۲.۴ قضیه ارگودیک غیرخطی بایلون

در این بخش، ابتدا یک قضیه همگرایی قوی ارائه شده توسط برودر را ثابت می‌کنیم و سپس قضیه ارگودیک غیرخطی بایلون را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱. قضیه همگرایی برودر. فرض کنید C یک زیرمجموعه کراندار، بسته و محدب از فضای هیلبرت H بوده و T یک نگاشت ناگسترشی از C به‌توی خودش است. فرض کنید x_0 نقطه‌ای دلخواه در C است و $T_n: C \to C$ توسط

$$T_n x = \left(1-\frac{1}{n}\right)Tx + \frac{1}{n}x_0,$$

برای هر $x \in C$ و $n=1,2,3,\ldots$ تعریف شده‌است. آن‌گاه عبارات زیر برقرارند:

الف) T_n دارای یک نقطه ثابت u_n در C است.

ب) دنباله $\{u_n\}$ قویاً به $Px_0 \in F(T)$ همگراست، که در آن P تصویر متریک بروی $F(T)$ است.

اثبات. الف) فرض کنید $x, y \in C$ و $n=1,2,3,\ldots$. آن‌گاه با توجه به اینکه T_n یک انقباض از C به‌توی خودش است، نقطه ثابت منحصربفرد u_n از T_n در C وجود دارد.

ب) برای نشان دادن اینکه $u_n \to Px_0$، کافی است ثابت کنیم که اگر $\{u_{n_i}\}$ زیردنباله‌ای از $\{u_n\}$ باشد، آن‌گاه می‌توان یک زیردنباله از $\{u_{n_i}\}$ یافت به طوری که قویاً به $u_0 = Px_0$ همگراست.

فرض کنید $v_i = u_{n_i}$. چون تمام v_iها در مجموعه فشرده ضعیف C قرار دارند، می‌توان بدون کم شدن از کلیت بحث فرض کرد که به ازای عضو v ای در C، $v_i \to v$. ابتدا نشان می‌دهیم $Tv = v$. زیرا فرض کنید $Tv \neq v$ آن‌گاه وقتی $i \to \infty$، چون $v_i - Tv_i$ همگرا به ۰ است، از قضیه ۶.۱ داریم

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty}\|v_i - v\| &< \liminf_{i\to\infty}\|v_i - Tv\| \\ &= \liminf_{i\to\infty}\|v_i - Tv_i + Tv_i - Tv\| \\ &= \liminf_{i\to\infty}\|Tv_i - Tv\| \le \liminf_{i\to\infty}\|v_i - v\|.\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین $v = Tv$. حال نشان می‌دهیم $v_i \to u_0 = Px_0$.
برای هر i، v_i یک نقطه ثابت T_{n_i} است. بنابراین

$$\frac{1}{n_i} v_i + \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)(v_i - Tv_i) = \frac{1}{n_i} x_0 .$$

چون u_0 یک نقطه ثابت T است، داریم

$$\frac{1}{n_i} u_0 + \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)(u_0 - Tu_0) = \frac{1}{n_i} u_0 .$$

حال اگر این دو عبارت را از هم کم کرده و ضرب داخلی با تفاضل $v_i - u_0$ را بدست آوریم، داریم

$$\frac{1}{n_i}(v_i - u_0, v_i - u_0) + \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)(Uv_i - Uu_0, v_i - u_0) = \frac{1}{n_i}(x_0 - u_0, v_i - u_0),$$

که در آن $U = I - T$ و I همانی است. چون

$$(Uv_i - Uu_0, v_i - u_0) \geq 0,$$

داریم

$$\frac{1}{n_i}\|v_i - u_0\|^2 \leq \frac{1}{n_i}(x_0 - u_0, v_i - u_0).$$

بنابراین

$$\|v_i - u_0\|^2 \leq (x_0 - u_0, v_i - u_0)$$
$$= (x_0 - u_0, v - u_0) + (x_0 - u_0, v_i - v).$$

چون از $u_0 = Px_0$ نتیجه می‌شود که $(x_0 - u_0, u_0 - v) \geq 0$، پس داریم

$$\|v_i - u_0\|^2 \leq (x_0 - u_0, v_i - v).$$

بنابراین از $v_i \to v$ داریم $v_i \to u_0 = Px_0$.

حال یک قضیه ارگودیک غیرخطی را ثابت می‌کنیم. قبل از اثبات آن، لم زیر را که در اثبات قضیه نقش مهمی دارد را بررسی می‌کنیم.

لم ۲. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است و فرض کنید T یک نگاشت نا‌گسترشی از C بتوی خودش است. فرض کنید $F(T) \neq \emptyset$ و P تصویر تصویری بروی $F(T)$ است. آن‌گاه برای هر $x \in C$، دنباله $\{PT^n x\}$ قویاً همگرا است.

اثبات. فرض کنید $x \in C$. آن‌گاه چون P یک تصویر متریک بر روی $F(T)$ است، داریم

$$\|PT^n x - T^n x\| \le \|PT^{n-1}x - T^n x\|$$
$$= \|TPT^{n-1}x - T^n x\|$$
$$\le \|PT^{n-1}x - T^{n-1}x\|.$$

بنابراین $\{\|PT^n x - T^n x\|\}$ یک دنباله نزولی است. علاوه بر آن، برای $v \in C$, $u \in F(T)$ داریم

$$(v - Pv, Pv - u) \ge 0,$$

یعنی

$$\|v - Pv\|^2 \le (v - Pv, v - u).$$

بنابراین

$$\|Pv - u\|^2 = \|Pv - v + v - u\|^2$$
$$= \|Pv - v\|^2 - 2(Pv - v, u - v) + \|v - u\|^2$$
$$\le \|v - u\|^2 - \|Pv - v\|^2.$$

قرار می‌دهیم $v = T^{n+k}x$ و $u = PT^n x$، داریم

$$\|PT^{n+k}x - PT^n x\|^2 \le \|T^{n+k}x - PT^n x\|^2 - \|PT^{n+k}x - T^{n+k}x\|^2$$
$$\le \|T^n x - PT^n x\|^2 - \|PT^{n+k}x - T^{n+k}x\|^2.$$

چون $\{\|T^n x - PT^n x\|\}$ یک دنباله نزولی است، پس $\{PT^n x\}$ دنباله‌ای کشی در $F(T)$ است. بنابراین $\{PT^n x\}$ قویاً همگرا است.

قضیه ۳. قضیه ارگودیک بایلون. فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی بسته و محدب از فضای هیلبرت H است و T یک نگاشت ناگسترشی از C به توی خودش است. آن‌گاه عبارات زیر با هم معادلند

الف) $F(T) \neq \emptyset$؛

ب) برای هر $x \in C$، $S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ همگرای ضعیف است.

در این حالت، اگر $S_n x \rightharpoonup Qx$ آن‌گاه Q یک نگاشت ناگسترشی از C بروی $F(T)$

است به طوری که $Q^2=Q$، برای هر $n=1,2,\dots$، $QT^n=T^nQ=Q$ و

$$Qx\in \overline{co}\{T^n x : n=0,1,2,\dots\},\qquad \forall x\in C.$$

اثبات. (الف) ⇐ (ب). فرض کنید $x\in C$. آن گاه طبق لم ۲، دنباله $\{PT^n x\}$ همگرای قوی به $p\in F(T)$ است. چون $\{S_n x\}$ کراندار است، پس زیردنباله $\{S_{n_k}x\}$ از $\{S_n x\}$ وجود دارد که به طور ضعیف همگرا است. فرض کنید $S_{n_k}x\rightharpoonup v$. نشان می‌دهیم $v=p$.

برای $u\in F(T)$ داریم $(T^k x-PT^k x, PT^k x-u)\geq 0$. همچنین داریم

$$\begin{aligned}(u-p, T^k x-PT^k x)&\leq (PT^k x-p, T^k x-PT^k x)\\ &\leq \|PT^k x-p\|\,\|T^k x-PT^k x\|\\ &\leq \|PT^k x-p\|\,\|x-Px\|.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\Big(u-p, S_n x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}PT^k x\Big)\leq \frac{\|x-Px\|}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|PT^k x-p\|$$

چون $PT^k x\to p$ و $S_{n_k}x\rightharpoonup v$ داریم

$$(u-p, v-p)\leq 0$$

همانند اثبات قضیه (۸.۱)، $v\in F(T)$. بنابراین با فرض $u=v$ داریم $v=p$.

(ب) ⇐ (الف). مشابه اثبات قضیه (۸.۱)، می‌توان ثابت کرد که $F(T)\neq\emptyset$. فرض کنید $x,y\in C$، آن گاه از

$$\begin{aligned}(S_n x-S_n y, Qx-Qy)&\leq \|S_n x-S_n y\|\,\|Qx-Qy\|\\ &\leq \|x-y\|\,\|Qx-Qy\|,\end{aligned}$$

وقتی $n\to\infty$ داریم

$$\|Qx-Qy\|^2=\lim_{n\to\infty}(S_n x-S_n y, Qx-Qy)\leq \|x-y\|\,\|Qx-Qy\|$$

و این نتیجه می‌دهد که Q نا گسترشی است. همچنین برای هر $x\in C$ می‌دانیم

$$S_n Tx-S_n x=\frac{1}{n}(T^n x-x),$$

بنابراین وقتی $n\to\infty$، $QTx-Qx=0$. و این نتیجه می‌دهد که $QT=Q$. واضح است که $TQ=Q$ و

$$Qx \in \overline{co}\{T^n x : n=0,1,2,\dots\}, \quad \forall x\in C.$$

نهایتاً مسئله همگرایی ضعیف $\{T^n x\}$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۴. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است و فرض کنید T یک نگاشت ناگسترشی از C بتوی خودش است. فرض کنید $x\in C$. آن‌گاه عبارات زیر باهم معادلند.

الف) $\{T^n x\}$ همگرای ضعیف است.

ب) اگر $F(T)\neq\emptyset$ و زیردنباله $\{T^{n_i}x\}$ از $\{T^n x\}$ همگرای ضعیف به y ای در C باشد آن‌گاه $y\in F(T)$.

اثبات. (الف) ⇐ (ب). فرض کنید $T^n x \rightharpoonup x_0$ و $Tx_0\neq x_0$. طبق قضیه (۶.۱) داریم

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\|T^n x - x_0\| &< \liminf_{n\to\infty}\|T^n x - Tx_0\| \\ &\le \liminf_{n\to\infty}\|T^{n-1}x - x_0\| \\ &= \liminf_{n\to\infty}\|T^n x - x_0\|.\end{aligned}$$

که یک تناقض است. پس (ب) برقرار است.

(ب) ⇐ (الف). از $F(T)\neq\emptyset$ نتیجه می‌شود $\{T^n x\}$ کراندار است پس زیردنباله $\{T^{n_i}x\}$ از $\{T^n x\}$ وجود دارد به طوری که $\{T^{n_i}x\}$ همگرای ضعیف به y ای در C است. از طرف دیگر، دنباله $\{PT^n x\}$ همگرای قوی به z ای در $F(T)$ است که در آن P تصویر متریک بروی $F(T)$ است. طبق قضیه (۵.۱) داریم $Py=z$. در نتیجه $y\in F(T)$. پس $z=y$ و این نتیجه می‌دهد که $T^n x\rightharpoonup z$.

لم ۵. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H و T یک نگاشت ناگسترشی از C بتوی خودش است. آن‌گاه $U=I-T$ نیم بسته است، یعنی از $x_n\rightharpoonup x_0$ و $Ux_n\to y_0$ نتیجه می‌دهد که $Ux_0=y_0$.

اثبات. فرض کنید $x_n\rightharpoonup x_0$ و $x_n-Tx_n\to y_0$. آن‌گاه می‌توان نشان داد

دکتر سید هاشم پروانه مسیحا — دانشکده — گروه:

$x_0 - Tx_0 = y_0$. فرض کنید $x_0 - Tx_0 \neq y_0$ ، طبق قضیه (۶.۱) داریم

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx_0\| &\leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| \\ &< \liminf_{n\to\infty} \|x_n - (y_0 + Tx_0)\| \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n - y_0 + Tx_n - Tx_0\| \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx_0\|\end{aligned}$$

که تناقض است.

با استفاده از لم (۵) و قضیه (۴)، قضیه زیر را می‌توان ثابت کرد.

قضیه ۶ . فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H بوده و T یک نگاشت ناگسترشی از C بتوی خودش است . فرض کنید $F(T) \neq \emptyset$. اگر برای $x \in C$ وقتی $n \to \infty$ داشته باشیم $T^n x - T^{n+1} x \to 0$ آنگاه $\{T^n x\}$ به طور ضعیف همگرا به نقطه‌ای مانند z در $F(T)$ است .

اثبات . فرض کنید $\{T^{n_i} x\}$ یک زیردنباله همگرای ضعیف به نقطه‌ای مانند $y \in C$ از دنباله $\{T^n x\}$ است . آنگاه ، چون

$$T^n x - T^{n+1} x = (I - T) T^n x$$

طبق لم (۵) داریم $(I-T)y = 0$ پس $Ty = y$. بنابراین از قضیه (۴) نتیجه می‌شود که $\{T^n x\}$ به طور ضعیف همگرا به z ای در $F(T)$ است .