۸. یادآوری از دنباله‌ها و سری‌های عددی

۱.۸. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط (یا اعداد حقیقی) باشد آنگاه به ازای هر عدد طبیعی n، جمله s_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

s_n را مجموع جزئی n جمله $a_1, a_2, \ldots, a_n$ نامیم. مجموع نامتناهی

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

را با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش داده و آن را یک سری نامتناهی از اعداد مختلط (حقیقی) نامیم.

اگر مجموع‌های جزئی دنباله $\{a_n\}$ را تشکیل دهیم در این صورت دنباله $\{s_n\}$ حاصل می‌شود که آن را دنباله جمع‌های جزئی سری $\sum_1^{\infty} a_n$ نامیم.

اگر دنباله $\{s_n\}$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_1^{\infty} a_n$ را همگرا و در غیر این صورت واگرا گوئیم.

اگر دنباله $\{s_n\}$ همگرا باشد و $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ می‌نویسیم $\sum_1^{\infty} a_n = s$.

۲.۸. محک کشی. سری $\sum_1^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall m > n \geq N, \ \left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| < \epsilon$$

اثبات. فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله مجموع‌های جزئی سری $\sum_1^{\infty} a_n$ است. با توجه به کامل بودن اعداد مختلط، دنباله $\{s_n\}$ همگرا است اگر و تنها اگر کشی باشد. یعنی سری $\sum_1^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ s.t. \forall m > n \geq N, \ |s_m - s_n| < \epsilon$$

یعنی $|s_m - s_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| < \epsilon$.

۳.۸. نتیجه. اگر سری $\sum_1^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

اثبات. در شرط کشی، فرض کنید $m = n+1$ آنگاه $|a_{n+1}| < \epsilon$ بنابراین $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$،

۴.۸ توضیح. عکس نتیجه ۲.۸ برقرار نیست. یعنی سری‌های واگرایی وجود دارند که در آنها $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. به عنوان مثال برای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ اما سری واگرا است. زیرا برای $m>n$

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$S_m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{m}$$

$$S_m - S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m} > \frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m} = \frac{m-n}{m}$$

اگر $m=2n$ باشد آنگاه

$$S_m - S_n > \frac{2n-n}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه دنباله $\{S_n\}$ کشی نیست پس سری $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است.

۵.۸. آزمون مقایسه‌ای.

الف) فرض کنید دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در شرط $\exists N_0,\ \forall n \geq N_0,\ |a_n| \leq b_n$ صدق کنند. اگر سری $\sum_1^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_1^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ب) فرض کنید دنباله‌های $\{c_n\}$ و $\{d_n\}$ از اعداد مثبت داده شده‌اند و $\forall n,\ c_n \leq d_n$. اگر $\sum_1^{\infty} c_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_1^{\infty} d_n$ نیز واگرا است.

اثبات. الف). فرض کنید $\sum_1^{\infty} b_n$ همگرا است. طبق قضیه کشی

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ s.t\ \forall m>n \geq N_1,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} b_i\right| < \varepsilon$$

قرار می‌دهیم $N=\max\{N_0, N_1\}$. برای $m>n\geq N$ داریم

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| < \sum_{i=n+1}^{m} b_i < \varepsilon$$

طبق قضیه ۲.۸، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب) فرض کنید $\sum_1^{\infty} d_n$ واگرا نباشد. یعنی فرض کنید $\sum_1^{\infty} d_n$ همگرا است. طبق (الف) $\sum_1^{\infty} c_n$ نیز همگرا خواهد شد که با فرض داده شده متناقض است. پس سری $\sum_1^{\infty} d_n$ واگرا است.

۶.۸ قضیه. هر سری از اعداد نامنفی همگرا است، درصورتی که دنباله مجموعهای جزئی آن کراندار باشد.

اثبات. فرض کنید $\sum_1^\infty a_n$ یک سری از اعداد نامنفی است. دنباله جمعهای جزئی این سری یعنی دنباله $\{s_n\}$ که در آن

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

یک دنباله صعودی است. حال اگر $\{s_n\}$ کراندار باشد، دنباله‌ای صعودی و کراندار خواهد شد پس همگرا است و درنتیجه $\sum_1^\infty a_n$ همگرا است.

۷.۸ قضیه. سری هندسی. سری $\sum_{n=0}^\infty x^n$ همگرا است هرگاه $|x|<1$ و واگرا است هرگاه $|x|\geq 1$.

اثبات. دنباله جمعهای جزئی سری را تشکیل می‌دهیم

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

$$x s_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1}$$

$$\Rightarrow s_n - x s_n = 1 - x^{n+1} \Rightarrow s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad x \neq 1$$

و برای $|x|<1$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

پس $\sum_{n=0}^\infty x^n$ برای $|x|<1$ همگرا است. اگر $|x|\geq 1$ آنگاه جمله عمومی سری حدی مخالف صفر دارد پس سری دراین حالت واگرا است.

۸.۸ سریهای تناوبی. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد آنگاه $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} a_n$ را یک سری مثبت و منفی یا سری تناوبی نامیم.

۹.۸ قضیه لایب نیتز. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد بطوری که

الف) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$

ب) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

آنگاه سری تناوبی $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n$ همگرا است.

۱۰.۸ تعریف. سری $\sum_1^\infty a_n$ را همگرای مطلق نامیم هرگاه $\sum_1^\infty |a_n|$ همگرا باشد.

به سادگی میتوان دید که همگرایی مطلق، همگرایی را نتیجه می دهد اما همگرایی، همگرایی مطلق را نتیجه نمی دهد. به عنوان مثال سری هارمونیک $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ طبق قضیه ۹.۸ همگرا است ولی همگرای مطلق نیست.

۹. همگرایی کراندار سریهای تابعی

۱.۹ تعاریف:

اگر (f_n) دنباله‌ای از توابع حقیقی (مختلط) تعریف شده بر مجموعه E باشند آنگاه سری تابعی $\sum_1^\infty f_n$ توسط دنباله مجموعه‌های جزئی (S_n) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= f_1(x) \\
S_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\
S_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \qquad \forall x \in E \\
&\vdots \\
S_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

فرض کنید f تابعی حقیقی (مختلط) تعریف شده بر E است. گوییم $\sum_1^\infty f_n$ همگرای نقطه‌وار به f روی E است هرگاه

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x) \qquad \forall x \in E$$

به عبارت دیگر برای هر $x \in E$ دنباله $\{S_n(x)\}$ همگرای نقطه‌وار به $f(x)$ باشد.

حال اگر $\sum_1^\infty f_n$ همگرای نقطه‌وار به f روی E باشد و اگر عددی مانند K وجود داشته باشد بطوری که برای $x \in E$ و $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\left| \sum_{j=1}^n f_j(x) \right| \le K$$

گوییم $\sum_1^\infty f_n$ بطور کراندار همگرا است.

به سادگی می‌توان دید که $\sum_1^\infty f_n$ بطور کراندار همگرا است هرگاه دنباله جمع‌های جزیی آن همگرای کراندار باشد.

<u>۲.۹ قضیه همگرایی کراندار برای سری‌ها</u>. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر ریمان بر فاصله $[a,b]$ است و فرض کنید سری $\sum f_n$ روی $[a,b]$ همگرای کراندار است و دارای مجموع انتگرال‌پذیر ریمان باشد. آنگاه

$$\int_a^b \sum_{n=1}^\infty f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n(x)\,dx$$

<u>اثبات</u>. به ازای هر n داریم

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x)\,dx$$

حال فرض کنید $n\to\infty$ و حکم از ۲.۲ حاصل می‌شود.

<u>۳.۹. قضیه</u>. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ است و f_n' روی $[a,b]$ برای هر n پیوسته است و سری $\sum_1^\infty f_n'$ روی $[a,b]$ همگرای کراندار بوده و دارای جمع پیوسته باشد. نهایتاً فرض کنید عدد c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\sum_1^\infty f_n(c)$ همگرا است. آنگاه $\sum_1^\infty f_n$ روی $[a,b]$ همگرای نقطه‌وار است و دارای جمع مشتق‌پذیر می‌باشد و داریم

$$\left(\sum_1^\infty f_n\right)' = \sum_1^\infty f_n'$$

<u>اثبات</u>. با توجه به قضیه ۵.۲ واضح است.

قضیه همگرایی کراندار (۲.۹) دارای کاربردهای بسیار با اهمیتی است که در مبحث انتگرال‌های ریمانی نا سره و مجموعه‌های با اندازه صفر مطرح می‌گردند. در قسمت باقیمانده بخش حاضر به یکی از این کاربردها در سری نمایش دهنده $\ln(1+x)$ می‌پردازیم.

۴.۹. در این قسمت نشان می‌دهیم که برای $-1 < x \le 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

دنباله توابع (f_n) بر فاصله $[-1,1]$ تعریف شده توسط

$$f_n(t)=\begin{cases} 1-t+t^2-t^3+\cdots+(-t)^{n-1} = \dfrac{1-(-t)^n}{1+t} & -1<t\le 1 \\ \dfrac{1}{2} & t=-1 \end{cases}$$

برای هر n، تابع f_n در هر نقطه از $[-1,1]$ پیوسته است بجز در -1. فرض کنید $x\in(-1,1]$ و I فاصله‌ای با نقاط انتهایی 0 و x باشد.

چون تابع f و هر تابع f_n در هر نقطه از فاصله I بجز احتمالاً در -1 پیوسته است، بنابراین روی I انتگرال‌پذیر ریمان هستند. بعلاوه، اگر $x \ge 0$ آنگاه برای $n\in\mathbb{Z}^+$ و $t\in I$ داده شده، داریم $0 \le f_n(t) \le 1$ و اگر $x<0$ آنگاه برای $n\in\mathbb{Z}^+$ و $t\in I$ داده شده، داریم

$$0 \le f_n(t) \le \frac{1}{1+x}$$

حال با توجه به قضیه کرانداری همگرایی برای (f_n) روی I داریم وقتی $n\to\infty$:

$$\int_0^x f_n \to \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+x)$$

اما برای هر n داریم

$$\int_0^x f_n = \int_0^x \left(1-t+t^2-\cdots+(-t)^{n-1}\right)dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}x^j}{j}$$

پس وقتی $n\to\infty$ داریم

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}x^j}{j} \to \ln(1+x)$$

۵.۹. جمع برخی از سری‌های خاص:

در مثال ۳.۱ دیدیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ به ازای هر θ همگرا است. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin n\theta}{n}$ به ازای هر θ همگرا است؛

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ همگرا است هرگاه θ مضرب زوجی از π نباشد و
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos n\theta}{n}$ همگرا است هرگاه θ مضرب فردی از π نباشد.
حال می‌خواهیم مجموع سریهای فوق را بدست آوریم. واضح است که برای $|x|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\cos n\theta = \frac{\cos\theta - x}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

وقتی θ مضرب زوجی از π نباشد، قضیه همگرایی کراندار ۲.۹ را بکار می‌بریم، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{n-1}\cos n\theta\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\cos n\theta\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{\cos\theta - x}{1-2x\cos\theta+x^2}\,dx$$

پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos\theta)$$

بطور مشابه برای $|x|<1$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\sin n\theta = \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

پس برای هر θ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{n-1}\sin n\theta\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\sin n\theta\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,dx$$

پس برای محاسبه مقدار سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

نیاز به محاسبه انتگرال زیر است:

$$\int_0^1 \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,dx$$

اگر $0<\theta<2\pi$ مقدار این انتگرال برابر $(\pi-\theta)/2$ است. وقتی $\theta=\pi$ مقدار انتگرال صفر است. پس فرض کنید $\theta\neq\pi$ داریم

$$\int_0^1 \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin\theta}{(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,dx$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \tan^{-1}(\cot\theta)$$
$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

با بررسی هر یک از حالتهای $0<\theta<\pi$ و $\pi<\theta<2\pi$ بطور مجزا، دیده می‌شود که مقدار عبارت آخر

برابر $(\pi-\theta)/2$ است. بنابراین برای $0<\theta<2\pi$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$$

۱۵ همگرایی یکنواخت سری‌های تابعی

۱.۱۵ تعریف. سری تابعی $\sum_{1}^{\infty} f_n$ تعریف شده بر E بطور یکنواخت به تابع f همگرا است هرگاه دنباله‌ی جمع‌های جزئی سری یعنی (S_n) بطور یکنواخت بر روی E به تابع f همگرا باشد.

۲.۱۵ قضیه. اگر f_n به ازای هر عدد طبیعی n تابعی پیوسته بر مجموعه E باشد و $\sum_{1}^{\infty} f_n$ روی E بطور یکنواخت به تابع f همگرا شود آنگاه f روی E پیوسته است.

اثبات. دنباله (S_n) از توابع پیوسته روی E را تشکیل می‌دهیم. چون $\sum_{1}^{\infty} f_n$ بطور یکنواخت به تابع f روی E همگرا است پس (S_n) روی E به تابع f همگرای یکنواخت است در نتیجه f بر E پیوسته است (طبق نتیجه ۳.۱.۵)

۳.۱۵ قضیه دینی برای سری‌ها. فرض کنید سری تابعی $\sum_{1}^{\infty} f_n$ از توابع پیوسته و نامنفی بر $[a,b]$ بطور نقطه‌وار به تابع پیوسته f همگرا باشد. آنگاه همگرایی فوق یکنواخت است.

۴.۱۵ قضیه. فرض کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a,b]$ که در آن α تابعی صعودی بر $[a,b]$ است. فرض کنید $\sum_{1}^{\infty} f_n$ بطور یکنواخت بر $[a,b]$ به تابع f همگرا است آنگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ و

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,d\alpha$$

اثبات. از $\sum_{1}^{\infty} f_n \xrightarrow{u} f$ روی $[a,b]$ نتیجه می‌شود که دنباله مجموع‌های جزئی (S_n) نیز بر $[a,b]$ به تابع f همگرای یکنواخت است و با توجه به اینکه برای هر n، $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$

نتیجه می‌شود که $s_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ ، $\forall n$. طبق قضیه ۴.۲.۵ ، f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان استیلجس است و

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f\,d\alpha$$

از طرفی

$$\int_a^b s_n\,d\alpha = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)\,d\alpha(x)$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f\,d\alpha$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b \sum_1^{\infty} f_n\,d\alpha$$

۵.۱۰ <u>قضیه</u>. فرض کنید f_n به ازای هر عدد طبیعی n بر $[a,b]$ تابعی مشتق‌پذیر است و $\sum_1^\infty f_n$ حداقل در یک نقطه از فاصله $[a,b]$ همگرا باشد. اگر $\sum_1^\infty f_n'$ بر $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه $\sum_1^\infty f_n$ بر $[a,b]$ بطور یکنواخت به تابعی چون f همگرا است و

$$\sum_1^\infty f_n' = f'$$

<u>اثبات</u>. با توجه به فرضیات قضیه، برای دنباله جمعهای جزئی سری (S_n) مفروضات قضیه ۴.۲.۵ برقرار است. در نتیجه دنباله (S_n) بر $[a,b]$ به تابع f همگرای یکنواخت است و

$$\lim_{n\to\infty} S_n'(x) = f'(x) \qquad \forall x\in[a,b]$$

پس $\sum_1^\infty f_n$ به f همگرای یکنواخت بر $[a,b]$ است و داریم

$$f' = \lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n' = \sum_1^\infty f_n'$$

۶.۱۰ <u>آزمون کشی برای سریهای تابعی</u>. سری تابعی $\sum_1^\infty f_n$ بر E همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگر

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists N=N(\epsilon)\in \mathbb{N} \ \text{s.t} \ \forall m>n\geq N, \forall x\in E;\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right|<\epsilon$$

<u>اثبات:</u> فرض کنید شرط بیان شده برقرار است. بنابراین

$$\forall \epsilon>0 \ \exists N\in \mathbb{N} \ \text{s.t} \ \forall m>n\geq N,\ \forall x\in E,\ \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right|<\epsilon$$

اما

$$S_m(x)-S_n(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x)-\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$
$$=\sum_{n+1}^{m} f_i(x)$$

پس

$$|S_m(x)-S_n(x)|<\epsilon$$

یعنی دنباله (S_n) در شرط کشی برای دنباله‌های توابع صدق می‌کند. پس (S_n) همگرای یکنواخت است. در نتیجه $\sum_1^\infty f_n$ همگرای یکنواخت می‌باشد.

برعکس، با توجه به قضیه ۵.۴ واضح است.

<u>۷.۱۰ آزمون مقایسه‌ای وایرشتراس.</u> فرض کنید (f_n) و (g_n) دنباله‌هایی از توابع تعریف شده بر مجموعه E باشند، بطوری که

$$\forall n,\quad |f_n|\leq g_n$$

و $\sum_1^\infty g_n$ روی E همگرای یکنواخت است. آنگاه $\sum_1^\infty f_n$ نیز روی E همگرای یکنواخت است.

<u>اثبات:</u> به ازای هر $x\in E$ و هر $n\in\mathbb{N}$ داریم

$$|f_n(x)|\leq g_n(x)$$

چون $\sum_1^\infty g_n(x)$ همگراست، همگرایی (مطلق) سری $\sum_1^\infty f_n(x)$ از آزمون مقایسه‌ای حاصل می‌شود. بنابراین $\sum_1^\infty f_n$ روی E همگرای نقطه‌وار است. حال به ازای هر $x\in E$ و هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)-\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right|\leq\sum_{j=n+1}^{\infty}|f_j(x)|\leq\sum_{j=n+1}^{\infty} g_j(x)$$

بنابراین

$$\sup \left| \sum_{j=1}^{\infty} f_j - \sum_{j=1}^{n} f_j \right| \leq \sup \left| \sum_{j=1}^{\infty} g_j - \sum_{j=1}^{n} g_j \right|$$

حال از همگرایی یکنواخت $\sum g_n$ نتیجه می‌شود که وقتی $n \to \infty$،

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \sum_{j=1}^{\infty} f_j - \sum_{j=1}^{n} f_j \right| = 0$$

پس $\sum_{1}^{\infty} f_n$ همگرای یکنواخت روی E است.

۸.۱۰ <u>قضیه همگرایی قطع شده (آزمون M- وایراشتراوس).</u> اگر $\{M_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد بطوری که

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$$

و اگر سری $\sum_{1}^{\infty} M_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{1}^{\infty} f_n$ روی E همگرای یکنواخت است.

<u>اثبات.</u> از قضیه ۷.۱۰ به روشنی حکم حاصل می‌گردد. در ضمن بعنوان کاربردی از آزمون کشی ۶.۱۰، برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\left| \sum_{j=n+1}^{m} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} M_j$$

چون $\sum_{1}^{\infty} M_n$ همگراست پس کشی می‌باشد در نتیجه

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall m > n \geq N, \forall x \in E, \ \sum_{j=n+1}^{m} M_j < \varepsilon$$

پس

$$\left| \sum_{j=n+1}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon$$

طبق قضیه ۶.۱۰، $\sum_{1}^{\infty} f_n$ روی E همگرای یکنواخت است.

۹.۱۰ <u>نکته.</u> عکس قضیه ۸.۱۰ لزوماً صحیح نمی‌باشد. به عنوان مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ برای $x \geq 0$ را در نظر بگیرید. سری فوق همگرای یکنواخت است و داریم

$$\left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| \leq \frac{1}{n} \qquad 0 \leq x, \ n \in \mathbb{N}$$

اما $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است.

<u>۱۰.۱۰ مثال.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ به ازای هر عدد حقیقی x همگرای یکنواخت است.

حل: داریم

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

سری $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ همگرا است. طبق ۸.۱۰ سری $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$ روی $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است.

۱۱.۱۰ مثال. $\sum_1^\infty \frac{x}{1+n^4x^2}$ به ازای هر عدد نامنفی x همگرای یکنواخت است.

حل. قرار می‌دهیم

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{1+n^4x^2-2n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}$$

حال از $f'(x)=0$ داریم

$$f_n'(x)=0 \Rightarrow 1-n^4x^2=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{n^2} \quad \text{نقطه بحرانی}$$

به سادگی می‌توان دید که $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$ برای $x \geq 0$، پس طبق قضیه ۸.۱۰ حکم حاصل می‌شود.

$$f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1/n^2}{1+n^4\left(\frac{1}{n^4}\right)} = \frac{1}{2n^2}$$

۱۲.۱۰ قضیه. (آزمون آبل برای همگرایی یکنواخت) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای نزولی از توابع نامنفی و (g_n) دنباله‌ای از توابع تعریف شده بر مجموعه E باشند. فرض کنید تابع f_1 کراندار است و سری $\sum_1^\infty g_n$ روی E همگرای یکنواخت باشد، آنگاه $\sum_1^\infty f_n g_n$ روی E همگرای یکنواخت است.

اثبات. چون f_1 روی E کراندار است پس

$$\exists K>0 \quad s.t \quad \forall x\in E,\ f_1(x)\leq K$$

برای هر عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم:

$$H_n=\sum_{j=1}^{n} f_j g_j \quad , \quad G_n=\sum_{j=1}^{n} g_j$$

با توجه به محک کشی دنباله (H_n) را مد نظر قرار می‌دهیم و نشان خواهیم داد که دنباله (H_n) کشی است. فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است،

$$\exists N\in\mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m>n\geq N \ \ \forall x\in E,\ |G_m(x)-G_n(x)|<\frac{\epsilon}{k}$$

اگر $m=n$ آنگاه

$$|H_m(x)-H_n(x)|=0<\epsilon$$

فرض کنید $m>n\geq N$ در این صورت

$$|H_m(x)-H_n(x)|=\Big|\sum_{j=n+1}^{m} f_j(x)\,g_j(x)\Big|\leq f_{n+1}(x)\frac{\epsilon}{k}\leq k\frac{\epsilon}{k}=\epsilon$$

۱۳.۱۵. قضیه دیریکله برای سری‌های تابعی. فرض کنید (f_n) و (g_n) دنباله‌هایی از توابع تعریف شده بر E باشند و داشته باشیم

الف) دنباله مجموع‌های جزیی سری $\sum_{1}^{\infty} f_n$ روی E بطور یکنواخت کراندار است.

ب) $g_n \xrightarrow{u} 0$ روی E

ج) دنباله (g_n) روی E نزولی است

آنگاه $\sum f_n g_n$ روی E همگرای یکنواخت است.

اثبات. فرض کنید s_n مجموع جزئی n جمله سری $\sum_{1}^{\infty} f_n$ است.

$$s_n=f_1+\cdots+f_n \Rightarrow f_n=s_n-s_{n-1}$$

چون دنباله (s_n) روی E بطور یکنواخت کراندار است پس

$$\exists M>0 \text{ s.t. } \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in E \ , \ |s_n(x)|\leq M$$

فرض m و n دو عدد طبیعی دلخواه است و $m>n$، در این صورت

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{m} f_i\, g_i &= \sum_{i=n}^{m}(s_i-s_{i-1})\,g_i\\ &=\sum_{i=n}^{m} s_i\, g_i-\sum_{i=n}^{m} s_{i-1}\, g_i\\ &=\sum_{i=n}^{m} s_i\, g_i-\sum_{i=n-1}^{m-1} s_i\, g_{i+1}\\ &=\sum_{i=n}^{m} s_i\, g_i-\Big(s_{n-1}g_n+\sum_{i=n}^{m-1} s_i\, g_{i+1}\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=n}^{m-1} s_i g_i + s_m g_m - s_{n-1} g_n - \sum_{i=n}^{m-1} s_i g_{i+1}$$
$$= \sum_{i=n}^{m-1} s_i (g_i - g_{i+1}) + s_m g_m - s_{n-1} g_n$$

بنابراین

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i g_i\right| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |s_i| (g_i - g_{i+1}) + |s_m| g_m + |s_{n-1}| g_n$$
$$\leq M \sum_{i=n}^{m-1} (g_i - g_{i+1}) + M g_m + M g_n$$
$$= M \left(\sum_{i=n}^{m-1} (g_i - g_{i+1}) + g_m + g_n \right)$$
$$= M (g_n - g_m + g_m + g_n)$$
$$= 2M g_n$$

پس $\left|\sum_{i=n}^{m} f_i g_i\right| \leq 2M g_n$. چون $g_n \xrightarrow{u} 0$ پس

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t } \forall n \geq N, \forall x \in E, \ g_n(x) < \varepsilon$$

در نتیجه برای $m > n \geq N$ داریم

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i g_i\right| \leq 2M g_n < 2M\varepsilon$$

چون ε دلخواه است پس سری $\sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i$ در شرط کشی صدق می‌کند. در نتیجه همگرای یکنواخت روی E است.

<u>۱۴.۱۰ نتیجه.</u> اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند بطوری که

<u>الف)</u> دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum_1^{\infty} a_n$ کراندار باشد و

<u>ب)</u> دنباله $\{b_n\}$ نزولی باشد و

<u>ج)</u> $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

آنگاه سری $\sum_1^{\infty} a_n b_n$ همگرا است.

<u>۱۵.۱۰ مثال.</u> اگر سری $\sum_1^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n}$ همگرا است.

<u>۱۶.۱۰. نتیجه (قضیه لایب‌نیتز).</u> سری تناوبی $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگرا است هرگاه

دنباله $\{a_n\}$ نزولی باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

اثبات. در قضیه ۱۴.۱۰ قرار دهید $b_n=(-1)^{n+1}$. دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum_1^\infty b_n$ کراندار است و در نتیجه $\sum b_n a_n = \sum (-1)^{n+1} a_n$ همگرا است.

۱۷.۱۰ مثال. اگر سری $\sum_1^\infty a_n$ همگرا و دنباله $\{b_n\}$ یکنوا و کراندار باشد آنگاه سری $\sum_1^\infty a_n b_n$ همگرا است.

حل. چون دنباله $\{b_n\}$ یکنوا و کراندار است پس همگرا می‌باشد، مثلاً $b_n \to b$. قرار می‌دهیم $c_n = b_n - b$. داریم $c_n \to 0$.

چون b_nها یکنوا (مثلاً صعودی) هستند داریم

$$b_n \le b_{n+1} \qquad \forall n$$

پس $\{c_n\}$ نیز صعودی است. از طرفی طبق فرض $\sum a_n$ همگرا است پس دنباله مجموعهای جزئی $\sum a_n$ کراندار است. طبق قضیه ۱۴.۱۰ یا نتیجه ۱۴.۱۰ سری $\sum_1^\infty a_n c_n$ همگرا است. اما

$$\sum_1^\infty a_n c_n = \sum_1^\infty a_n (b_n - b) = \sum_1^\infty a_n b_n - b\sum_1^\infty a_n$$

پس

$$\sum_1^\infty a_n b_n = \sum_1^\infty a_n c_n + b\sum_1^\infty a_n$$

در نتیجه $\sum_1^\infty a_n b_n$ همگرا است.

۱۸.۱۰ مثال. برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $x\in[-1,1]$ تعریف می‌کنیم $f_n(x)=\frac{x^n}{n^2}$. چون برای هر n، $|f_n| \le \frac{1}{n^2}$. طبق آزمون وایرشتراوس $\sum f_n$ روی $[-1,1]$ همگرای یکنواخت است.

۱۹.۱۰ مثال. فرض کنید $-1<\alpha\le 1$. از اتحاد $\sum\limits_{j=1}^n (-1)^{j-1}x^j = \frac{x(1-(-x)^n)}{1+x}$ نتیجه می‌شود که

$$\left|\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j\right| \le \frac{2}{1+\alpha} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \forall x\in[\alpha,1]$$

بنابراین طبق قضیه ۱۴.۱۰ سری $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1}x^j}{n}$ روی $[\alpha,1]$ همگرای یکنواخت است.

توجه کنید مقدار این سری $\ln(1+x)$ می‌باشد.

مسائل: دنباله‌ها و سری‌های توابع

قرارداد: اگر دنباله (f_n) روی مجموعه A به تابع f همگرای یکنواخت باشد، می‌نویسیم

$$f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$$

۱. ثابت کنید دنباله توابع (f_n) تعریف شده روی A همگرای یکنواخت روی $A \supset B$ به تابع $f: B \to \mathbb{R}$ است اگر و تنها اگر دنباله عددی $\{d_n\}$ همگرا به صفر باشد، که در آن

$$d_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in B\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

۲. فرض کنید $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$ و $g_n \underset{A}{\rightrightarrows} g$ و عدد $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in A$، $|f(x)| < M$ و $|g(x)| < M$. نشان دهید $f_n g_n \underset{A}{\rightrightarrows} fg$

۳. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا از اعداد حقیقی است و (f_n) دنباله‌ای از توابع برقرار در شرط

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in A\} \le |a_n - a_m|, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

است. ثابت کنید (f_n) روی A همگرای یکنواخت است.

۴. نشان دهید تابع حدی یک دنباله همگرای یکنواخت از توابع کراندار روی مجموعه A کراندار است. آیا این نتیجه در حالت همگرایی نقطه‌وار برقرار است؟

۵. نشان دهید دنباله توابع (f_n) تعریف شده توسط

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

روی $\mathbb{R}$ همگرای نقطه‌وار است اما همگرای یکنواخت نمی‌باشد. یک زیردنباله همگرای یکنواخت آن را بیابید.

۶. آیا دنباله‌های توابع (f_n) در حالت‌های زیر روی $[0,1]$ همگرای یکنواخت است؟

الف) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx-1)^2}$ ب) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}$

ج) $f_n(x) = nx^n(1-x)$ د) $f_n(x) = n^3x^n(1-x)^4$

هـ) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ و) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$

۷. همگرایی یکنواخت دنباله (f_n) روی A و B را بررسی کنید، هرگاه

الف) $f_n(x)=\cos^n x\,(1-\cos^n x)$ ، $A=[0,\frac{\pi}{2}]$ ، $B=[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

ب) $f_n(x)=\cos^n x\,\sin^{2n} x$ ، $A=\mathbb{R}$ ، $B=[0,\frac{\pi}{4}]$

۸. همگرایی یکنواخت دنباله (f_n) روی A را بررسی کنید، هرگاه

الف) $f_n(x)=\tan^{-1}\frac{2x}{x^2+n^3}$ ، $A=\mathbb{R}$

ب) $f_n(x)=n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$ ، $A=\mathbb{R}$

ج) $f_n(x)=n\ln\frac{1+nx}{nx}$ ، $A=(0,\infty)$

د) $f_n(x)=\sqrt[2n]{1+x^{2n}}$ ، $A=\mathbb{R}$

هـ) $f_n(x)=\sqrt[n]{2^n+|x|^n}$ ، $A=\mathbb{R}$

و) $f_n(x)=\sqrt{n+1}\,\sin^n x\cos x$ ، $A=\mathbb{R}$

ز) $f_n(x)=n(\sqrt[n]{x}-1)$ ، $A=[1,a]$ ، $a>1$.

۹. به ازای تابع f تعریف شده بر $[a,b]$ قرار دهید

$$f_n(x)=\frac{[\![nf(x)]\!]}{n} \qquad x\in[a,b],\ n\in\mathbb{N}$$

نشان دهید $f_n \xrightarrow{\text{یک}} f$ روی $[a,b]$.

۱۰. تحقیق کنید که دنباله (f_n) که در آن $f_n(x)=n\sin(\sqrt{4\pi^2n^2+x^2})$ روی $[0,a]$ برای $a>0$ همگرای یکنواخت است. آیا (f_n) روی $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است؟

۱۱. نشان دهید دنبالهٔ (P_n) از چندجمله‌ای‌های تعریف شده توسط

$$P_0(x)=0$$

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}\left(x-P_n^2(x)\right) \qquad n=0,1,2,\dots$$

روی $[0,1]$ همگرای یکنواخت به تابع $f(x)=\sqrt{x}$ است. نشان دهید دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها بر $[-1,1]$ وجود دارد که همگرای یکنواخت به تابع $g(x)=|x|$ است.

۱۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و f' روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است. نشان دهید $n\left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right)\xrightarrow{\text{یک}} f'(x)$ روی $\mathbb{R}$. با یک مثال نشان دهید فرض پیوستگی یکنواخت f' لازم است.