۳.۴ فضاهای نقاط ثابت برای نیم گروه‌های تاگسترشی

دراین بخش فضاهای نقطه ثابت برای نیم گروه‌های جابجایی شامل نگاشت‌های ناگسترشی را ثابت می‌کنیم.

فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیکی و C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است. فرض کنید $S \longrightarrow C$: u یک تابع پیوسته با $\sup_{s\in S}\|u(s)\| < +\infty$. آن‌گاه برای هر $y\in H$، تابع مقدار حقیقی φ تعریف شده توسط

$$\varphi(t) = (u(t), y), \qquad \forall t\in S$$

در $C(S)$ است. برای میانگین μ روی $C(S)$، قرار می‌دهیم

$$g(y) = \mu(\varphi) = \mu_t(u(t), y), \qquad \forall y\in H,$$

g یک تابعک خطی روی H است و

$$\begin{aligned}|g(y)| &= |\mu(\varphi)| \le \|\mu\|\|\varphi\| = \|\varphi\| \\ &= \sup_{t\in S}|\varphi(t)| \\ &= \sup_{t\in S}|(u(t), y)| \\ &\le (\sup_{t\in S}\|u(t)\|)\cdot\|y\|.\end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه ریس، عضو منحصربفرد $x_0\in H$ وجود دارد به طوری که

$$g(y) = (x_0, y), \qquad \forall y\in H,$$

یا

$$\mu_t(u(t), y) = (x_0, y), \qquad \forall y\in H.$$

لم ۲. فرض کنید μ یک میانگین روی $C(S)$ است و فرض کنید x_0 عضوی از H است به طوری که

$$\mu_t(u(t), y) = (x_0, y), \qquad \forall y\in H,$$

آن‌گاه $x_0\in \overline{co}\{u(t) : t\in S\}\subset C$.

اثبات. فرض کنید $x_0\notin \overline{co}\{u(t) : t\in S\} = A$. آن‌گاه طبق قضیه جداسازی (۲۳.۲.۱) $y_0\in H$ وجود دارد به طوری که

$$(x_0, y_0) < \inf\{(z, y_0) : z \in A\}.$$

پس

$$\begin{aligned}\inf\{(u(t), y_0) : t \in S\} &\le \mu_t (u(t), y_0)\\ &= (x_0, y_0)\\ &< \inf\{(z, y_0) : z \in A\}\\ &\le \inf\{(u(t), y_0) : t \in S\}.\end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین $x_0 \in \overline{co}\{u(t) : t \in S\} \subset C$.

تعریف ۳. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است. خانواده $S = \{T_t : t \in S\}$ از نگاشت‌های C به‌توی خودش را نمایش پیوسته S به عنوان نگاشت‌های ناگسترشی روی C به‌توی خودش نامیم، هرگاه S در شرایط زیر صدق کند

۱. برای هر $t, s \in S$ و هر $x \in C$، $T_{ts}x = T_t T_s x$

۲. برای هر $x \in C$، نگاشت $s \mapsto T_s x$ از S به‌توی C پیوسته باشد و

۳. برای هر $t \in S$، هر $x, y \in C$، $\|T_t x - T_t y\| \le \|x - y\|$.

فرض کنید $F(S)$ نشان دهنده مجموعه $\{x \in C : T_s x = x, \ \forall s \in S\}$ شامل نقاط ثابت مشترک نگاشت‌های T_s برای $s \in S$ است. از نقطه نظر خوش تعریفی، $F(S)$ یک زیرمجموعه بسته و محدب از C است. (قضیه ۸.۱ را ببینید).

قضیه ۴. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است، و فرض کنید S یک نیم‌گروه نیم توپولوژیک است به طوری که $C(S)$ دارای یک میانگین پایای چپ است. فرض کنید $S = \{T_t : t \in S\}$ نمایش پیوسته S به عنوان نگاشت‌های ناگسترشی روی C به‌توی خودش است. در این صورت احکام زیر باهم معادلند.

الف) به ازای x یی از C، مجموعه $\{T_t x : t \in S\}$ کراندار است.

ب) برای هر x از C، مجموعه $\{T_t x : t \in S\}$ کراندار است.

ج) $F(S) \neq \emptyset$.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ج). فرض کنید μ میانگین پایای چپ روی $C(S)$ است. قرار می‌دهیم

$$u(t) = T_t x, \quad \forall t \in S.$$

نتیجه می‌شود که $u: S \to C$ تابعی پیوسته با

$$\sup_{t\in S} \|u(t)\| < +\infty$$

است. پس عضو منحصر بفرد $x_0 \in C$ وجود دارد به طوری که برای هر $y \in H$،

$$\mu_t(T_t x, y) = \mu_t(u(t), y) = (x_0, y).$$

چنین عضو x_0 یک نقطه ثابت مشترک T_sها برای $s \in S$ است. در واقع برای $s,t \in S$ داریم

$$\begin{aligned} 0 &\le \|T_t x - x_0\|^2 - \|T_{st}x - T_s x_0\|^2 \\ &= \|T_t x - T_s x_0\|^2 + 2(T_t x - T_s x_0, T_s x_0 - x_0) \\ &\quad + \|T_s x_0 - x_0\|^2 - \|T_{st}x - T_s x_0\|^2, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 &\le \mu_t\big(\|T_t x - T_s x_0\|^2 + 2(T_t x - T_s x_0, T_s x_0 - x_0) \\ &\quad + \|T_s x_0 - x_0\|^2 - \|T_{st}x - T_s x_0\|^2\big) \\ &= \mu_t\|T_t x - T_s x_0\|^2 + 2(x_0 - T_s x_0, T_s x_0 - x_0) \\ &\quad + \|T_s x_0 - x_0\|^2 - \mu_t\|T_t x - T_s x_0\|^2 \\ &= -\|x_0 - T_s x_0\|^2. \end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $s \in S$،

$$\|x_0 - T_s x_0\|^2 = 0,$$

یعنی $x_0 \in F(S)$.

(ج) $\Leftarrow$ (ب). فرض کنید $x_0 \in F(S)$. آنگاه برای هر $x \in C$ داریم

$$\|T_t x - x_0\| = \|T_t x - T_t x_0\| \le \|x - x_0\|, \quad \forall t \in S$$

بنابراین $\{T_t x : t \in S\}$ کراندار است.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). واضح است.

توضیح ۵. فرض کنید $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ یک نمایش پیوسته S به عنوان نگاشت‌های ناگسترشی

روی C بتوی خودش است. آن گاه، همان گونه که در اثبات قضیه (۴) دیده شد، $F(\mathcal{S})\neq\emptyset$ نتیجه می‌دهد که $\{T_t x : t\in S\}$ برای هر $x\in C$ کراندار است. پس برای هر میانگین μ روی $C(S)$ و $x\in C$ عضو منحصر به فرد $x_0\in C$ وجود دارد به طوری که

$$\mu_t(T_t x, y) = (x_0, y), \qquad \forall y\in H.$$

حال قرار می‌دهیم

$$T_\mu x = x_0, \qquad \forall x\in C$$

و نتیجه زیر را داریم.

قضیه ۶. فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک است به طوری که $C(S)$ دارای یک میانگین پایای μ است و فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H باشد. فرض کنید $\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ یک نمایش پیوسته از S به عنوان نگاشت‌های ناگسترشی روی C بتوی خودش است و $F(\mathcal{S})\neq\emptyset$. آن گاه T_μ در شرایط زیر صدق می‌کند

الف) برای هر $t\in S$، $T_\mu T_t = T_t T_\mu = T_\mu$.

ب) T_μ یک retraction ناگسترشی از C بروی $F(\mathcal{S})$ است، یعنی

$$\|T_\mu x - T_\mu y\| \le \|x-y\|, \qquad \forall x,y\in C$$

و $T_\mu^2 = T_\mu$.

ج) برای هر $x\in C$، $T_\mu x\in \overline{co}\{T_t x : t\in S\}$.

اثبات. الف) از تعریف T_μ و قضیه (۴)، واضح است که T_μ یک نگاشت از C بروی $F(\mathcal{S})$ است به طوری که

$$T_t T_\mu = T_\mu, \qquad \forall t\in S.$$

چون μ پایای راست است، برای $s\in S$ و $x\in C$ داریم

$$\begin{aligned}(T_\mu T_s x, y) &= \mu_t(T_t T_s x, y)\\ &= \mu_t(T_{ts} x, y)\\ &= \mu_t(T_t x, y)\\ &= (T_\mu x, y), \qquad \forall y\in H.\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $s \in C$ و $x \in S$،

$$T_\mu T_s x = T_\mu x.$$

ب) برای هر $x, y \in C$ داریم

$$\begin{aligned}
\|T_\mu x - T_\mu y\|^2 &= (T_\mu x - T_\mu y, T_\mu x - T_\mu y) \\
&= \mu_t (T_t x - T_t y, T_\mu x - T_\mu y) \\
&\le \|\mu\| \sup_{t \in S} |(T_t x - T_t y, T_\mu x - T_\mu y)| \\
&\le \sup (\|T_t x - T_t y\| \cdot \|T_\mu x - T_\mu y\|) \\
&\le \|x - y\| \, \|T_\mu x - T_\mu y\|,
\end{aligned}$$

بنابراین T_μ ناگسترشی است. همچنین، واضح است که $T_\mu^2 = T_\mu$ (از تعریف T_μ).

ج) چون μ یک میانگین روی $C(S)$ است، طبق لم (۳) داریم

$$T_\mu x \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}, \quad \forall x \in C.$$

در ادامه بخش حاضر، قضیه نقطه ثابت دیگری برای نیم‌گروه‌های نگاشت‌های ناگسترشی با حالتی را ثابت می‌کنیم.

تعریف ۷. یک نیم‌گروه نیم توپولوژیک S را برگشت‌پذیر چپ نامیم، هرگاه هر دو ایدآل راست بسته آن دارای اشتراک ناتهی باشند.

توضیح ۸. اگر S یک نیم‌گروه برگشت‌پذیر چپ باشد، $(S, \le)$ یک سیستم مستقیم شده خواهد بود، اگر رابطه دوتایی "$\le$" روی S را توسط

$$a \le b \iff \{b\} \cup \overline{bS} \subset \{a\} \cup \overline{aS},$$

تعریف کنیم. در واقع، واضح است که برای هر $a \in S$، $a \le a$. همچنین اگر $a \le b$، $b \le c$ آنگاه $a \le c$. فرض کنید $a, b \in S$، چون S چپ است، داریم

$$\overline{aS} \cap \overline{bS} \neq \emptyset.$$

فرض کنید $c \in \overline{aS} \cap \overline{bS}$. در این صورت تورهای $\{s_\alpha\}$ و $\{s_\beta\}$ در S وجود دارند به طوری که

$$a s_\alpha \to c, \quad b s_\beta \to c.$$

پس برای هر $s \in S$ داریم

$$a s_\alpha s \to cs, \quad b s_\beta s \to cs,$$

و بنابراین $cs \in \overline{aS} \cap \overline{bS}$ یعنی $cS \subset \overline{aS} \cap \overline{bS}$ در نتیجه $\overline{cS} \subset \overline{aS} \cap \overline{bS}$ ، بنابراین $\{c\} \cup \overline{cS} \subset \{a\} \cup \overline{aS}$ و $\{c\} \cup \overline{cS} \subset \{b\} \cup \overline{bS}$ یعنی $c \in S$ وجود دارد به طوری که

$$a \le c, \quad b \le c.$$

به طور مشابه، یک نیم گروه نیم توپولوژیک برگشت پذیر راست نیز یک دستگاه مستقیم شده است هرگاه رابطه دوتایی "$\le$" روی S توسط

$$a \le b \Leftrightarrow \{b\} \cup \overline{Sb} \subset \{a\} \cup \overline{Sa},$$

تعریف شود. به وضوح یک نیم گروه نیم توپولوژیک جابجایی برگشت پذیر چپ و راست است.

قضیه ۹. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته محدب از فضای هیلبرت H است و فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک برگشت پذیر چپ باشد، فرض کنید که نمایش پیوسته S به عنوان نگاشت‌های ناگسترشی روی C به توی خودش است و $\{T_s x : s \in S\}$ به ازای x ای در C کراندار است، آنگاه $x_0 \in C$ وجود دارد به طوری که برای هر $s \in S$ ، $T_s x_0 = x_0$.

اثبات. چون $\{T_s x : s \in S\}$ به ازای x ای در C کراندار است، می‌توانیم تابع g با مقادیر حقیقی را روی C توسط $g(z) = \limsup_t \|T_t x - z\|$ برای هر $z \in C$ تعریف کنیم. در این صورت g تابعی پیوسته و محدب روی C است. نشان می‌دهیم که اگر $\|z_n\| \to \infty$ آنگاه $g(z_n) \to \infty$ (تمرین). طبق قضیه (۱۵.۳.۱) عضو $x_0 \in C$ وجود دارد به طوری که $g(x_0) = \min\{g(z) : z \in C\}$. مشابه اثبات قضیه (۱.۱)، نتیجه می‌شود که چنین عضو $x_0 \in C$ ای منحصر بفرد است. فرض کنید $s \in S$، آنگاه

$$\begin{aligned} g(T_s x_0) &= \limsup_t \|T_t x - T_s x_0\| \\ &\le \limsup_t \|T_{st} x - T_s x_0\| \\ &\le \limsup_t \|T_t x - x_0\| \\ &= g(x_0) \end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $s \in S$ داریم $T_s x_0 = x_0$.