}F_2(c_j)\,\delta_j^{(1)}-\int_a^b F_2(x)\varphi''(x)\,dx$$

و الی آخر.

۹.۲. به کمک قضیه ۷.۲، تعمیم مفیدی از دستور انتگرال‌گیری جزء به جزء را درمورد

انتگرال‌های معمولی، به دست می‌آوریم. اگر $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع انتگرال‌پذیر مطلق در بازهٔ $[a,b]$ باشند و $U(x)$ و $V(x)$ توسط دستورهای انتگرالی زیر معین شوند:

$$U(x)=U(a)+\int_a^x u(t)\,dt \qquad a\le x\le b$$

$$V(x)=V(a)+\int_a^x v(t)\,dt \qquad a\le x\le b$$

آنگاه

$$\int_a^b U(x)\,v(x)\,dx=U(x)V(x)\Big|_a^b-\int_a^b V(x)\,u(x)\,dx \qquad (۴)$$

حل. با توجه به قضیه ۷.۲، انتگرال سمت چپ را با انتگرال ریمان ـ استیلجس عوض می‌کنیم و جزء به جزء انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b U(x)v(x)dx=\int_a^b U(x)\,dV(x)$$

$$=U(x)V(x)\Big|_a^b-\int_a^b V(x)\,dU(x)$$

حال اگر برای انتگرال آخر در سمت راست یکبار دیگر قضیه ۷.۲ را بکار ببریم حکم ثابت می‌شود. باید دقت کرد که در این مثال توابع $u(x)$ و $v(x)$ در نقش مشتق‌های $U(x)$ و $V(x)$ ظاهر شده‌اند، بدون آنکه، در واقع چنین باشد. در حالتی که توابع $U(x)$ و $V(x)$ پیوسته باشند، مسئله منجر به دستور معمولی انتگرال جزء به جزء می‌شود، زیرا در آن حالت داریم:

$$U'(x)=u(x)\ ,\quad V'(x)=v(x)$$

۴. قضایای مقدار میانگین و برآوردها

۱.۴. تعبیر هندسی انتگرال ریمان ـ استیلجس: انتگرال

$$(R.S.)\int_a^b f(t)\,dg(t) \qquad (۱)$$

را با فرض مثبت و پیوسته بودن $f(t)$ و صعودی کیلفرا (به معنای اکید) بودن $g(t)$ در نظر بگیرید. تابع $g(t)$ می‌تواند دارای ناپیوستگی (جهش) هم باشد. دستگاه معادلات پارامتری

$$x=g(t)\ ,\quad y=f(t) \qquad (۲)$$

معرف یک منحنی است که در حالت کلی ناپیوسته است. اگر به ازای $t=t_0$ تابع $g(t)$ با یک جهش همراه باشد بطوری که $g(t_0-0)<g(t_0+0)$، آنگاه یک مقدار حدی برای $y=f(t)$ برابر با $f(t_0)$ است، که متناظر با این مقادیر حدی، $x=g(t)$ می باشد. منحنی را با پاره خطهای افقی که زوج نقاط $(g(t_0-0), f(t_0))$ و $(g(t_0+0), f(t_0))$ را به هم وصل می کنند و متناظر با جهش های تابع $g(x)$ هستند، تکمیل می کنیم (شکل زیر را ببینید). به این ترتیب منحنی پیوسته L تشکیل می شود. انتگرال (۱) معرف مساحت شکل محصور به این منحنی، محور xها و دو خط کناری نظیر $g(a)$ و $g(b)$ است. زیرا اگر افراز

$$a=t_0<t_1<\dots<t_{i-1}<t_i<t_n=b$$

را در نظر بگیریم. بازه $[g(a),g(b)]$ توسط نقاط

$$g(a)<g(t_1)<\dots<g(t_{i-1})<g(t_i)<\dots<g(b)$$

تقسیم می گردد. حال اگر

$$M_i=\sup\{f(t)\mid t_{i-1}\le t\le t_i\}\ ,\quad m_i=\inf\{f(t)\mid t_{i-1}\le t\le t_i\}$$

آنگاه قرار می دهیم

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta g(t_i)\ ,\quad S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta g(t_i)$$

s و S برابر با مساحتهای مستطیلهای محاطی و محیطی است و منحنی بنحوی بین آنها قرار دارد. وقتی $\Delta t_i\to 0$ هر دو مجموع s و S به سمت حد مشترک (۱) میل می کنند و مساحت توسط انتگرال (۱) بدست می آید.

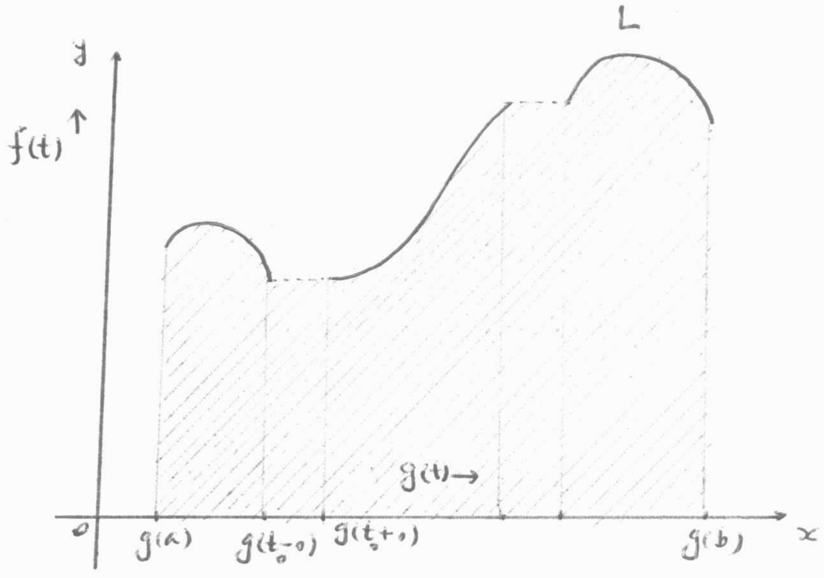
۲.۴ قضیه. فرض کنید f در بازه $[a,b]$ کراندار است

$$m\le f(x)\le M$$

و تابع $g(x)$ صعودی یکنوا باشد. اگر انتگرال ریمان استیلیس I از $f(x)$ نسبت به g بر $[a,b]$ وجود داشته باشد، آنگاه برای عددی مانند μ در $[m,M]$

$$I=(R.S.)\int_a^b f(x)\,dg(x)=\mu\,[g(b)-g(a)]$$

اثبات. برای افراز دلخواه $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از $[a,b]$ داریم



L
y
f(t)
g(t)
0
g(a)
g(t_0 - 0)
g(t_0 + 0)
g(b)
x

$$m[g(b)-g(a)] \le S(P,f,g) \le M[g(b)-g(a)]$$

با محاسبه حد وقتی $\|P\| \to 0$ داریم

$$m[g(b)-g(a)] \le I \le M[g(b)-g(a)]$$

اگر $g(a)=g(b)$ دو طرف رابطه مورد نظر صفر است. فرض کنید $g(a) \ne g(b)$، آنگاه

$$m \le \frac{I}{g(b)-g(a)} \le M$$

قرار می‌دهیم $\mu = \frac{I}{g(b)-g(a)}$ پس

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = I = \mu[g(b)-g(a)]$$

اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه طبق قضیه مقدار میانی

$$\exists c \in [a,b] \quad , \quad f(c)=\mu$$

و در این حالت قضیه ۲.۴ به صورت

$$(R.S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(c)[g(b)-g(a)] \qquad (۳)$$

<u>۳.۴ قضیه</u>. فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و تابع g با تغییر کراندار روی $[a,b]$ باشد. آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \le MV$$

که در آن $V=V(g;a,b)$ و $M=\max_{a\le x\le b} f(x)$.

<u>اثبات</u>: برای افراز دلخواه $P=(x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$|S(P,f,g)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g(x_i)\right|$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} |f(t_i)|\,|\Delta g(x_i)|$$
$$\le M\sum_{i=1}^{n} |g(x_i)-g(x_{i-1})|$$
$$\le MV$$

حال وقتی $\|P\| \to 0$ داریم

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,g) \le MV$$

۴.۴ قضیه: با همان فرضیات قضیهٔ ۳.۴، برای $\epsilon > 0$ داده شده و افراز P از بازه $[a,b]$ داریم:

$$|S(P,f,g)-I| \le \epsilon V$$

که در آن $V=V(g;a,b)$.

اثبات. داریم

$$S(P,f,g)=\sum_{i=0}^{n} f(t_i)\,\Delta g(x_i) = \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t_i)\,dg(x_i)$$

و

$$I=\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dg(x)$$

با کم این روابط از یکدیگر داریم

$$S(P,f,g)-I=\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t_i)-f(x)]\,dg(x)$$

حال برای هر x در $[x_{i-1},x_i]$

$$|f(t_i)-f(x)| \le M_i - m_i = \omega_i$$

با توجه به برآورد در قضیه ۳.۴، برای هر کدام از انتگرال‌های $\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cdots$ داریم

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t_i)-f(x)]\,dg(x)\right| \le \omega_i\, V(g,x_{i-1},x_i)$$

حال اگر بازه $[a,b]$ را چنان به زیربازه‌ها تقسیم کنیم که $\omega_i < \epsilon$، پس، آنگاه

$$|S(P,f,g)-I| \le \epsilon V$$

۵. مثال‌ها و نکات

۱.۵. اگر تابع g به معنای اکید صعودی یکنوا باشد، می‌توان در رابطهٔ (۲) از قضیهٔ ۲.۴ وجود c را دقیق‌تر کرد یعنی $a<c<b$ در نظر گرفت.

حل. اگر حداقل و حداکثر مقدار تابع f بر $[a,b]$ به ترتیب m و M نامیم $m<M$ آنگاه $[\alpha,\beta]$ را چنان می‌یابیم که سرزهای $f(x)$ در آن برابر $m<m'$ و $M'<M$

۳۰

باشند بطوری که

$$\begin{aligned} m[g(\beta)-g(\alpha)] &< m'[g(\beta)-g(\alpha)] \\ &\le (R.S.)\int_\alpha^\beta \cdots \\ &\le M'[g(\beta)-g(\alpha)] \\ &< M[g(\beta)-g(\alpha)] \end{aligned}$$

اگر نامعادلات در قضیه ۲.۴ را برای بازه های $[a,\alpha]$ و $[\beta,b]$ بنویسیم و متناظراً جمع کنیم به نامعادلهٔ دقیق‌تر زیر می‌رسیم:

$$m[g(b)-g(a)] < I < M[g(b)-g(a)]$$

در نتیجه $\mu = \dfrac{I}{g(b)-g(a)}$ دقیقاً بین m و M (نه برابر با یکی از آنها) قرار می‌گیرد
بنابراین می‌توان c را چنان یافت که $\mu = f(c)$ و $a<c<b$ (نه برابر با یکی از آنها)
باشد.

__۲.۵.__ با توجه به قضیه‌های ۲.۷ و ۲.۵ و ۲.۴، می‌توان قضیهٔ دوم میانگین را برای انتگرالهای معمولی به سادگی ثابت کرد.

__قضیه:__ فرض کنید f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر (به معنای ریمانی) و g تابعی بطور یکنوا صعودی بر $[a,b]$ باشند. آنگاه عددی مانند c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx$$

__اثبات.__ تابع

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad a \le x \le b$$

را که تابعی پیوسته بر $[a,b]$ است در نظر بگیرید. آنگاه

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b g(x)\,dF(x) \\ &= g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\,dg(x) \\ &= g(b)F(b) - F(c)[g(b)-g(a)] \\ &= g(a)F(c) + g(b)[F(b)-F(c)] \end{aligned}$$

$$= g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx \quad a<c<b$$

و حکم تمام است.

در حالتی که $g(x)$ صعودی اکیداً به معنای اکید باشد، می‌توان از ۱.۵ نتیجه گرفت که $a<c<b$.

۳.۵ نشان دهید اگر در نقطه $x=c$ یکی از توابع f و g پیوسته و دیگری در همسایگی این نقطه کراندار باشد، آنگاه وجود انتگرال‌های $R.S.\int_a^c f\,dg$ و $R.S.\int_c^b f\,dg$ وجود انتگرال $(R.S.)\int_a^b f\,dg$ را نتیجه می‌دهد.

حل. فرض کنید P_1 و P_2 افرازهایی دلخواه از فواصل $[a,c]$ و $[c,b]$ به ترتیب باشند و $P_1\cup P_2 = P$. آنگاه $S(P,f,g)$ از مجموع $S(P_1,f,g)$ و $S(P_2,f,g)$ تشکیل شده است. در این حالت c در ترکیب نقاط افراز قرار دارد. به ازای $\|P\|\to 0$، مجموع $S(P,f,g)$ به مجموع انتگرال‌های $\int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$ میل می‌کند. حال اگر افرازی از فاصله $[a,b]$ در نظر بگیریم و c نقطه‌ای از نقاط افراز فوق نباشد آنگاه c را به نقطه‌های تقسیم اضافه می‌کنیم و بجای $S(P,f,g)$ به $S(P',f,g)$ می‌رسیم که می‌دانیم به ازای $\|P\|\to 0$ دارای حد مشخصی است. بنابراین کافی است ثابت کنیم تفاضل $\bar{\sigma}-\sigma$ همراه با λ به سمت صفر میل می‌کند که در آن $\sigma = S(P,f,g)$ و $\bar{\sigma} = S(P',f,g)$ است.

فرض کنید c در بازه $[x_{k-1}, x_k]$ بیافتد. در این صورت اختلاف $\bar{\sigma}$ با مجموع σ در این است که به جای جمله

$$f(t_k)\,[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

در آن دو جمله زیر وجود دارد:

$$f(t_k')[g(c)-g(x_{k-1})] + f(t_k'')[g(x_k)-g(c)]$$

که در آن t_k' و t_k'' با شرط‌های $x_{k-1}\le t_k'\le c$ و $c\le t_k''\le x_k$ انتخاب شده‌اند. برای سادگی کار فرض کنید $t_k'=t_k''=c$. آنگاه عبارت فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$f(c)\,[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

درنتیجه

$$\sigma-\bar{\sigma}=[f(t_k)-f(c)][g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

وقتی $\|P\|\to 0$ ، یکی از عاملهای سمت راست ، بینهایت کوچک می شود و چون عامل دوم کراندار است ، درنتیجه $\sigma-\bar{\sigma}\to 0$ و این همان چیزی است که می خواستیم .

۴.۵ـ اگر هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در یک نقطه $x=c$ $(a\le c\le b)$ ناپیوسته باشند آنگاه انتگرال ریمان ـ استیلیجس $(R.S.)\int_a^b f(x)\,dg(x)$ وجود ندارد.

حل . تمرین

۵.۵ فرض کنید f تابعی پیوسته در بازه‌ی $[a,b]$ و g تابعی با تغییر کراندار بر $[a,b]$ است. نشان دهید تابع $h(x) = \int_a^x f(t)\,dg(t)$ در نقطه‌ی x_0 که در آن g پیوسته است، پیوسته می‌باشد.

حل: پیوستگی تابع h از نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$|h(x_0+\Delta x)-h(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\,dg\right| \leq \max_{a\leq x\leq b} f(x) \cdot V(g, x_0+\Delta x, x_0)$$

مشروط به اینکه در نقطه‌ی x_0، تغییر $V(g, x, a)$ پیوسته باشد.

۶.۵ فرض کنید $\mathcal{C}([a,b])$ کلاس توابع پیوسته در بازه‌ی $[a,b]$ و BV کلاس توابع با تغییر کراندار در این بازه باشد. نشان دهید: اگر $(R.S.)\int_a^b f\,dg$ برای تابع مفروض f نسبت به تابع دلخواه g از BV وجود داشته باشد آنگاه $f \in \mathcal{C}([a,b])$ و اگر این انتگرال نسبت به تابع مفروض g برای f از $\mathcal{C}([a,b])$ وجود داشته باشد آنگاه $g \in BV([a,b])$.