۶. انتگرال گیری صعودی

۱.۶ تعاریف. فرض کنید تابع $g(x)=\alpha(x)$ بر $[a,b]$ بطور یکنوا غیر نزولی (صعودی) است. چون $\alpha(a)$ و $\alpha(b)$ متناهی هستند، بنابراین α روی $[a,b]$ کراندار است. برای افراز $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از $[a,b]$ که در آن $a=x_0$، $b=x_n$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

چون α صعودی است بنابراین $\Delta\alpha_i \geq 0$. حال اگر f تابعی کراندار روی $[a,b]$ باشد تعریف می‌کنیم

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i$$
$$L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i$$

که در آن

$$M_i = \sup\{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$$
$$m_i = \inf\{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$$

توجه کنید که در این حالت از کراندار بودن f بر $[a,b]$ نتیجه می‌شود که در هر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ مقادیر M_i و m_i محدودند. $U(P,f,\alpha)$ و $L(P,f,\alpha)$ به ترتیب مجموعهای بالایی و پایینی استیلجس تابع f نسبت به α روی افراز P نامیده می‌شوند.

همواره

$$L(P,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$$

و با توجه به اینکه برای هر t_k در $[x_{k-1}, x_k]$

$$m_k \leq f(t_k) \leq M_k$$

نتیجه می‌شود

$$L(P,f,\alpha) \leq S(P,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$$

اگر $M = \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$ و $m = \inf_{a\leq x\leq b} f(x)$ آنگاه

$$m(\alpha(b)-\alpha(a)) \leq L(P,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) \leq M(\alpha(b)-\alpha(a))$$

بنابراین مجموعهای بالایی و پایینی R.S. تابع f نسبت به α روی هر افراز P کراندارند و این مطلب

باعث می‌شود که بتوانیم انتگرال‌های بالایی و پایینی f نسبت به α بر $[a,b]$ را تعریف کنیم.

انتگرال بالایی f نسبت به α عبارت است از

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf\{U(P,f,\alpha) \mid P\in \mathcal{P}[a,b]\} = \overline{I}(f,\alpha)$$

و انتگرال پایینی f نسبت به α به صورت

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup\{L(P,f,\alpha) \mid P\in \mathcal{P}[a,b]\} = \underline{I}(f,\alpha)$$

تعریف می‌شود.

گوییم تابع کراندار f نسبت به تابع صعودی α بر فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان-استیلجس است هرگاه انتگرال بالایی و پایینی f نسبت به α موجود و برابر باشند. یعنی

$$\overline{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha)$$

و این مقدار مساوی را انتگرال f نسبت به α روی $[a,b]$ نامند.

$$\int_a^b f\,d\alpha = I(f,\alpha) = \overline{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha)$$

۲.۶. قضیه. فرض کنید α بر $[a,b]$ صعودی و f بر $[a,b]$ کراندار است. برای هر تظریف P' از P داریم

الف) $L(P,f,\alpha) \le L(P',f,\alpha)$

ب) $U(P',f,\alpha) \le U(P,f,\alpha)$

ج) به ازای هر دو افراز P_1 و P_2 از $[a,b]$

$$L(P_1,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha)$$

اثبات. الف) فرض کنید P' تنها شامل یک نقطه اضافه بر P مانند x^* است و این نقطه در زیربازه $[x_{i-1},x_i]$ قرار دارد که در آن $x_{i-1}, x_i \in P$ دو نقطه متوالی افراز P باشند. قرار می‌دهیم

$$w_1 = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x^*\}$$

$$w_2 = \inf\{f(x) \mid x^* \le x \le x_i\}$$

واضح است که $m_i \le w_1$ و $m_i \le w_2$. بنابراین

$$L(P',f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=w_1[\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1})]+w_2[\alpha(x_i)-\alpha(x^*)]$$
$$-m_i[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]$$
$$=(w_1-m_i)[\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1})]$$
$$+(w_2-m_i)[\alpha(x_i)-\alpha(x^*)]\geq 0$$

و (الف) برقرار است. حال اگر P' شامل k نقطه بیشتر از P باشد. نتیجه فوق را k مرتبه تکرار می‌کنیم و (الف) نتیجه می‌شود.

ب) فرض کنید P' یک نقطه بیشتر از P مثلاً x^* در بازه $[x_{i-1},x_i]$ داشته باشد و

$$w_1=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\leq x\leq x^*\}$$
$$w_2=\sup\{f(x)\mid x^*\leq x\leq x_i\}$$

واضح است که $w_1\leq M_i$ و $w_2\leq M_i$. پس

$$U(P,f,\alpha)-U(P',f,\alpha)=(M_i-w_1)(\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1}))$$
$$+(M_i-w_2)(\alpha(x_i)-\alpha(x^*))\geq 0$$

حکم (ب) برای P' در این حالت برقرار است. اگر P' شامل k نقطه بیشتر از P باشد نتیجه فوق را k مرتبه تکرار می‌کنیم و (ب) حاصل می‌شود.

ج) فرض کنید P_1 و P_2 دو افراز دلخواه از $[a,b]$ باشند. $P_1\cup P_2$ تظریف مشترک P_1 و P_2 است. طبق (الف) و (ب)،

$$L(P_1,f,\alpha)\leq L(P_1\cup P_2,f,\alpha)$$
$$\leq U(P_1\cup P_2,f,\alpha)\leq U(P_2,f,\alpha)$$

۳.۶ قضیه: فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a,b]$ و α تابعی صعودی بر $[a,b]$ است. آنگاه

$$\underline{I}(f,\alpha)=\underline{\int_a^b} f\,d\alpha\leq\overline{\int_a^b} f\,d\alpha=\overline{I}(f,\alpha)$$

اثبات. با توجه به قسمت (ج) قضیه ۲.۶. برای هر دو افراز P_1 و P_2 دلخواه از $[a,b]$ داریم:

۳۷

$$L(P_1,f,\alpha)\leq U(P_2,f,\alpha)$$

حال فرض کنید P_1 افرازی ثابت از $[a,b]$ است و P_2 هر افراز دلخواهی از $[a,b]$ باشد در این صورت $L(P_1,f,\alpha)$ کران پایینی برای مجموعه

$$\{U(P_2,f,\alpha)\mid P_2\in P[a,b]\}$$

است. پس

$$L(P_1,f,\alpha)\leq \inf\{U(P_2,f,\alpha)\mid P_2\in P[a,b]\}=\bar{I}(f,\alpha)$$

حال $\bar{I}(f,\alpha)$ یک کران بالا برای مجموعه

$$\{L(P_1,f,\alpha)\mid P_1\in P[a,b]\}$$

پس

$$\underline{I}(f,\alpha)=\sup\{L(P_1,f,\alpha)\mid P_1\in P[a,b]\}\leq \bar{I}(f,\alpha)$$

۴.۶ تبصره. نامساوی در قضیه ۳.۶ می‌تواند اکید باشد. به عنوان مثال فرض کنید $\alpha(x)=x$ و

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in \mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0 & x\in \mathbb{IQ}\cap[0,1]\end{cases}$$

حال اگر P افرازی دلخواه از $[0,1]$ باشد، آنگاه

$$U(P,f,x)=\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta\alpha_k$$

که در آن

$$M_k=\sup_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)=1$$ پس

$$U(P,f,x)=\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k=\alpha(1)-\alpha(0)=1$$

در نتیجه

$$\bar{\int_0^1} f(x)\,dx=1$$

به طریق مشابه دیده می‌شود که $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=0$. پس در این مثال

$$\bar{I}(f,\alpha)=\bar{\int_0^1} f(x)\,dx>\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=\underline{I}(f,\alpha)$$

۵.۶ قضیه. فرض کنید α تابعی صعودی بر $[a,b]$ و f,g توابعی کراندار بر بازه $[a,b]$ باشند

آگاه

الف) برای $a<c<b$

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^c} f\,d\alpha + \overline{\int_c^b} f\,d\alpha$$

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^c} f\,d\alpha + \underline{\int_c^b} f\,d\alpha$$

ب)

$$\overline{\int_a^b} (f+g)\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha + \overline{\int_a^b} g\,d\alpha$$

ج)

$$\underline{\int_a^b} (f+g)\,d\alpha \geq \underline{\int_a^b} f\,d\alpha + \underline{\int_a^b} g\,d\alpha$$

اثبات. تمرین

۹.۶. فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a,b]$ و α صعودی است. اگر P_1 و P_2 افرازهایی از $[a,b]$ با $\|P_1\| < \delta$ باشد آنگاه برای $P_1 \subset P_2$ با k نقطهٔ اضافه داریم

$$U(P_1,f,\alpha) \leq U(P_2,f,\alpha) + 2k\delta M$$

$$L(P_2,f,\alpha) \leq L(P_1,f,\alpha) + 2k\delta M$$

که در آن $|f(x)| \leq M$ روی $[a,b]$.

اثبات. فرض کنید $P_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ و P_2 شامل P_1 و نقاط $c_1, \ldots, c_k$ است. فرض کنید $P_2' = \{c_1\} \cup P_1$ که در آن $x_{r-1} < c_1 < x_r$ و M_{r_1} و M_{r_2} کرانهای بالای f روی $[x_{r-1}, c_1]$ و $[c_1, x_r]$ به ترتیب است.

$$M_{r_1} = \sup_{x_{r-1} \leq x \leq c_1} f(x) \quad , \quad M_{r_2} = \sup_{c \leq x \leq x_r} f(x)$$

آنگاه

$$\max\{M_{r_1}, M_{r_2}\} \leq M_r$$

و داریم

$$U(P_1,f,\alpha) - U(P_2',f,\alpha) = (M_r - M_{r_1})(\alpha(c_1) - \alpha(x_{r-1})) + (M_r - M_{r_2})(\alpha(x_r) - \alpha(c_1))$$

حال چون $-M \leq M_{r_1} \leq M_r \leq M$ و $-M \leq M_{r_2} \leq M_r \leq M$ پس

$$0 \leq M_r - M_{r_1} \leq 2M \quad , \quad 0 \leq M_r - M_{r_2} \leq 2M$$

بنابراین

$$U(P_1,f,\alpha) - U(P_2',f,\alpha) \leq 2M(\alpha(x_r) - \alpha(x_{r-1})) \leq 2M\delta$$

به همین ترتیب اگر $P_2'' = P_2' \cup \{c_2\}, \ldots, P_2^k = P_2^{k-1} \cup \{c_k\}$ داریم

$$U(P_2',f,\alpha) \leq U(P_2'',f,\alpha) + 2M\delta,$$

$$\vdots$$

$$U(P_2^{k-1},f,\alpha) \leq U(P_2^k,f,\alpha) + 2M\delta$$

در نتیجه با $P_2 = P_2^k$ ،

$$U(P_1, f, \alpha) \le U(P_2, f, \alpha) + 2kM\delta$$

بطور مشابه

$$L(P_2, f, \alpha) \le L(P_1, f, \alpha) + 2kM\delta$$

۷. شرایط لازم و کافی برای انتگرال‌پذیری R.S.

۱.۷ قضیه. فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a,b]$ و α تابعی صعودی است. $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$ افراز P از $[a,b]$ وجود داشته باشد بطوری که

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon \qquad (1)$$

اثبات. فرض کنید برای $\epsilon > 0$ داده شده، افراز P وجود داشته باشد بطوری که (۱) برقرار است. با توجه به

$$L(P,f,\alpha) \le \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \le U(P,f,\alpha)$$

داریم

$$0 \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha < \epsilon$$

پس $\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha$ و در نتیجه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

برعکس، فرض کنید $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و $\epsilon > 0$ داده شده است. با توجه به انتگرالهای بالایی و پایینی افرازهای P_1 و P_2 وجود دارند بطوری که

$$U(P_2, f, \alpha) - \int_a^b f\,d\alpha < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\int_a^b f\,d\alpha - L(P_1, f, \alpha) < \frac{\epsilon}{2}$$

حال اگر $P = P_1 \cup P_2$ آنگاه

$$U(P,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha) < \int_a^b f\,d\alpha + \frac{\epsilon}{2} < L(P_1,f,\alpha) + \epsilon \le L(P,f,\alpha) + \epsilon$$

یعنی

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$$

۲.۷. قضیه. الف) فرض کنید برای $\varepsilon > 0$ داده شده، افراز P از $[a,b]$ وجود داشته باشد بطوری که

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon$$

آنگاه رابطه فوق برای هر تظریف افراز P برقرار است. (شرط بیان شده در فرض قضیه را شرط ریمان نامیم.)

ب) اگر برای تابع کراندار f و تابع صعودی α روی $[a,b]$ شرط ریمان برقرار باشد و افراز P به صورت $P=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ باشد، آنگاه به ازای هر s_i و t_i دلخواه از زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \varepsilon$$

اثبات. الف) فرض کنید P' تظریف دلخواهی از P است. طبق قضیه ۲.۶

$$\begin{cases} U(P',f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) \\ L(P,f,\alpha) \le L(P',f,\alpha) \end{cases}$$

دو نامعادله فوق را از هم کم می‌کنیم، داریم

$$U(P',f,\alpha) - L(P',f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon$$

ب) با توجه به تعریف M_i و m_i، برای هر $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$m_i \le f(s_i) \le M_i \quad , \quad m_i \le f(s_i) \le M_i$$

در نتیجه

$$-(M_i - m_i) \le f(s_i) - f(t_i) \le M_i - m_i$$
$$|f(s_i) - f(t_i)| \le M_i - m_i$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i \le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i$$
$$= U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon$$

و حکم تمام است.

۳.۷. قضیه. اگر $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و شرط (ب) قضیه ۲.۷ برقرار باشد، آنگاه

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon$$

$$m_i \leq f(t_i) \leq M_i$$

پس

$$L(P,f,\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i \leq U(P,f,\alpha)$$

از طرفی چون $f\in R(\alpha)$ ، داریم

$$L(P,f,\alpha) \leq \int_a^b f\,d\alpha \leq U(P,f,\alpha)$$

بنابراین

$$-\epsilon < -(U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,d\alpha \leq U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) < \epsilon$$

پس

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon$$

۳.۷ قضیه. فرض کنید $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ افرازی از $[a,b]$ است و

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i \qquad x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$$

اگر $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha)$ موجود باشد آنگاه f نسبت به α روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر R.S. است و

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha) = \int_a^b f\,d\alpha$$

اثبات. فرض کنید $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha) = A$ آنگاه

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 \quad s.t \quad \|P\|<\delta \Rightarrow |S(P,f,\alpha)-A|<\epsilon$$

یا برای هر افراز P با $\|P\|<\delta$ داریم

$$A-\epsilon < S(P,f,\alpha) < A+\epsilon$$

حال با توجه به $\inf_{x_{i-1}\leq t_i\leq x_i} f(t_i)$ و $\sup_{x_{i-1}\leq t\leq x_i} f(t_i)$ داریم

$$A-\epsilon \leq L(P,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) \leq A+\epsilon$$

بنابراین

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\leq 2\epsilon<3\epsilon$$

پس $f\in R(\alpha)$ و $\int_a^b f\,d\alpha$ بین $U(P,f,\alpha)$ و $L(P,f,\alpha)$ است. درنتیجه

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha - A\right|<\epsilon$$

یعنی

$$A\;\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha)=A=\int_a^b f\,d\alpha$$

۵.۷ . وجود $\lim S(P,f,\alpha)$ وقتی $\|P\|\to 0$ شرط کافی برای انتگرال پذیری R.S تابع f نسبت به α روی $[a,b]$ است، اما شرط لازم نمی‌باشد. به عنوان مثال

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

آنگاه $f\in R(\alpha)$ روی $[-1,1]$ ولی $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha)$ وجود ندارد.

حل. برای افراز $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ از $[-1,1]$ که در آن $x_0=-1$, $x_n=1$ فرض کنید $0\in[x_{r-1},x_r]$ و $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ برای $i=1,2,\ldots,n$. داریم

$$\begin{aligned}S(P,f,\alpha)&=\sum_{i=1}^n f(t_i)\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]\\&=f(t_r)\\&=\begin{cases}0 & t_r<0\\ 1 & t_r\geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

بنابراین وقتی $\|P\|\to 0$ ، $\lim S(P,f,\alpha)$ وجود ندارد، اما برای $P'=P\cup\{0\}$ داریم

$$U(P',f,\alpha)=1.\,[\alpha(x^*)-\alpha(0)]=1=L(P',f,\alpha)$$

که در آن $x^*>0$. پس $f\in R(\alpha)$ روی $[-1,1]$ و

$$\int_{-1}^{1} f\,d\alpha=1$$

۶.۷ مثال. اگر α بر $[a,b]$ صعودی بوده و در $x_0\in[a,b]$ پیوسته باشد و

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}$$

آنگاه $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ و

$$\int_a^b f\,d\alpha=0$$

حل. فرض کنید P افرازی از $[a,b]$ است و $x_0\in[x_{r-1},x_r]$. چون α در x_0 پیوسته است، برای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $\delta>0$ وجود دارد بطوری که

$$|x-x_0|<\delta \implies |\alpha(x)-\alpha(x_0)|<\varepsilon/2$$

بنابراین وقتی $\|P\|<\delta$ داریم

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_r&=|\alpha(x_r)-\alpha(x_0)+\alpha(x_0)-\alpha(x_{r-1})|\\ &\le|\alpha(x_r)-\alpha(x_0)|+|\alpha(x_0)-\alpha(x_{r-1})|\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

پس وقتی $\|P\|<\delta$

$$|S(P,f,\alpha)|<\varepsilon$$

یعنی $\lim_{\|P\|\to 0}S(P,f,\alpha)=0$. در نتیجه $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ و

$$\int_a^b f\,d\alpha=\lim_{\|P\|\to 0}S(P,f,\alpha)=0$$

۷.۰۷. مثال. فرض کنید f بر بازهٔ $[-1,1]$ کراندار است و

$$\alpha(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1/2 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

f نسبت به α روی $[-1,1]$ انتگرال‌پذیر ریمان - استیلتیس است اگر و تنها اگر f در $x=0$ پیوسته باشد.

حل. فرض کنید $P=(x_0,x_1,\dots,x_{r-2},0,x_r,\dots,x_n)$ که در آن $x_0=-1$ ، $x_{r-1}=0$ ، $x_n=1$ ، $x_r=0$ افرازی از $[-1,1]$ بوده و $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ ، آنگاه،

$$S(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]$$

$$=f(t_{r-1})(\tfrac{1}{2}-0)+f(t_r)(1-\tfrac{1}{2})$$
$$=\tfrac{1}{2}[f(t_{r-1})+f(t_r)]$$
$$=f(0) \qquad \text{وقتی که } t_{r-1}=t_r=0$$

حال اگر $\|P\|\to 0$ آنگاه $t_{r-1}\to 0^-$ و $t_r\to 0^+$ و در نتیجه $\lim S(P,f,\alpha)$ وقتی $\|P\|\to 0$ موجود است. در واقع حد فوق موجود است هرگاه

$$\lim_{t_{r-1}\to 0^-} f(t_{r-1})=\lim_{t_r\to 0^+} f(t_r)=f(0)$$

بنابراین، اگر f در $x=0$ پیوسته باشد آنگاه حد زیر وجود دارد

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha)=f(0)$$

و در نتیجه $f\in R(\alpha)$ روی $[-1,1]$.

برعکس، اگر $f\in R(\alpha)$ روی $[-1,1]$ آنگاه برای $\varepsilon>0$ داده شده، افراز P از $[-1,1]$ وجود دارد بطوری که $\|P\|<\delta$ و

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$$

از طرفی

$$U(P,f,\alpha)=M_{r-1}(\tfrac{1}{2}-0)+M_r(1-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}(M_{r-1}+M_r)$$
$$L(P,f,\alpha)=m_{r-1}(\tfrac{1}{2}-0)+m_r(1-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}(m_{r-1}+m_r)$$

در نتیجه

$$|f(x)-f(0)|\le M_r-m_r<2\varepsilon \qquad \text{وقتی } \|P\|<\delta$$
$$|f(x)-f(0)|\le M_{r-1}-m_{r-1}<2\varepsilon \qquad \text{وقتی } \|P\|<\delta$$

بنابراین f در 0 پیوسته است.

۸.۷ قضیه. اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ و

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f,\alpha)=\int_a^b f\,d\alpha$$

اثبات. برای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $\eta>0$ وجود دارد به طوری که

$$[\alpha(b)-\alpha(a)]\eta<\varepsilon$$

چون f بر $[a,b]$ پیوسته است، بنابراین f روی $[a,b]$ پیوسته یکنواخت می‌باشد. در نتیجه برای $\eta>0$ عدد $\delta>0$ وجود دارد بطوری که اگر $s,t\in[a,b]$ و $|s-t|<\delta$ آنگاه $|f(s)-f(t)|<\eta$.

حال اگر P افرازی از $[a,b]$ با $\|P\|<\delta$ باشد، آنگاه داریم

$$M_i-m_i\leq\eta \qquad i=1,2,\dots,n$$

پس

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i\leq\eta\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i=\eta[\alpha(b)-\alpha(a)]<\epsilon$$

درنتیجه $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$. چون $S(P,f,\alpha)$ و $\int_a^b f\,d\alpha$ بین مجموعهای بالائی و پائینی قرار دارند. بنابراین وقتی $\|P\|<\delta$

$$\left|S(P,f,\alpha)-\int_a^b f\,d\alpha\right|<\epsilon$$

پس

$$\lim_{\|P\|\to 0}S(P,f,\alpha)=\int_a^b f\,d\alpha$$

۹.۷ قضیه. اگر f روی $[a,b]$ یکنوا و α تابعی پیوسته و بطور یکنوا غیرنزولی بر $[a,b]$ باشد آنگاه $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$.

اثبات. چون α روی $[a,b]$ پیوسته است، برای $\epsilon>0$ و $n\in\mathbb{N}$ داده شده، افراز P از $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$\Delta\alpha_i=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n} \qquad i=1,2,\dots,n$$

فرض کنید f بطور یکنوا غیرنزولی است، دراین صورت

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$
$$=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}[f(b)-f(a)]$$

که درآن $M_i=f(x_i)$ و $m_i=f(x_{i-1})$. حال اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد بطوری که

$$\frac{[\alpha(b)-\alpha(a)][f(b)-f(a)]}{n}<\epsilon$$

آنگاه $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\epsilon$. بنابراین $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$.

۱۰.۷. وجود انتگرال R.S. وقتی که α با تغییر کراندار است. مفهوم تغییر کراندار برای توسیع تعریف انتگرال R.S. به حالتی که α لزوماً بطور یکنوا غیرنزولی بر $[a,b]$ نیست نقشی اساسی دارد. حالتهای زیر را در نظر بگیرید:

الف) f پیوسته و α با تغییر کراندار روی $[a,b]$ باشند.

ب) f و α با تغییر کراندار و α پیوسته بر $[a,b]$ باشند.

در حالت (الف)، اگر $v(x)$ تابع تغییر (یعنی $V(\alpha; a,x)$) برای α روی $[a,b]$ باشد آنگاه

$$\alpha(x) = v(x) - \{v(x) - \alpha(x)\}$$

پس توسیع انتگرال R.S. توسط

$$\int f\,d\alpha = \int f\,dv - \int f\,d(v-\alpha)$$

داده می‌شود که در آن انتگرالهای سمت راست با توجه به قضیه ۹.۷ و صعودی بودن v و $v-\alpha$ وجود دارند. که تعریفی برای انتگرال سمت چپ حاصل می‌شود. توجه باید کرد که انتگرال سمت چپ بطور منحصر بفردی مشخص، مستقل از نحوه تجزیه دیگر $\alpha(x)$ به صورت تفاضل دو تابع بطور یکنوا غیرنزولی، موجود است.

در حالت (ب)، f و α را می‌توان به صورت

$$f = f_1 - f_2$$
$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

تجزیه کرد، که در آن f_1، f_2 و α_1، α_2 بطور یکنوا غیرنزولی‌اند و α_1 و α_2 روی $[a,b]$ پیوسته می‌باشند. حال از رابطه

$$\int f\,d\alpha = \int f_1\,d\alpha_1 - \int f_1\,d\alpha_2 - \int f_2\,d\alpha_1 + \int f_2\,d\alpha_2$$

وجود انتگرال R.S. طرف چپ را می‌توان نتیجه گرفت.

۱۱.۷ قضیه. فرض کنید f روی $[a,b]$ کراندار است و f تنها دارای تعدادی متناهی نقطه ناپیوستگی روی $[a,b]$ باشد و فرض کنید α در هر نقطه ناپیوستگی تابع f، پیوسته

باشد، آنگاه $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

<u>اثبات</u>. قرار می‌دهیم

$$M = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$$

فرض کنید E مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع f است. طبق فرض E متناهی و α در هر نقطه E پیوسته است. پس برای هر $\epsilon > 0$ داده شده می‌توان E را توسط تعدادی متناهی بازهٔ $[u_j, v_j] \subset [a,b]$ پوشش داد بطوری که مجموع تفاضلهای $\alpha(v_j) - \alpha(u_j)$ کوچکتر از $\epsilon > 0$ باشد. بعلاوه می‌توان فواصل فوق را به طریقی در نظر گرفت که هر نقطهٔ $E \cap (a,b)$ در درون برخی از $[u_j, v_j]$ ها قرار داشته باشد. حال بازه‌های (u_j, v_j) را از $[a,b]$ حذف می‌کنیم. مجموعه باقیمانده را K نامیم. K مجموعه‌ای فشرده است. بنابراین f پیوسته روی K و در نتیجه پیوسته یکنواخت روی K است. پس $\delta > 0$ وجود دارد بطوری که اگر s و t نقاط K بوده و $|s-t| < \delta$ آنگاه $|f(s) - f(t)| < \epsilon$.

حال افراز P شامل نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ از $[a,b]$ را به صورت زیر می‌سازیم:

هر u_j در P است و هر v_j در P است. هیچ نقطه‌ای از بازهٔ (u_j, v_j) در P نیست. اگر x_{i-1} یکی از u_jها نباشد آنگاه $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \delta$.

برای هر i

$$M_i - m_i \le 2M$$

و اگر x_{i-1} یکی از u_jها نباشد، داریم

$$M_i - m_i \le \epsilon$$

بنابراین

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i$$
$$\le [\alpha(b) - \alpha(a)]\epsilon + 2M\epsilon$$

چون ϵ دلخواه است، بنابراین $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$.

۱۲.۷ قضیه. فرض کنید α تابعی صعودی بر $[a,b]$ است و توابع f و α هر دو در نقطهٔ c از (a,b) ناپیوسته راست یا هر دو ناپیوسته چپ باشند. آنگاه f نسبت به α بر $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان - استیلجس نمی باشد.

اثبات. حالتی که هر دو تابع f و α در $x=c$ از (a,b) ناپیوسته چپ می باشند را بررسی می کنیم. حالت ناپیوسته راست مشابه است. چون f و α در $x=c$ ناپیوسته چپ هستند پس

$$\exists \epsilon_1>0 \quad \forall \delta>0 , \qquad t\in(c-\delta,c) \Rightarrow |f(t)-f(c)| \geq \epsilon_1$$

$$\exists \epsilon_2>0 \quad \forall \delta>0 , \qquad s\in(c-\delta,c) \Rightarrow |\alpha(s)-\alpha(c)| \geq \epsilon_2$$

فرض کنید $\epsilon=\epsilon_1 \geq \epsilon_2$. پس برای هر s و t در $(c-\delta,c)$

$$|f(t)-f(c)| \geq \epsilon \qquad \& \qquad |\alpha(s)-\alpha(c)| \geq \epsilon$$

حال افراز P از $[a,b]$ حاوی c را در نظر می گیریم و

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}[M_i-m_i]\,\Delta\alpha_i$$

برقرار است که در آن $\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$. حال اگر نقطه c نقطهٔ انتهایی چپ زیربازه kام باشد چون c ناپیوستگی چپ مشترک f و α است، داریم

$$M_k-m_k \geq \epsilon \qquad , \qquad \alpha(x_k)-\alpha(c)\geq \epsilon$$

از طرفی

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum(M_i-m_i)\Delta\alpha_i \geq (M_k-m_k)(\alpha(x_k)-\alpha(c)) \geq \epsilon^2$$

پس شرط قضیه ریمان برای انتگرال پذیری R.S. برقرار نیست. در نتیجه f نسبت به α روی $[a,b]$ انتگرال پذیر R.S. نمی باشد.

۱۴.۷. قضیه. الف) فرض کنید α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار بوده و $V(x)$ تغییر کل α بر $[a,x]$ باشد و $V(a)=0$. اگر f بر $[a,b]$ معین و کراندار باشد، هرگاه $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$، آنگاه $f\in R(V)$ بر $[a,b]$.

ب) فرض کنید α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار، و $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشد. در این صورت $f\in R(\alpha)$ بر هر زیربازهٔ $[a,b]$ مانند $[c,d]$ خواهد بود.

اثبات. الف) اگر $V(b)=0$، آنگاه $V(x)$ بر $[a,b]$ تابعی ثابت است و حکم بدیهی است. فرض کنید $V(b)>0$. چون f بر $[a,b]$ کراندار می‌باشد،

$$\exists M>0 \quad s.t \quad |f(x)|\leq M \qquad x\in[a,b]$$

تابع تغییر کل صعودی است، برای $\epsilon>0$ داده شده افراز P_ϵ وجود دارد به طوری که برای هر افراز $P_\epsilon\subset P$ داریم

$$s_i,t_i\in[x_{i-1},x_i],\quad V(b)<\sum|\Delta\alpha_i|+\frac{\epsilon}{4M}$$

$$s_i,t_i\in[x_{i-1},x_i],\quad \left|\sum_{i=1}^{n}[f(s_i)-f(t_i)]\Delta\alpha_i\right|<\frac{\epsilon}{4}$$

که در آن $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$.

حال برای افراز P در بالا داریم

$$\Delta V_i-|\Delta\alpha_i|=V(\alpha;x_i,a)-V(\alpha,x_{i-1},a)-|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|$$
$$=V(\alpha,x_i,x_{i-1})-|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|\geq 0$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)[\Delta V_i-|\Delta\alpha_i|]\leq 2M\sum_{i=1}^{n}(\Delta V_i-|\Delta\alpha_i|)$$
$$=2M\left(V(b)-\sum_{i=1}^{n}|\Delta\alpha_i|\right)$$
$$<2M\left(\frac{\epsilon}{4M}\right)=\frac{\epsilon}{2}$$

قرار می‌دهیم

$$A=\{i\mid\Delta\alpha_i\geq 0\},\qquad B=\{i\mid\Delta\alpha_i<0\}$$

و $h=\epsilon/4V(b)$. برای $i\in A$، s_i و t_i را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$f(s_i)-f(t_i)>M_i-m_i-h$$

این انتخاب امکان‌پذیر است زیرا $M_i=\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$ و $m_i=\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$، پس برای $\frac{\epsilon}{8V(b)}$ اعداد s_i و t_i که $i\in A$ وجود دارند بطوری که $x_i>s_i>t_i>x_{i-1}$ و

$$f(s_i)>M_i-\frac{\epsilon}{8V(b)},\qquad f(t_i)<m_i+\frac{\epsilon}{8V(b)}$$

اگر دو نامساوی اخیر را از یکدیگر کم کنیم، داریم

$$f(s_i)-f(t_i) > M_i - m_i - \frac{\epsilon}{4V(b)}$$

حال اگر $i\in B$، داریم $\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})=\Delta\alpha_i<0$. با استدلال مشابه بالا اعداد s_i و t_i را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_i > s_i > t_i > x_{i-1}$ و

$$f(t_i)-f(s_i) > M_i - m_i - h$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,|\Delta\alpha_i| &\le \sum_{i\in A}\big(f(s_i)-f(t_i)\big)|\Delta\alpha_i| + \sum_{i\in B}\big(f(t_i)-f(s_i)\big)|\Delta\alpha_i| \\ &\quad + h\sum_{i=1}^{n}|\Delta\alpha_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\big(f(s_i)-f(t_i)\big)\Delta\alpha_i + h\sum_{i=1}^{n}|\ \alpha_i| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + hV(b) = \frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

در نتیجه ثابت کردیم که

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,(\Delta V_i - |\Delta\alpha_i|) < \frac{\epsilon}{2}$$

و

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,|\Delta\alpha_i| < \frac{\epsilon}{2}$$

با جمع این دو نامساوی داریم

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta V_i < \epsilon$$

یعنی $U(P,f,V)-L(P,f,V)<\epsilon$. پس $f\in\mathcal{R}(V)$ روی $[a,b]$.

ب) فرض کنید $V(x)$ تغییر کل α بر $[a,x]$ باشد و $V(a)=0$. آنگاه

$$\alpha = V-(V-\alpha)$$

که در آن V و $V-\alpha$ بر $[a,b]$ صعودی می‌باشند. بنابر قسمت (الف)، $f\in\mathcal{R}(V)$ و در نتیجه $f\in\mathcal{R}(V-\alpha)$ بر $[a,b]$ است. حال اگر حکم برای انتگرال‌گیرهای صعودی برقرار باشد نتیجه می‌شود که $f\in\mathcal{R}(V)$، $f\in\mathcal{R}(V-\alpha)$ بر $[c,d]$ است. پس $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ بر $[c,d]$ خواهد بود. پس کافی است حکم را برای حالتی که α بر $[a,b]$ صعودی باشد ثابت کنیم. برای این حالت نیز کافی است ثابت کنیم $\int_a^c f\,d\alpha$ و $\int_a^d f\,d\alpha$ وجود دارد.

فرض کنید $a<c<b$. اگر P افرازی از $[a,x]$ باشد قرار می‌دهیم

$$\Delta(P,x) = U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)$$

که در آن U و L مجموعهای بالایی و پایینی f بر $[a,x]$ اند. چون $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ است پس شرط ریمان برقرار است. بنابراین برای $\epsilon>0$ داده شده، افراز P_ϵ از $[a,b]$ وجود دارد بطوری که برای هر تظریف P از P_ϵ داریم

$$\Delta(P,b) < \epsilon$$

می‌توان فرض کرد $c\in P_\epsilon$ ، قرار می‌دهیم $P'_\epsilon = P_\epsilon \cap [a,c]$. اگر P' تظریفی از P'_ϵ بر $[a,c]$ باشد، آنگاه $P = P' \cup P_\epsilon$ یک افراز $[a,b]$ است که شامل نقاط P' ونقاطی از P_ϵ است که در $[c,b]$ است. مجموع $\Delta(P',c)$ شامل جملاتی از مجموع $\Delta(P,b)$ است که مربوط به $[a,c]$ است. چون هر جمله در این مجموعها نامنفی است و P از P_ϵ ظریفتر می‌باشد بنابراین

$$\Delta(P',c) \le \Delta(P,b) < \epsilon$$

یعنی اگر P' ظریفتر از P'_ϵ باشد، آنگاه $\Delta(P',c)<\epsilon$. درنتیجه $f\in R(\alpha)$ بر $[a,c]$ و انتگرال $\int_a^c f\,d\alpha$ وجود دارد. بطور مشابه $\int_a^d f\,d\alpha$ نیز برای $a<d<b$ وجود دارد پس $\int_c^d f\,d\alpha$ موجود است.

۱۴.۷ نتیجه. فرض کنید α تابعی با تغییر کراندار بر $[a,b]$ است. آنگاه $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ هرگاه هر کدام از شرائط زیر برقرار باشد.

الف) f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.

ب) f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد.

۱۵.۷ قضیه. اگر $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ و $m \le f \le M$ و φ تابعی پیوسته بر $[m,M]$ باشد و برای هر $x\in[a,b]$ ، تابع h توسط $h(x)=\varphi(f(x))$ تعریف شده باشد، آنگاه $h\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ است.

اثبات. چون φ بر $[m,M]$ پیوسته است، بنابراین پیوسته یکنواخت است و

درنتیجه

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \quad s.t. \quad \forall s,t\in[m,M],\ |s-t|<\delta \Rightarrow |\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon$$

بدون کم شدن از کلیت حکم می توان فرض کرد $\delta<\varepsilon$ است. چون $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$

برای $\delta^2>0$ افراز P از $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\delta^2$$

فرض کنید M_i^* ، m_i^* ، M_i و m_i به صورت زیر تعریف شوند:

$$M_i^*=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}\varphi(x) \qquad m_i^*=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}\varphi(x) \qquad m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\ , \qquad M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$$

مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$ را به دو کلاس زیر تقسیم می کنیم:

$i\in A$ هرگاه $M_i-m_i<\delta$ و $i\in B$ هرگاه $M_i-m_i\geq\delta$.

به عبارت دیگر

$i\in A$ هرگاه $M_i-m_i<\delta$ و درنتیجه $M_i^*-m_i^*=\sup|\varphi(s)-\varphi(t)|\le\varepsilon$

و $i\in B$ هرگاه $M_i-m_i\geq\delta$ و درنتیجه $M_i^*-m_i^*\le 2K$ که در آن $K=\sup\limits_{m\le t\le M}|\varphi(t)|$

زیرا از پیوستگی φ نتیجه می گیریم که φ روی $[m,M]$ کراندار است و بنابراین $K\geq 0$ وجود دارد

بطوری که $K=\sup\limits_{m\le t\le M}|\varphi(t)|$ و بنابراین $M_i^*-m_i^*\le 2K$.

درنتیجه

$$\begin{aligned}U(P,h,\alpha)-L(P,h,\alpha)&=\sum_{i\in A}(M_i^*-m_i^*)\Delta\alpha_i+\sum_{i\in B}(M_i^*-m_i^*)\Delta\alpha_i\\&<\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]+2K\delta\\&<\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)+2K]\end{aligned}$$

زیرا

$$\delta\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i\le\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i<\delta^2$$
$$\Rightarrow \sum\Delta\alpha_i<\delta<\varepsilon$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، بنابراین $h\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است.

۸. خواص انتگرال R.S. درحالتی که α صعودی است

۱.۸ قضیه. الف) فرض کنید $f\in \mathcal{R}(\alpha)$ و $g\in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است، آنگاه $f\pm g\in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ و $cf\in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است (c ثابت) و

$$\int_a^b (f\pm g)\,d\alpha=\int_a^b f\,d\alpha \pm \int_a^b g\,d\alpha$$
$$\int_a^b cf\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha$$

ب) اگر $f\in \mathcal{R}(\alpha)$، $g\in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ باشند و برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\le g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f\,d\alpha \le \int_a^b g\,d\alpha$$

ج) اگر $f\in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ باشد و $a<c<b$، آنگاه $f\in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,c]$، $[c,b]$ و

$$\int_a^b f\,d\alpha=\int_a^c f\,d\alpha+\int_c^b f\,d\alpha$$

د) اگر $f\in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ و برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $|f(x)|\le M$ آنگاه

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le M[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

هـ) اگر $f\in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ و $c>0$ عدد ثابت، آنگاه $f\in \mathcal{R}(c\alpha)$ روی $[a,b]$ و داریم

$$\int_a^b f\,d(c\alpha)=c\int_a^b f\,d\alpha$$

اثبات. بصورت کاملاً مشابه با قضایای   در بحث انتگرال ریمان، قسمتهای (الف)، (ب) و (ج) نتیجه خواهند شد. برای اثبات (د)، طبق فرض $-M\le f\le M$، بنابراین f نسبت به α روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر R.S. است و داریم

$$-M[\alpha(b)-\alpha(a)]\le \int_a^b f\,d\alpha \le M[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

پس

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right|\le M[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

ه) چون $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ است، پس برای $\epsilon>0$ داده شده افراز P از $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\frac{\epsilon}{c}$$

بنابراین

$$U(P,f,c\alpha)-L(P,f,c\alpha)<\epsilon$$

در نتیجه $f\in R(c\alpha)$ روی $[a,b]$ و با توجه به

$$cL(P,f,\alpha)=L(P,f,c\alpha)\le c\int_a^b f\,d\alpha\le U(P,f,c\alpha)=cU(P,f,\alpha)$$

و

$$cL(P,f,\alpha)=L(P,f,c\alpha)\le \int_a^b f\,d(c\alpha)\le U(P,f,c\alpha)=cU(P,f,\alpha)$$

داریم

$$\left|\int_a^b f\,d(c\alpha)-c\int_a^b f\,d\alpha\right|<\epsilon$$

چون $\epsilon>0$ دلخواه است، پس

$$\int_a^b f\,d(c\alpha)=c\int_a^b f\,d\alpha$$

۲.۸ قضیه. اگر $f\in R(\alpha_1)$ و $f\in R(\alpha_2)$ روی $[a,b]$ باشد آنگاه $f\in R(\alpha_1+\alpha_2)$ روی $[a,b]$ است و

$$\int_a^b f\,d(\alpha_1+\alpha_2)=\int_a^b f\,d\alpha_1+\int_a^b f\,d\alpha_2$$

اثبات. فرض کنید $\epsilon>0$ دلخواه داده شده است. افرازهای P_1 , P_2 از $[a,b]$ وجود دارند بطوری که

$$U(P_i,f,\alpha_i)-L(P_i,f,\alpha_i)<\frac{\epsilon}{2}\qquad i=1,2$$

قرار می‌دهیم $P=P_1\cup P_2$ ، داریم

$$U(P,f,\alpha_i)-L(P,f,\alpha_i)<\frac{\epsilon}{2}\qquad i=1,2$$

از طرفی $\Delta(\alpha_1+\alpha_2)_i=\Delta(\alpha_1)_i+\Delta(\alpha_2)_i$ پس

$$U(P,f,\alpha_1+\alpha_2)-L(P,f,\alpha_1+\alpha_2)=U(P,f,\alpha_1)+U(P,f,\alpha_2)-L(P,f,\alpha_1)-L(P,f,\alpha_2)$$
$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

بنابراین $f\in\mathcal{R}(\alpha_1+\alpha_2)$ روی $[a,b]$ است. حال داریم

$$
\begin{aligned}
L(P,f,\alpha_1)+L(P,f,\alpha_2)&=L(P,f,\alpha_1+\alpha_2)\\
&\le \int_a^b f\,d\alpha_1+\int_a^b f\,d\alpha_2 \le U(P,f,\alpha_1)+U(P,f,\alpha_2)\\
&=U(P,f,\alpha_1+\alpha_2)
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
L(P,f,\alpha_1)+L(P,f,\alpha_2)&=L(P,f,\alpha_1+\alpha_2)\\
&\le \int_a^b f\,d(\alpha_1+\alpha_2)\le U(P,f,\alpha_1+\alpha_2)\\
&=U(P,f,\alpha_1)+U(P,f,\alpha_2)
\end{aligned}
$$

درنتیجه برای هر $\varepsilon>0$

$$\left|\int_a^b f\,d(\alpha_1+\alpha_2)-\int_a^b f\,d\alpha_1-\int_a^b f\,d\alpha_2\right|<\varepsilon$$

بنابراین

$$\int_a^b f\,d(\alpha_1+\alpha_2)=\int_a^b f\,d\alpha_1+\int_a^b f\,d\alpha_2$$

۳.۸ قضیه. اگر $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ و $g\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ باشند آنگاه

الف) $fg\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است.

ب) $|f|\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است و $\left|\int_a^b f\,d\alpha\right|\le\int_a^b |f|\,d\alpha$.

ج) هرگاه عددی مانند $t>0$ وجود داشته باشد بطوری که روی $[a,b]$، $|g|>t$ داریم $f/g\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$.

اثبات. الف) قرار می‌دهیم $\varphi(t)=t^2$، φ بر $[a,b]$ پیوسته است. طبق قضیهٔ ۱۵.۷، $f^2\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است و با توجه به قضیه ۱.۸ (الف) و اتحاد

$$4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$$

حکم نتیجه می‌شود. اثبات مستقیمی در تبصرهٔ ۲.۸ ارائه شده است.

ب) قرار می‌دهیم $\varphi(t)=|t|$. φ بر $[a,b]$ پیوسته است. طبق قضیه ۱۵.۷، $|f|\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است و برای $c=\pm1$ داریم

$$c\int_a^b f\,d\alpha \geq 0$$

پس

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| = c\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b cf\,d\alpha \leq \int_a^b |f|\,d\alpha$$

زیرا $cf \leq |f|$.

ج) حکم مشابه قضیه فصل ثابت می‌شود.

۴.۸ تبصره. می‌توان قسمت (الف) قضیه ۳.۸ را به طور مستقیم نیز ثابت نمود. چون $f\in R(\alpha)$، $g\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ می‌باشند، پس روی $[a,b]$

$$\exists K\geq 0 \quad \text{s.t} \quad |f|\leq K,\ |g|\leq K$$

بنابراین $|fg|=|f||g|\leq K^2$، در نتیجه fg روی $[a,b]$ کراندار است. حال برای هر افراز P از $[a,b]$، مجموع‌های $U(P,fg,\alpha)$ و $L(P,fg,\alpha)$ موجودند و در نتیجه کراندارند.
برای $\varepsilon>0$ داده شده، افراز P از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$$

$$U(P,g,\alpha)-L(P,g,\alpha)<\varepsilon$$

قرار می‌دهیم M_i^*، m_i^*، m_i^{**}، M_i^{**} (مشابه با تعریف در قضیه ۱۵.۷)

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} fg(x) \qquad , \qquad m_i=\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} fg(x)$$

$$M_i^*=\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \qquad m_i^*=\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$$

$$M_i^{**}=\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} g(x) \qquad m_i^{**}=\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} g(x)$$

حال برای هر $s_i, t_i\in[x_{i-1},x_i]$ داریم

$$\begin{aligned}|fg(s_i)-fg(t_i)| &= |g(s_i)(f(s_i)-f(t_i))+f(t_i)(g(s_i)-g(t_i))|\\ &\leq |g(s_i)||f(s_i)-f(t_i)|+|f(t_i)||g(s_i)-g(t_i)|\\ &\leq K(M_i^*-m_i^*)+K(M_i^{**}-m_i^{**})\end{aligned}$$

پس

$$M_i - m_i \le k(M_i^{*} - m_i^{*}) + k(M_i^{**} - m_i^{**})$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta\alpha_i \le k\sum_{i=1}^{n}(M_i^{*} - m_i^{*})\Delta\alpha_i + k\sum_{i=1}^{n}(M_i^{**} - m_i^{**})\Delta\alpha_i$$

در نتیجه

$$U(P, fg, \alpha) - L(P, fg, \alpha) < k\epsilon + k\epsilon = 2k\epsilon$$

در نتیجه $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است.

<u>۵.۸ قضیه.</u> اگر $a<c<b$ و f روی $[a,b]$ کراندار و پیوسته در $x=c$ باشد و $\alpha(x) = I(x-c)$، آنگاه

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(c)$$

<u>اثبات.</u> حالت خاصی از قضیه ۱۰.۲ است. اگر $P=(x_0, x_1, x_2, x_3)$ افرازی از $[a,b]$ باشد که در آن $x_0 = a$ و $x_3 = b$، $a=x_0<c=x_1<x_2<x_3=b$، آنگاه

$$U(P,f,\alpha) = M_2 , \quad L(P,f,\alpha) = m_2$$

چون f در c پیوسته است بنابراین M_2 و m_2 همگرا به $f(c)$ می‌باشند. در نتیجه

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(c)$$

<u>۶.۸ قضیه.</u> فرض کنید $\{c_n\}_1^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی است و $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ همگرا باشد و $\{s_n\}$ دنباله‌ای از نقاط مجزای (a,b) است و

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$$

فرض کنید f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ است، آنگاه

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n)$$

<u>اثبات.</u> با توجه به تعریف

$$I(x-s_n) = \begin{cases} 0 & x<s_n \\ 1 & x>s_n \end{cases}$$

برای هر $x \in [a,b]$ داریم $0 \leq I(x-s_n) \leq 1$ بنابراین

$$c_n I(x-s_n) \leq c_n$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ همگرا است. بنابراین طبق آزمون مقایسه‌ای $\sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x-s_n)$ همگرا است. درضمن $\alpha(x)$ کنواست و $\alpha(a) = 0$ و $\alpha(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

حال برای $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد N را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x-s_n) \qquad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x-s_n)$$

طبق قضیه ۲.۸ و ۵.۸ داریم

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,d\alpha_1 &= \int_a^b f\,d\Big(\sum_1^N c_n I(x-s_n)\Big)\\ &= \sum_1^N \int_a^b f\,d(c_n I(x-s_n))\\ &= \sum_1^N c_n \int_a^b f\,d(I(x-s_n))\\ &= \sum_1^N c_n f(s_n)\end{aligned}$$

چون $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$ بنابراین

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha_2\right| \leq M\varepsilon$$

که در آن $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. با توجه به اینکه $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ،

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\,d\alpha - \sum_1^N c_n f(s_n)\right| &= \left|\int_a^b f\,d\alpha_2 + \int_a^b f\,d\alpha_1 - \sum_1^N c_n f(s_n)\right|\\ &= \left|\int_a^b f\,d\alpha_2\right|\\ &\leq M\varepsilon\end{aligned}$$

حال وقتی $N \to \infty$ داریم

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n)$$

<u>۷.۸ قضیه</u>. فرض کنید α بطور یکنوا صعودی و $\alpha' \in \mathcal{R}$ روی $[a,b]$ است. فرض کنید f تابعی حقیقی و کراندار روی $[a,b]$ است. آنگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ اگر و تنها اگر $f\alpha' \in \mathcal{R}$. در این

۶۰

حالت

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx$$

<u>اثبات.</u> قضیه فوق حالت خاصی از قضیه است. اما به دلیل اهمیت آن مجدداً در این قسمت آن را اثبات می‌کنیم.

فرض $\epsilon > 0$ داده شده است. چون $\alpha' \in \mathcal{R}$ روی $[a,b]$، افراز $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ از $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$(1) \qquad U(P,\alpha') - L(P,\alpha') < \epsilon$$

برای هر زیرفاصله $[x_{i-1}, x_i]$ با توجه به مشتق‌پذیری تابع α، طبق قضیه مقدار میانگین برای مشتق

$$\exists\, t_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad s.t \quad \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(t_i)\Delta x_i$$

اگر $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ باشد آنگاه طبق (۱) و قضیه، داریم

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\,\Delta x_i < \epsilon$$

قرار می‌دهیم $M = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$. از رابطه

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i$$

و (۲) نتیجه می‌شود که

$$(3) \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i\right| \le M\epsilon$$

زیرا

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)[\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)]\Delta x_i\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |f(s_i)|\,|\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\Delta x_i \\
&\le M \sum_{i=1}^{n} |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\Delta x_i \\
&\le M\epsilon
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر انتخاب $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ از (۳) داریم

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i \le U(P, f\alpha') + M\epsilon$$

پس

$$U(P,f,\alpha) \le U(P, f\alpha') + M\epsilon$$

بطور مشابه از (۳) نتیجه می‌شود که

$$U(P, f\alpha') \le U(P,f,\alpha) + M\epsilon$$

بنابراین

$$|U(P,f,\alpha) - U(P,f\alpha')| \le M\epsilon \qquad (۴)$$

رابطه (۴) برای هر تظریف P' از P نیز برقرار است، زیرا رابطه (۱) برای هر تظریف P' از P صحیح می‌باشد. در نتیجه

$$\left|\overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx\right| \le M\epsilon$$

چون ϵ دلخواه است، داریم

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx$$

که در آن f تابع کراندار دلخواهی بود. تساوی برای انتگرال‌های پایینی نیز به طریق مشابه حاصل می‌شود. اگر $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ باشد آنگاه انتگرال‌های پایینی و بالایی R.S. تابع f روی $[a,b]$ نسبت به α موجود و برابرند پس انتگرال‌های پایینی و بالایی R. تابع $f\alpha'$ روی $[a,b]$ نیز موجود و برابرند و برعکس.

۸.۸. قضیه: <u>تغییر متغیر</u>. فرض کنید φ تابع پیوسته اکیداً صعودی از $[A,B]$ بروی $[a,b]$ است. فرض کنید α تابعی بطور یکنوا صعودی بر $[a,b]$ بوده و $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است. توابع β و g روی $[A,B]$ را توسط

$$\beta(y)=\alpha(\varphi(y)), \qquad g(y)=f(\varphi(y))$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه $g\in\mathcal{R}(\beta)$ و

$$\int_A^B g\,d\beta = \int_a^b f\,d\alpha$$

<u>اثبات</u>. اگر $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ افرازی دلخواه از $[a,b]$ باشد آنگاه متناظر به P افراز $Q=(y_0,y_1,\dots,y_n)$ از $[A,B]$ با $x_i=\varphi(y_i)$ می‌توان داشت. تمام افرازهای $[A,B]$ به همین طریق حاصل می‌شوند زیرا φ تابعی یک به یک و پوشاست پس قرار می‌دهیم $y=\varphi^{-1}(x)$. با توجه به تعریف تابع g بر $[A,B]$، مقادیر f روی $[x_{i-1},x_i]$ دقیقاً همان مقادیر g روی

$[y_{i-1}, y_i]$ است که در آن $y_{i-1} = \varphi^{-1}(x_{i-1})$ و $y_i = \varphi^{-1}(x_i)$. در نتیجه

$$U(Q,g,\beta)=U(P,f,\alpha) \quad , \quad L(Q,g,\beta)=L(P,f,\alpha)$$

چون $f\in \mathcal{R}(\alpha)$ می‌توان افراز P را چنان انتخاب کرد که مقادیر $U(P,f,\alpha)$ و $L(P,f,\alpha)$ نزدیک به $\int_a^b f\,d\alpha$ به دلخواه باشند. در نتیجه برای $\epsilon>0$ داده شده،

$$\exists P\in \mathcal{P}[a,b] \quad s.t \quad U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\epsilon$$

حال افراز Q متناظر به P از $[A,B]$ را در نظر می‌گیریم داریم

$$U(Q,g,\beta)-L(Q,g,\beta)<\epsilon$$

پس $g\in\mathcal{R}(\beta)$ روی $[A,B]$ و

$$\int_A^B g\,d\beta=\int_a^b f\,d\alpha$$

<u>۹.۸ نتیجه.</u> اگر f و φ روی $[a,b]$ توابعی پیوسته و φ بطور یکنوا روی $[a,b]$ صعودی باشد و $\psi=\varphi^{-1}$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(y))\,d\psi(y)$$

<u>اثبات.</u> با توجه به توضیحات ارائه شده در اثبات قضیه ۸.۸ برای افراز

$$P=(x_0, x_1, \dots, x_n) \qquad x_0=a, \quad x_n=b$$

از $[a,b]$ با قرار دادن

$$y_i=\varphi(x_i) \qquad i=0,1,\dots,n$$

افراز $Q=(y_0, y_1,\dots, y_n)$ که در آن $y_0=\varphi(a)$ و $y_n=\varphi(b)$ از $[\varphi(a),\varphi(b)]$ حاصل می‌شود. قرار می‌دهیم $g(y)=f(\psi(y))$، داریم

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n g(y_i)\left(\psi(y_i)-\psi(y_{i-1})\right)$$

از پیوستگی φ بر $[a,b]$ نتیجه می‌شود که φ بر $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است و بنابراین وقتی $\|P\|\to 0$ داریم $\|Q\|\to 0$. در نتیجه از $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i-x_{i-1})$ داریم

$$\lim_{\|Q\|\to 0}\sum_{i=1}^n g(y_i)(\psi(y_i)-\psi(y_{i-1}))=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(y)\,d\psi(y)$$

و از رابطه (1) نتیجه می‌شود که $\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(y)\,d\psi(y)$ و حکم تمام است.

۹. انتگرال گیری و مشتق گیری

در این بخش کلیه توابع حقیقی در نظر گرفته شده‌اند و هدف بررسی این نکته است که انتگرال گیری و مشتق گیری عکس عمل یکدیگرند. ابتدا بحث را با انتگرال پذیری ریمان آغاز می‌کنیم.

<u>۱.۹ قضیه.</u> فرض کنید $f\in\mathcal{R}$ روی $[a,b]$ و برای هر $a\le x\le b$ قرار دهیم

$$F(x)=\int_a^b f(t)\,dt$$

آنگاه

<u>الف)</u> F روی $[a,b]$ پیوسته است. بعلاوه

<u>ب)</u> اگر f در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد، $x_0\in[a,b]$، آنگاه F در x_0 مشتق‌پذیر است و

$$F'(x_0)=f(x_0)$$

<u>اثبات.</u> چون $f\in\mathcal{R}$ پس کراندار است. فرض کنید

$$|f(t)|\le M \qquad a\le t\le b$$

اگر $a\le x<y\le b$

$$|F(y)-F(x)|=\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\le M(y-x)$$

برای $\varepsilon>0$ داده شده، اگر $|x-y|<\frac{\varepsilon}{M}$، آنگاه

$$|F(y)-F(x)|<\varepsilon$$

پس F بر $[a,b]$ پیوسته است که (الف) را ثابت می‌کند.

برای <u>قسمت (ب)</u>، فرض کنید f در x_0 پیوسته است. به ازای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $\delta>0$ وجود دارد بطوری که اگر $|t-x_0|<\delta$ باشد آنگاه

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon \qquad a\le t\le b$$

بنابراین، اگر $x_0-\delta<s\le x_0\le t<x_0+\delta$ و $a\le s<t\le b$ طبق قضیه ۱.۸ (د)

$$\left|\frac{F(t)-F(s)}{t-s}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{t-s}\int_s^t[f(u)-f(x_0)]\,du\right|<\varepsilon$$

پس $F'(x_0)=f(x_0)$.

۲.۹ قضیه. فرض کنید $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و $g \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشند و α تابعی صعودی یکنوا بر $[a,b]$ است. برای هر $x \in [a,b]$ توابع F و G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t) \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\, d\alpha(t)$$

آنگاه $f \in \mathcal{R}(G)$، $g \in \mathcal{R}(F)$ و $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ است و

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b g(x)\, dF(x)$$

اثبات. چون $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و $g \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ است، طبق قضیه ۲.۸ (الف) $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ و انتگرال $\int_a^b fg\, d\alpha$ وجود دارد. به ازای هر افراز $P \in \mathcal{P}[a,b]$ داریم

$$S(P,f,G) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)\, d\alpha(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t_i)\, g(t)\, d\alpha(t)$$

و

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\, g(t)\, d\alpha(t)$$

بنابراین اگر $M_g = \sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\}$ داریم

$$\begin{aligned}
\left| S(P,f,G) - \int_a^b fg\, d\alpha \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t_i) - f(t)]\, g(t)\, d\alpha(t) \right| \\
&\le M_g \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t_i) - f(t)|\, d\alpha(t) \\
&\le M_g \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [M_i - m_i]\, d\alpha(t) \\
&= M_g\, [U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)]
\end{aligned}$$

چون $f \in \mathcal{R}(\alpha)$، به ازای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P_ε وجود دارد بطوری که برای هر افراز P، $P_\varepsilon \subseteq P$ داریم

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon / M_g$$

پس

$$\left| S(P,f,G) - \int_a^b fg\, d\alpha \right| < M_g \left(\varepsilon / M_g \right) = \varepsilon$$

درنتیجه $f \in \mathcal{R}(G)$ بر $[a,b]$ است و $\int_a^b fg\, d\alpha = \int_a^b f\, dG$.

بطور مشابه ثابت می‌شود که $g \in \mathcal{R}(F)$ روی $[a,b]$ و $\int_a^b fg\, d\alpha = \int_a^b g\, dF$.

اکنون آماده ایم که انتگرال را به عنوان تابعی از بازه شرح دهیم و نتایجی مفید به دست آوریم. از قضیه ۲.۹ حاصل شد که اگر $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشد و α صعودی یکنوا، آنگاه به ازای هر x در $[a,b]$ انتگرال $\int_a^x f\,d\alpha$ وجود دارد و آن را می‌توان به عنوان تابعی از x مورد مطالعه قرار داد. حال اگر در این نتیجه α با تغییر کراندار باشد، با توجه به اینکه α را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع به طور یکنوا صعودی نوشت، مجدداً حکم فوق برای تابع با تغییر کراندار α نیز برقرار است.

۳.۹ قضیه. فرض کنید α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار و $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ باشد. تابع F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x)=\int_a^x f\,d\alpha \qquad x\in[a,b]$$

آنگاه:

الف) F بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است؛

ب) اگر α در $x=x_0$ پیوسته باشد، آنگاه F در x_0 پیوسته است.

ج) درصورتی که α به طور یکنوا بر $[a,b]$ صعودی باشد و α' در هر نقطه از (a,b) موجود بوده و f پیوسته باشد، آنگاه $F'(x)$ وجود دارد و $F'(x)=f(x)\,\alpha'(x)$.

اثبات. نخست فرض کنید α تابعی صعودی بر $[a,b]$ است. با توجه به قضیه

$$(1)\qquad \exists\,\mu\in[m,M] \quad \text{s.t} \quad F(y)-F(x)=\int_x^y f\,d\alpha=\mu[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

که در آن $x,y\in[a,b]$ و $x\neq y$. بنابراین F نیز صعودی است.

حال اگر α با تغییر کراندار باشد بدیهی است که F نیز با تغییر کراندار خواهد بود، که این (الف) را ثابت می‌کند.

ب) اگر α در $x=x_0$ پیوسته باشد، با توجه به (۱)، F نیز در $x=x_0$ پیوسته می‌باشد.

ج) مجدداً رابطه (۱) را بر $x-y$ تقسیم کرده و توجه می‌کنیم که اگر $y\to x$ آنگاه $\mu\to f(x)$ و حکم خواسته شده نتیجه می‌شود.

۴.۹ نتیجه. اگر $f\in\mathcal{R}$ و $g\in\mathcal{R}$ بر $[a,b]$ باشند و برای $a\le x\le b$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad , \qquad G=\int_a^x g(t)\,dt$$

آنگاه F و G بر $[a,b]$ توابعی پیوسته و با تغییر کراندارند. بعلاوه $f\in\mathcal{R}(G)$، $g\in\mathcal{R}(F)$ بر $[a,b]$ و

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dG(x)=\int_a^b g(x)\,dF(x)$$

اثبات. با توجه به (الف) و (ب) قضیه ۳.۹، F و G بر $[a,b]$ با تغییر کراندار و پیوسته هستند. با توجه به قضیه ۲.۹ وجود انتگرالها و دو رابطه خواسته شده با فرض $\alpha(x)=x$ حاصل می‌شوند.

۵.۹ نتیجه. فرض کنید برای $a\le x\le b$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,d\alpha(t)$$

در نقاطی که α' موجود و تابع f پیوسته باشد، داریم

$$F'(x)=f(x)\,\alpha'(x)$$

اثبات. با توجه به قضیه ۷.۸ و قسمت (ج) قضیه ۳.۹ حکم حاصل می‌شود.

۶.۹. قضیه اساسی دوم حساب انتگرال. فرض کنید $f\in\mathcal{R}$ بر $[a,b]$ است و تابع F بر $[a,b]$ چنان تعریف شده باشد که F' در (a,b) موجود بوده و برای هر x در (a,b) داشته باشیم

$$F'(x)=f(x)$$

و فرض کنید $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ وجود داشته و

$$F(a)-\lim_{x\to a^+}F(x)=F(b)-\lim_{x\to b^-}F(x)$$

آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

اثبات. فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. افراز $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ را چنان انتخاب

می‌گیریم که $U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$. داریم

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)\,\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \end{aligned}$$

که در تساوی دوم از قضیه مقدار میانگین برای مشتق در مورد تابع F روی $[x_{i-1},x_i]$ استفاده کرده‌ایم، یعنی

$$\exists\, t_i\in[x_{i-1},x_i] \quad s.t. \quad F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

حال با توجه به قضیه

$$\left|F(b)-F(a)-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\epsilon$$

چون $\epsilon>0$ دلخواه است، داریم

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$$

۷.۹ نتیجه: <u>انتگرال‌گیری جزء به جزء</u>: فرض کنید F و G توابعی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ باشند و $F'=f\in\mathcal{R}$ ، $G'=g\in\mathcal{R}$. آنگاه

$$\int_a^b F(x)\,g(x)dx=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b f(x)\,G(x)dx$$

<u>اثبات</u>. قرار دهید $H(x)=F(x)G(x)$ و قضیه ۹.۹ را برای H و مشتق آن بکار برد. توجه داریم که $H'\in\mathcal{R}$.

۸.۹ . قضیه. اگر f و α توابعی صعودی (یا در حالت کلی‌تر با تغییر کراندار) بر $[a,b]$ باشند و اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f\,d\alpha=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b \alpha\,df$$

<u>اثبات</u>. برای افراز $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ با $x_0=a$ ، $x_n=b$ از $[a,b]$ ، نقطه t_i دلخواه را در $[x_{i-1},x_i]$ برای $i=1,2,\ldots,n$ با $t_0=a$ ، $t_{n+1}=b$ انتخاب می‌کنیم بطوری که

$$
\begin{aligned}
S(P,f,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})] \\
&= f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\sum_{i=1}^{n+1}\alpha(x_{i-1})\,[f(t_i)-f(t_{i-1})] \\
&= f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-S(Q,\alpha,f)
\end{aligned}
$$

زیرا $t_{i-1} \le x_{i-1} \le t_i$. حال اگر $\|P\| \to 0$ آنگاه $\|Q\| \to 0$ و وقتی $\|P\| \to 0$ داریم $S(P,f,\alpha) \to \int_a^b f\,d\alpha$. پس $\lim\limits_{\|Q\|\to 0} S(Q,\alpha,f)$ موجود است و به $\int_a^b \alpha\,df$ وقتی $\|Q\| \to 0$ همگرا است . در نتیجه حکم برقرار است .

۱۵. قضیه های مقدار میانگین

انتگرالها یکی از ارکان اصلی بسیاری از مسائل ریاضیات است. اما توانایی محاسبه دقیق مقادیر انتگرالها، گاهی اوقات امکان پذیر نیست و حتی در مواردی نیازی به این محاسبه دیده نمی‌شود و تنها یک تخمین از انتگرال کفایت می‌کند و احتیاجی به مقدار دقیق آن نمی‌باشد. قضایای مقدار میانگین برای یافتن تخمینهای مورد نیاز بکار برده می‌شوند. قبلا در بخش تناهی بر قضیه اول مقدار میانگین برای انتگرال داشتیم و نتایجی از آن مورد بررسی قرار گرفت. در این بخش ابتدا قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرال R.S. مورد بحث قرار می‌گیرد و سپس قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرال ریمان را بررسی می‌کنیم و سپس به قضیه مقدار میانگین بونه (بونت) می‌پردازیم.

۱۵.۱ قضیه. فرض کنید α تابعی پیوسته بر $[a,b]$ و f تابعی بطور یکنوا صعودی بر $[a,b]$ است. آنگاه

$$\exists c\in[a,b] \quad s.t \quad \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a)\int_a^c d\alpha(x) + f(b)\int_c^b d\alpha(x)$$

اثبات. با توجه به قضیه ۸.۹ داریم

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b \alpha(x)\,df(x)$$

با توجه به قضیهٔ عدد c در $[a,b]$ برای انتگرال در طرف راست رابطه بالا وجود دارد بطوریکه

$$\int_a^b \alpha(x)\, df(x) = \alpha(c)\, [f(b) - f(a)]$$

پس

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - f(b)\alpha(c) + f(a)\alpha(c)$$
$$= f(a)\, [\alpha(c) - \alpha(a)] + f(b)\, [\alpha(b) - \alpha(c)]$$
$$= f(a) \int_a^c d\alpha(x) + f(b) \int_c^b d\alpha(x)$$

و حکم تمام است.

قضیه ۱.۱۰ را با عنوان قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرال R.S. یادآوری خواهیم کرد.

۲.۱۰. قضیه: <u>قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرال‌های ریمان</u>. فرض کنید g تابعی پیوسته و f تابعی صعودی یکنوا بر $[a,b]$ باشند. همچنین A و B دو عدد حقیقی باشند که

$$B \geq \lim_{x\to b^-} f(x) \quad , \quad A \leq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

آنگاه،

$$\exists c \in [a,b] \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)\,dx = A\int_a^c g(x)\,dx + B\int_c^b g(x)\,dx$$

<u>اثبات</u>. قرار می‌دهیم $\alpha(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ آنگاه $\alpha' = g$. طبق قضیه ۱.۱۰

$$\exists c \in [a,b] \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c d\alpha(x) + f(b)\int_c^b d\alpha(x)$$
$$= f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx$$

که در آن $B = f(b)$ ، $A = f(a)$.

حال اگر A و B دو عدد حقیقی باشند بطوری که $A \leq f(a^+)$ و $B \geq f(b^-)$، می‌توان f را در نقطه‌های انتهایی a و b مجدداً تعریف کرد که دارای مقادیر $f(a) = A$ و $f(b) = B$ باشد. f اصلاح شده بر $[a,b]$ صعودی است و تغییر مقدار f در تعداد متناهی نقطه بر مقدار انتگرال ریمان آن اثری ندارد. باید دقت کرد که c وابسته به مقادیر A و B است.

قضیه ۲.۱۰ را قضیه مقدار میانگین وایراشتراوس نیز می‌نامند.

۳.۱۰ قضیه. با همان فرضیات قضیه ۲.۱۰، اگر به ازای هر x در $[a,b]$، $f(x)\geq 0$، آنگاه به ازای نقطه‌ای مانند c در $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = B\int_c^b g(x)\,dx$$

و اگر روی $[a,b]$، $f(x)\leq 0$ آنگاه به ازای نقطه‌ای مانند c در $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = A\int_a^c g(x)\,dx$$

اثبات. با انتخاب $A=0$ در قضیه ۲.۱۰ حکم حاصل می‌شود.

قضیه ۳.۱۰ را قضیه مقدار میانگین دوم بونه (بونت) نامند. قضیه ۲.۱۰ بصورت عمومی‌تر آن در مثال ۴.۱۰ ارائه شده است.

۴.۱۰ مثال. اگر $g\in\mathcal{R}$ روی $[a,b]$ و f تابعی یکنوا و نامنفی روی $[a,b]$ باشد آنگاه

الف) اگر f بطور یکنوا غیرصعودی باشد آنگاه $\exists c\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b fg=f(a)\int_a^c g$

ب) اگر f بطور یکنوا غیرنزولی باشد آنگاه $\exists c\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b fg=f(b)\int_c^b g$

حل. الف). اگر $a=b$ آنگاه حکم بدیهی است. فرض کنید $a<b$ و $f\geq 0$ تابعی بطور یکنوا غیرصعودی بر $[a,b]$ است و $P\in\mathcal{P}[a,b]$، $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ است. قرار می‌دهیم

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} g(x)\quad,\quad m_i=\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} g(x)$$

و فرض کنید t_i نقطه‌ای دلخواه در زیربازه $[x_{i-1},x_i]$ است و $t_1=a$. در این صورت

$$m_i\Delta x_i=m_i(x_i-x_{i-1})\leq\int_{x_{i-1}}^{x_i} g\leq M_i(x_i-x_{i-1})=M_i\Delta x_i$$

و

$$m_i\Delta x_i\leq g(t_i)\Delta x_i\leq M_i\Delta x_i$$

با جمع‌بندی نامساوی‌های فوق برای $i=1,2,\ldots,n$ داریم

$$\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\leq\int_a^b g\leq\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$$

و

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

بنابراین

$$\left|\int_a^b g - \sum g(t_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$
$$= U(P,g) - L(P,g)$$
$$= \omega(P,g)$$

حال چون $\int_a^x g(t)dt$ روی $[a,b]$ تابعی پیوسته است بنابراین بر $[a,b]$ کراندار می‌باشد. فرض کنید M' و m' به ترتیب سوپریمم و اینفیمم آن بر $[a,b]$ است. در نتیجه

$$m' - \omega(P,g) \le \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta x_i \le M' + \omega(P,g)$$

فرض کنید $u_i = g(t_i)\Delta x_i$ و $v_i = f(t_i)$ آنگاه طبق (لم آبل)

$$f(a)\,[m' - \omega(P,g)] \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)g(t_i)\Delta x_i \le f(a)\,[M' + \omega(P,g)]$$

چون $g \in R$ روی $[a,b]$ و $f \in R$ روی $[a,b]$ (f بطور یکنوا است) بنابراین

$fg \in R$ روی $[a,b]$. وقتی $\|P\| \to 0$ داریم $\omega(P,g) \to 0$ و

$$f(a)m' \le \int_a^b fg \le f(a)M'$$

پس با فرض $f(a) \neq 0$

$$m' \le \frac{\int_a^b fg}{f(a)} \le M'$$

به دلیل پیوستگی تابع $\int_a^x g(t)\,dt$ و تعریف m'، M'، عدد c در $[a,b]$ وجود دارد بطوری که

$$\frac{\int_a^b fg}{f(a)} = \int_a^c g(t)\,dt$$

یعنی

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g$$

حل قسمت (ب) مشابه است.

در تعویض ترتیب انتگرال‌گیری و انتگرال‌گیری از توابع با مقدار برداری را بطور اختصار مورد توجه قرار می‌دهیم. بحث تکمیلی آن در سرفصل آنالیز ریاضی ۳ می‌تواند بیان شود.

۱۱. انتگرالهای مکرر و انتگرال‌گیری از توابع با مقادیر برداری.

۱.۱۱ تعریف. فرض کنید $f_1, \dots, f_k$ توابعی حقیقی تعریف شده بر $[a,b]$ باشند و $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$ نگاشت $[a,b]$ بتوی $\mathbb{R}^k$ است. اگر α تابعی بطور یکنوا صعودی بر $[a,b]$ باشد گوییم $\mathbf{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ است درصورتیکه $f_j \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ برای $j = 1, \dots, k$. در این حالت

$$\int_a^b \mathbf{f}\, d\alpha = \left(\int_a^b f_1\, d\alpha, \dots, \int_a^b f_k\, d\alpha \right)$$

به عبارت دیگر $\int_a^b \mathbf{f}\, d\alpha$ نقطه‌ای از $\mathbb{R}^k$ است که مولفه jام آن $\int_a^b f_j\, d\alpha$ می‌باشد.

به سادگی می‌توان نشان داد که قضیه ۱.۸ (الف) و (ج)، قضیه ۲.۸، قضیه ۷.۸، قضیه ۱.۹ و قضیه ۶.۹ نیز برای توابع برداری $\mathbf{f}$ در $\mathbb{R}^k$ نیز برقرارند. به عنوان مثال قضیه ۶.۹ در فرم برداری آن به صورت زیر بیان می‌شود.

۲.۱۱ قضیه. اگر $\mathbf{f}$ و $\mathbf{F}$ نگاشتهای $[a,b]$ بتوی $\mathbb{R}^k$ باشند و اگر $\mathbf{f}$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$، آنگاه

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

قضیه ۳.۸ (ب) در فرم تابع با مقادیر برداری به صورت زیر بیان و اثبات می‌گردد.

۳.۱۱ قضیه. اگر $\mathbf{f}$ نگاشت $[a,b]$ بتوی $\mathbb{R}^k$ بوده و $\mathbf{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$ که در آن α تابع بطور یکنوا صعودی بر $[a,b]$ است. آنگاه $|\mathbf{f}| \in \mathcal{R}(\alpha)$ و

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}\, d\alpha \right\| \le \int_a^b \|\mathbf{f}\|\, d\alpha$$

اثبات. فرض کنید $\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ که در آن f_j توابع مولفه‌ای $\underline{f}$ تعریف شده بر $[a,b]$ توی $\mathbb{R}$ می‌باشند. آنگاه

$$\|\underline{f}\| = (f_1^2 + \dots + f_k^2)^{1/2}$$

طبق قضیه ۳.۸ (الف)، $f_j^2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ بنابراین جمع آنها نیز انتگرال‌پذیر R.S. است. چون تابع $g(x) = x^2$ پیوسته است پس تابع ریشه $h(x) = \sqrt{x}$ روی $[0,M]$ برای هر عدد حقیقی M نیز پیوسته است. بنابراین $\|\underline{f}\|$ نیز انتگرال‌پذیر ریمان استیلجس است.

حال قرار می‌دهیم $\underline{y} = (y_1, \dots, y_k)$ که در آن $y_j = \int_a^b f_j \, d\alpha$. درنتیجه $\underline{y} = \int_a^b \underline{f} \, d\alpha$ و

$$\|\underline{y}\|^2 = \sum_{j=1}^{k} y_j^2 = \sum_{j=1}^{k} y_j \int_a^b f_j \, d\alpha = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{k} y_j f_j\right) d\alpha$$

طبق نامساوی کشی - شوارتز برای هر $a \le t \le b$

$$\sum_{j=1}^{k} y_j f_j(t) \le \|\underline{y}\| \, \|\underline{f}(t)\|$$

طبق قضیه ۱.۸ (ب)

$$\|\underline{y}\|^2 \le \|\underline{y}\| \int_a^b \|\underline{f}\| \, d\alpha$$

حال اگر $\underline{y} = 0$ حکم بدیهی است. اگر $\underline{y} \neq \underline{0}$ آنگاه با تقسیم رابطه بالا بر $\|\underline{y}\|$ داریم

$$\|\underline{y}\| \le \int_a^b \|\underline{f}\| \, d\alpha$$

یعنی

$$\left\| \int_a^b \underline{f} \, d\alpha \right\| \le \int_a^b \|\underline{f}\| \, d\alpha$$

و حکم تمام است.

۴.۱۱ قضیه. فرض کنید $R = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \ c \le y \le d\}$ مستطیلی در صفحه باشد و α بر $[a,b]$ و β بر $[c,d]$ توابعی با تغییر کراندار باشند و فرض کنید تابع $f(x,y)$ بر ناحیه R پیوسته است. توابع F و G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای $(x,y) \in R$

$$F(y) = \int_a^b f(x,y) \, d\alpha(x) \quad , \quad G(x) = \int_c^d f(x,y) \, d\beta(y)$$

آنگاه $F\in \mathcal{R}(\beta)$ بر $[c,d]$ و $G\in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ و داریم

$$\int_c^d F(y)\,d\beta(y)=\int_a^b G(x)\,d\alpha(x)$$

<u>اثبات</u>. فرض کنید β بر $[c,d]$ بطور یکنوا صعودی است. چون R مجموعه‌ای فشرده است پس f بر R پیوسته یکنواخت است. پس به ازای $\epsilon>0$ داده شده، $\delta>0$ وجود دارد (به عنوان تابعی از فقط ϵ) بطوری که به ازای نقاط (x,y) و (x',y') در R که در شرط $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}<\delta$ صدق کنند داریم

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\epsilon$$

حال اگر $|y-y'|<\delta$ آنگاه

$$\begin{aligned}|F(y)-F(y')| &= \left|\int_a^b f(x,y)\,d\alpha(x)-\int_a^b f(x,y')\,d\alpha(x)\right|\\ &\le \int_a^b |f(x,y)-f(x,y')|\,d\alpha(x)\\ &\le \epsilon\,[\alpha(b)-\alpha(a)]\end{aligned}$$

بنابراین F بر $[c,d]$ پیوسته است. در نتیجه $F\in \mathcal{R}(\beta)$ بر $[c,d]$ است. بطور مشابه $G\in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ است. حال اگر α و β با تغییر کراندار باشند آنها را می‌توان به صورت

$$\alpha=\alpha_1-\alpha_2 \qquad \beta=\beta_1-\beta_2$$

نوشت که در آن α_1 و α_2 توابع یکنوا صعودی بر $[a,b]$ و β_1 و β_2 توابع یکنوا صعودی بر $[c,d]$ می‌باشند. حال حکم طبق ۲.۸ برای α و β صادق است و در این حالت نیز $F\in \mathcal{R}(\beta)$ بر $[c,d]$ و $G\in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ می‌باشند.

برای اثبات تساوی دو انتگرال، کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن α بر $[a,b]$ صعودی یکنوا و β بر $[c,d]$ بطور یکنوا صعودی هستند. چون F بر $[c,d]$ و G بر $[a,b]$ پیوسته‌اند پس پیوسته یکنواخت می‌باشند. بنابراین برای $\epsilon>0$ داده شده δ مثبت وجود دارد بطوری که به ازای نقاط $z=(x,y)$ و $z'=(x',y')$ در R که در نامساوی $\|z-z'\|<\delta$ صدق کنند، داریم

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\epsilon$$

طبق قضیه ارشمیدس، عدد طبیعی n وجود دارد بطوری که

$$\frac{d-c}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{b-a}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

حال هر یک از بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. در نتیجه R به n^2 زیرمستطیل با مساحت مساوی تقسیم می‌گردد. به ازای $i=0,1,2,\ldots,n$ قرار می‌دهیم

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \qquad y_i = c + \frac{i(d-c)}{n}$$

داریم

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,d\beta(y)\,d\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)\,d\beta(y)\,d\alpha(x)$$

حال قضیه اول مقدار میانگین را دو بار در طرف راست تساوی بالا بکار می‌بریم. مجموع مضاعف به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i', y_j')[\beta(y_{j+1})-\beta(y_j)][\alpha(x_{i+1})-\alpha(x_i)]$$

که در آن (x_i', y_j') در مستطیل R_{ij} با رأس‌های متقابل (x_i, y_j)، (x_{i+1}, y_{j+1}) قرار دارد. به همین نحو، نتیجه می‌شود که

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i'', y_j'')[\beta(y_{j+1})-\beta(y_j)][\alpha(x_{i+1})-\alpha(x_i)]$$

که در آن $(x_i'', y_j'') \in R_{ij}$. اما

$$|f(x_i', y_j') - f(x_i'', y_j'')| < \epsilon$$

در نتیجه

$$\left|\int_a^b G(x)\,d\alpha(x) - \int_c^d F(y)\,d\beta(y)\right|$$
$$< \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} [\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)] \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)]$$
$$= \epsilon[\beta(d)-\beta(c)][\alpha(b)-\alpha(a)]$$

چون $\epsilon > 0$ دلخواه است پس

$$\int_a^b G(x)\,d\alpha(x) = \int_c^d F(y)\,d\beta(y)$$

از قضیه ۲.۹ و ۴.۱۱ نتیجه زیر برای انتگرال‌های ریمان حاصل می‌گردد:

۵.۱۱ نتیجه. فرض کنید f بر مستطیل $[a,b]\times[c,d]$ پیوسته باشد. هرگاه $g \in R$ بر $[a,b]$ و $h \in R$ بر $[c,d]$ باشد آنگاه

$$\int_a^b \left[\int_c^d g(x)\,h(y)\,f(x,y)\,dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b g(x)\,h(y)\,f(x,y)\,dx\right]dy$$

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\alpha(x)=\int_a^x g(u)\,du \qquad a\le x\le b$$

$$\beta(y)=\int_c^y h(v)\,dv \qquad c\le y\le d$$

بنابراین α بر $[a,b]$ و β بر $[c,d]$ توابعی با تغییر کراندارند و قرار می‌دهیم

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,d\alpha(x)$$

$$G(x)=\int_c^d f(x,y)\,d\beta(y)$$

طبق قضیه ۴.۱۱، $F\in\mathcal{R}(\beta)$ بر $[c,d]$ و $G\in\mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ و

$$\int_c^d F(y)\,d\beta(y)=\int_a^b G(x)\,d\alpha(x)$$

اما $d\alpha(x)=g(x)\,dx$ و $d\beta(y)=h(y)\,dy$ پس با جاگذاری F و G در رابطه‌ی بالا داریم

$$\int_c^d\left[\int_a^b g(x)\,h(y)\,f(x,y)\,dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d g(x)\,h(y)\,f(x,y)\,dy\right]dx$$

و حکم تمام است.