فصل سوم نظریه نقطه ثابت در فضاهای هیلبرت

در این فصل، ابتدا برخی از خواص فضاهای هیلبرت در ارتباط با آنالیز تابعی غیرخطی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس، با استفاده از این خواص، قضایای نقطه ثابت و قضایای ارگودیک غیرخطی برای نگاشت‌های نا گسترشی در فضاهای هیلبرت را بررسی می‌کنیم.

۱.۳ برخی خواص فضاهای هیلبرت

در این بخش، برخی از خواص فضاهای هیلبرت را از نقطه نظر آنالیز تابعی غیرخطی مطالعه می‌کنیم و سپس قضایایی برای نگاشت‌های نا گسترشی و نقاط ثابت آنها را ثابت خواهیم کرد.

قضیه ۱. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در H است. تابع با مقادیر حقیقی g روی C تعریف شده توسط

$$g(z) = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - z\|,$$

برای هر $z\in C$ را در نظر بگیرید. آنگاه عضو منحصربفرد $x_0\in C$ وجود دارد به طوری که

$$g(x_0) = \min\{g(z) : z\in C\}.$$

اثبات. طبق مسئله شماره ۴ از بخش سوم فصل اول (مسئله ۴.۳.۱)، تابع با مقادیر حقیقی g روی C پیوسته و محدب است و وقتی $\|z_n\|\to\infty$ داریم $g(z_n)\to\infty$. از قضیه (۱۵.۳.۱) نتیجه می‌شود که عضو $x_0\in C$ وجود دارد به طوری که

$$g(x_0) = \min\{g(z) : z\in C\}.$$

حال نشان می‌دهیم چنین نقطه x_0 ای منحصربفرد است. اگر

$$r = g(x_0) = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0,$$

آنگاه چون $x_n\to x_0$ نتیجه می‌شود x_0 منحصربفرد است. پس کافی است نشان دهیم $r=0$ است. فرض کنید $r>0$ و y عضوی از C است به طوری که $g(y)=r$ و $x_0\neq y$. برای $\varepsilon=\|x_0-y\|>0$، عدد a را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$(r+a)^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} < r^2.$$

چون

$$r=\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=\limsup_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

پس عدد صحیح مثبت n_0 وجود دارد به طوری که برای هر $n\geq n_0$

$$\|x_n-x_0\|<r+a$$

$$\|x_n-y\|<r+a$$

بنابراین از رابطه

$$4\|x_n-\frac{x_0+y}{2}\|^2+\|x_0-y\|^2=2\|x_n-x_0\|^2+\|x_n-y\|^2,$$

داریم

$$4\|x_n-\frac{x_0+y}{2}\|^2\leq 2(r+a)^2+2(r+a)^2-\varepsilon^2$$

در نتیجه

$$g(\frac{x_0+y}{2})\leq((r+a)^2-\frac{\varepsilon^2}{4})^{1/2}<r$$

که تناقض است. پس باید $r=0$ باشد و حکم حاصل می‌شود.

یک نتیجه مستقیم قضیه ۱ به شرح زیر است.

نتیجه ۲. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H و $x\in H$ است. آنگاه عضو منحصربفرد $x_0\in C$ با $\|x-x_0\|=d(x,C)$ وجود دارد.

اثبات. قرار می‌دهیم $x_n=x$ ، $n=1,2,\dots$ و حکم از قضیه (۱) حاصل می‌شود.

تعریف ۳. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است و $P:H\to C$ یک نگاشت باشد. طبق نتیجه (۲) برای هر $x\in H$ عضو منحصربفرد $Px\in C$ وجود دارد به طوری که $\|x-Px\|=d(x,C)$. چنین نگاشت P از H بروی C را تصویر متریک (یا متریک تصویری) بروی C نامیده می‌شود.

لم ۴. فرض کنید C یک زیرمجموعه محدب از H و $x\in H$ است. فرض کنید $y\in C$، آنگاه عبارات زیر با هم معادلند:

الف) $\|x-y\| = d(x,C)$.

ب) برای هر $z \in C$، $(x-y, y-z) \geq 0$.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب). فرض کنید $\|x-y\| = d(x,C)$. آن‌گاه برای هر $z \in C$ و هر λ با شرط $0 < \lambda < 1$ داریم

$$\|x-y\| \leq \|x-(1-\lambda)y-\lambda z\|,$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &\leq \|x-(1-\lambda)y-\lambda z\|^2\\ &= \|x-y+\lambda(y-z)\|^2\\ &= \|x-y\|^2 + 2\lambda(x-y, y-z) + \lambda^2\|y-z\|^2,\end{aligned}$$

پس

$$2(x-y, y-z) \geq -\lambda\|y-z\|^2$$

بنابراین وقتی $\lambda \to 0$ داریم $(x-y, y-z) \geq 0$.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). فرض کنید $z \in C$. در این صورت $(x-y, y-z) \geq 0$. پس

$$(x-y, y-x) + (x-y, x-z) \geq 0,$$

و در نتیجه

$$\|x-y\|^2 \leq (x-y, x-z) \leq \|x-y\|\,\|x-z\|.$$

بنابراین $\|x-y\| \leq \|x-z\|$ در نتیجه $\|x-y\| = d(x,C)$.

قضیه ۵. فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی بسته و محدب از H و P یک تصویر متری بروی C است. آن‌گاه

الف) برای هر $x, y \in H$ داریم $P^2 = P$ و $\|Px-Py\| \leq \|x-y\|$.

ب) اگر $x_n \rightharpoonup x_0$ و $Px_n \to y_0$ آن‌گاه $Px_0 = y_0$.

اثبات. (الف). اگر $x \in C$ آن‌گاه از $Px = x$ داریم $P^2 z = Pz$ برای هر $z \in H$ و در نتیجه $P^2 = P$. علاوه بر آن برای هر $x, y \in H$، طبق لم (۴) داریم

$$(x-y-(Px-Py), Px-Py) = (x-Px, Px-Py) + (y-Py, Py-Px) \geq 0,$$

و بنابراین

$$\|Px-Py\|^2 \le (x-y,\ Px-Py) \le \|x-y\|\,\|Px-Py\|$$

درنتیجه $\|Px-Py\| \le \|x-y\|$.

ب) طبق لم (۴)، برای هر $z \in C$ داریم

$$(x_n - Px_n,\ Px_n - z) \ge 0,$$

چون $x_n \rightharpoonup x_0$ و $Px_n \to y_0$ پس برای هر $z \in C$

$$(x_0 - y_0,\ y_0 - z) \ge 0$$

مجدداً با توجه به لم (۴) داریم $Px_0 = y_0$.

خاصیت زیر در یک فضای هیلبرت H از خواص مهم در آنالیز تابعی غیرخطی است.

قضیه ۶. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در H با $x_n \rightharpoonup x_0$. اگر $y \neq x_0$ آنگاه

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

اثبات. طبق قانون متوازی‌الاضلاع، داریم

$$2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_0 - y\|^2 = \|x_n - y\|^2 + \|x_n - x_0 - (x_0 - y)\|^2$$

پس

$$2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_0 - y\|^2 = \|x_n - y\|^2 + \|x_n - x_0\|^2 - 2(x_n - x_0,\ x_0 - y) + \|x_0 - y\|^2.$$

بنابراین

$$\|x_0 - y\|^2 + 2(x_n - x_0,\ x_0 - y) = \|x_n - y\|^2 - \|x_n - x_0\|^2$$

چون $x_n \rightharpoonup x_0$، عدد صحیح مثبت n_0 وجود دارد به طوری که برای هر $n \ge n_0$ داریم

$$\|x_n - y\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 > 0.$$

قرار می‌دهیم $M = \sup_n \{\|x_n - x_0\| + \|x_n - y\|\}$ درنتیجه برای $n \ge n_0$ داریم

$$\|x_0 - y\|^2 + 2(x_n - x_0,\ x_0 - y) \le (\|x_n - y\| - \|x_n - x_0\|)M$$

پس

$$\|x_0-y\|^2+M\liminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|\le M\liminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

در نتیجه

$$0<\|x_0-y\|^2\le M\left(\liminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|-\liminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|\right)$$

بنابراین

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|<\liminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

در ادامه بخش، یک قضیه نقطه ثابت برای عملگرهای غیرخطی در فضای هیلبرت H را ثابت می‌کنیم.

تعریف ۷. فرض کنید C زیرمجموعه‌ای از فضای هیلبرت H است. نگاشت $T: C\to H$ را ناگسترشی نامیم هرگاه

$$\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|,\quad \forall x,y\in C.$$

قضیه ۸. قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های ناگسترشی. فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی بسته و محدب از فضای هیلبرت H و T یک نگاشت ناگسترشی از C بتوی خودش است. آن‌گاه عبارات زیر باهم معادلند

(الف) مجموعه $F(T)$ شامل نقاط ثابت T ناتهی است.

(ب) $\{T^n x\}$ به ازای x ای در C کراندار است.

در این حالت، $F(T)$ بسته و محدب است.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب). اگر $u\in F(T)$ باشد آن‌گاه $\{T^n u\}=\{u\}$ کراندار است.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). برای هر $y\in C$ و برای هر $k=0,1,2,\dots$ داریم

$$\begin{aligned}0&\le\|T^kx-y\|^2-\|T^{k+1}x-Ty\|^2\\&=\|T^kx-Ty\|^2+2(T^kx-Ty,\,Ty-y)\\&\quad+\|Ty-y\|^2-\|T^{k+1}x-Ty\|^2,\end{aligned}$$

بنابراین

$$0\le\frac{1}{n}\|x-Ty\|^2+2(S_nx-Ty,\,Ty-y)+\|Ty-y\|^2-\frac{1}{n}\|T^nx-Ty\|^2,$$

محاسبه شود که آیا لازم است یا خیر؟

که در آن $S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$. چون $\{S_n x\}$ کراندار است و زیرمجموعه بسته و محدب و کراندار از فضای هیلبرت H فشرده دنباله‌ای ضعیف می‌باشد، پس زیردنباله $\{S_{n_i} x\}$ از $\{S_n x\}$ همگرای ضعیف به p یی در C وجود دارد. بنابراین

$$0 \leq 2(p-Ty, Ty-y) + \|Ty-y\|^2.$$

قرار می‌دهیم $y=p$ داریم $0 \leq -\|Tp-p\|^2$ پس $Tp=p$.

حال نشان می‌دهیم $F(T)$ بسته و محدب است. واضح است که $F(T)$ بسته است. فرض کنید $x,y \in F(T)$ و $0 \leq \alpha \leq 1$. قرار می‌دهیم $z=\alpha x+(1-\alpha)y$ و فرض کنید $Tz \neq z$. در این صورت طبق قانون متوازی‌الاضلاع داریم

$$\left\|\frac{z+Tz}{2}-x\right\|^2+\frac{1}{4}\|z-Tz\|^2=\frac{1}{2}\|z-x\|^2+\frac{1}{2}\|Tz-x\|^2.$$

چون T ناگسترشی است، تساوی بالا نتیجه می‌دهد که

$$\left\|\frac{z+Tz}{2}-x\right\|^2 \leq \|z-x\|^2-\frac{1}{4}\|z-Tz\|^2<\|z-x\|^2,$$

و

$$\left\|\frac{z+Tz}{2}-y\right\|^2 \leq \|z-y\|^2-\frac{1}{4}\|z-Tz\|^2<\|z-y\|^2.$$

بنابراین

$$\|x-y\| \leq \left\|x-\frac{z+Tz}{2}\right\|+\left\|\frac{z+Tz}{2}-y\right\|<\|x-z\|+\|z-y\|=\|x-y\|$$

که تناقض است، پس $Tz=z$.

نتیجه مستقیمی از قضیه ۸، به شرح زیر است.

نتیجه ۹. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته کراندار و محدب از فضای هیلبرت H و T نگاشت ناگسترشی از C به توی خودش است. آنگاه T دارای نقطه ثابتی در C است.