۴.۳ فضاهای ارگودیک غیرخطی تعمیم یافته

در این بخش، قضیه ارگودیک غیرخطی بایلون را به حالتی کلی‌تر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید S یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک است و فرض کنید $C(S)$ فضای باناخ تمام توابع با مقدار حقیقی پیوسته کراندار با نرم سوپریمم است. برای $f\in C(S)$ و $c\in\mathbb{R}$، می‌نویسیم

$$f(s)\longrightarrow c, \quad \text{وقتی} \quad s\longrightarrow\infty_{\mathbb{R}}$$

اگر برای هر $\varepsilon>0$ عضو $w\in S$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $t\in S$،

$$|f(tw)-c|<\varepsilon.$$

قضیه ۱. اگر برای $f\in C(S)$ و $c\in\mathbb{R}$،

$$f(s)\longrightarrow c, \quad \text{وقتی} \quad s\longrightarrow\infty_{\mathbb{R}}$$

آن‌گاه برای هر میانگین پایای راست μ روی $C(S)$، $\mu(f)=c$.

اثبات. چون $f(s)\longrightarrow c$ وقتی $s\longrightarrow\infty_{\mathbb{R}}$ پس برای هر $\varepsilon>0$ عضو $w\in S$ وجود دارد به طوری که برای هر $t\in S$،

$$|f(tw)-c|<\varepsilon$$

برای هر میانگین پایای راست μ روی $C(S)$ داریم

$$\begin{aligned}|\mu(f)-c| &= |\mu_t(f(t))-c|\\ &= |\mu_t(f(tw))-c|\\ &\le \|\mu\|\cdot\sup_{t\in S}|f(tw)-c|\le\varepsilon\end{aligned}$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، داریم $\mu(f)=c$.

تبصره ۲. در حالت $S=\mathbb{N}$، قضیه ۱ نتیجه می‌دهد که اگر $x_n\longrightarrow c$ آن‌گاه $\mu_n(x_n)=c$ برای هر حد باناخ μ برقرار است. (قضیه (۷.۴.۱) را ببینید).

لم ۳. اگر $f\in C(S)$ تماماً کاهنده باشد یعنی برای هر $t,s\in S$،

$$f(ts)\le f(s),$$

آن‌گاه وقتی $t \to_{\mathbb{R}} \infty$ داریم

$$f(t) \longrightarrow \inf_{s \in S} f(s).$$

اثبات. فرض کنید $c = \inf_{s \in S} f(s)$. آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$، عضو $s \in S$ وجود دارد بطوریکه $f(s) < c + \varepsilon$. طبق فرض، داریم

$$|f(ts) - c| = f(ts) - c \leq f(s) - c < \varepsilon, \qquad \forall t \in S.$$

بنابراین وقتی $t \to_{\mathbb{R}} \infty$ داریم

$$f(t) \longrightarrow c = \inf_{s \in S} f(s)$$

لم زیر در اثبات قضیه اصلی این بخش نقش مهمی دارد.

لم ۴. فرض کنید S یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیکی و C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است. فرض کنید $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ یک نمایش پیوسته S به عنوان نگاشت‌های ناگسترشی از C بتوی C است و $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. آن‌گاه برای هر دو میانگین پایای ۲ و λ روی $C(S)$، $T_\lambda = T_\mu$.

اثبات. $x \in C$ را ثابت اختیار می‌کنیم. چون $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$، تصویر متریکی P بروی $F(\mathcal{S})$ وجود دارد. طبق لم (۴.۱) داریم

$$(a - Pa, b - Pa) \leq 0, \qquad \forall a \in C, \ \forall b \in F(\mathcal{S}).$$

قرار می‌دهیم

$$g(t) = \|PT_t x - T_t x\|^2, \qquad \forall t \in S$$

آن‌گاه $g \in C(S)$ و

$$\begin{aligned}
g(s) &= \|PT_s x - T_s x\|^2 \\
&\geqslant \|T_t P T_s x - T_t T_s x\|^2 \\
&= \|PT_s x - T_{ts} x\|^2 \\
&= \|PT_s x - PT_{ts} x\|^2 + \|PT_{ts} x - T_{ts} x\|^2 \\
&\quad + 2(PT_s x - PT_{ts} x, PT_{ts} x - T_{ts} x).
\end{aligned}$$

از $(PT_s x - PT_{ts} x, PT_{ts} x - T_{ts} x) \geq 0$ داریم

$$g(s) - \|PT_{ts} x - T_{ts} x\|^2 \geq \|PT_s - PT_{ts} x\|^2 \geq 0$$

بنابراین

$$g(s) \geq g(ts), \qquad \forall t, s \in S$$

که با توجه به لم (۳) داریم: برای $t \to \infty_{\mathbb{R}}$

$$g(t) \longrightarrow \inf_{s \in S} g(s)$$

از بانابودن میانگین μ روی $C(S)$، عضو $q \in C$ را تعریف می‌کنیم به طوری که

$$\mu_t (PT_t x, y) = (q, y), \qquad y \in H$$

در نتیجه داریم

$$\mu_t (PT_{ts} x, y) = \mu_t (PT_t x, y) = (q, y) \qquad \forall y \in H, \forall s \in S.$$

پس طبق لم (۴)

$$q \in \overline{Co}\{PT_{ts} x : t \in S\}, \qquad \forall s \in S.$$

از عبارت

$$\|PT_s x - PT_{ts} x\|^2 \leq g(s) - \inf_{w \in S} g(w) \qquad \forall s \in S,$$

نتیجه می‌شود که

$$\|PT_s x - q\|^2 \leq g(s) - \inf_{w \in S} g(w), \qquad \forall t \in S.$$

بنابراین وقتی $s \to \infty_{\mathbb{R}}$،

$$\|PT_s x - q\| \longrightarrow 0,$$

با توجه به لم (۳)

$$\lambda_t (PT_t x, y) = (q, y)$$

برای هر میانگین بانای راست λ. حال با نشان دادن اینکه برای هر میانگین بانای λ $T_\lambda x = q$ حکم حاصل می‌شود. چون $T_{\lambda x} \in F(S)$ (طبق قضیه (۹.۳)) داریم

$$(PT_t x - T_t x, PT_t x - T_\lambda x) \leq 0 \qquad \forall t \in S.$$

در نتیجه برای هر $t \in S$ داریم

$$(PT_t x - T_t x, q - T_\lambda x) \leq (PT_t x - T_t x, q - PT_t x)$$
$$\leq \|PT_t x - T_t x\| \, \|q - PT_t x\|.$$

با توجه به $F(S)\neq\emptyset$ و کراندار بودن مجموعه‌های $\{T_t x : t\in S\}$ و $\{PT_t x : t\in S\}$، عدد حقیقی $M>0$ وجود دارد به طوری که برای هر $t\in S$،

$$(PT_t x - T_t x,\, q - T_\lambda x) \le M\|q - PT_t x\|,$$

بنابراین

$$\lambda_t(PT_t x - T_t x,\, q - T_\lambda x) \le M\lambda_t\|q - PT_t x\|.$$

چون وقتی $t\to\infty_{\mathbb{R}}$ داریم $\|q-PT_t x\|\to 0$ پس $\lambda_t\|q-PT_t x\|=0$. بنابراین

$$\lambda_t(PT_t x - T_t x,\, q - T_\lambda x)\le 0$$

در نتیجه

$$(q-T_\lambda x,\, q-T_\lambda x)\le 0$$

پس $\|q-T_\lambda x\|^2=0$ یعنی $q=T_\lambda x$ و این اثبات را کامل می‌کند.

حال در ادامه بحث، قضیه اصلی مورد نظرمان حاضر را ثابت می‌کنیم. قبل از آن به تعریف زیر توجه داریم.

تعریف ۵. تور $\{\mu_\alpha : \alpha\in A\}$ از میانگین‌ها روی $C(S)$ را مجانباً پایا (یا به طور مجانبی پایا) نامیم، اگر برای هر $f\in C(S)$ و هر $s\in S$،

$$\mu_\alpha(f)-\mu_\alpha(l_s f)\to 0,$$

و

$$\mu_\alpha(f)-\mu_\alpha(r_s f)\to 0.$$

قضیه ۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیکی و C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است. فرض کنید $\{T_t : t\in S\}=$ که نمایش هندسی از S به عنوان نگاشت‌های ناگسترشی روی C به توی C است و $F(S)\neq\emptyset$. اگر تور $\{\mu_\alpha\}$ از میانگین‌ها روی $C(S)$ به طور مجانبی پایا باشد آنگاه برای هر $x\in C$، $\{T_{\mu_\alpha}x\}$ به طور ضعیف به x_0 ای در $F(S)$ همگرا است. در این حالت، قرار می‌دهیم

$$Qx=x_0,\quad \forall x\in C$$

Q یک درون بر ناگسترشی از C به روی $F(S)$ است به طوری که برای هر $t\in S$،

$$QT_t = T_t Q = Q$$

و برای هر $x\in C$،

$$Qx \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}.$$

اثبات. چون $\{\mu_\alpha : \alpha\in I\}$ یک تور از میانگین‌ها روی $C(S)$ است، پس دارای یک نقطه انباشتگی μ در توپولوژی ضعیف* است. نشان می‌دهیم μ روی $C(S)$ یک میانگین پایا است. در واقع، چون مجموعه

$$\{\lambda \in C(S)^* : \lambda(1) = \|\lambda\| = 1\}$$

در توپولوژی ضعیف* بسته است، پس μ روی $C(S)$ یک میانگین است. علاوه بر آن، برای هر $\varepsilon>0$، $s\in S$ و هر $f\in C(S)$، عضو $\alpha_0\in I$ وجود دارد به طوری که برای هر $\alpha \ge \alpha_0$

$$|\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_s f)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

برای چنین α_0 ای، از آنجا که μ یک نقطه انباشتگی مجموعه $\{\mu_\alpha : \alpha\in I\}$ است، می‌توانیم $\beta\ (\ge \alpha_0)$ را اختیار کنیم به طوری که

$$|\mu_\beta(f) - \mu(f)| \le \frac{\varepsilon}{3},$$

و

$$|\mu_\beta(l_s f) - \mu(l_s f)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|\mu(f) - \mu(l_s f)| &\le |\mu(f) - \mu_\beta(f)| + |\mu_\beta(f) - \mu_\beta(l_s f)| \\ &\quad + |\mu_\beta(l_s f) - \mu(l_s f)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، داریم

$$\mu(f) = \mu(l_s f), \quad \forall f\in C(S),\ \forall s\in S.$$

به طور مشابه، می‌توان نشان داد که

$$\mu(f) = \mu(r_s f), \quad \forall f\in C(S),\ \forall s\in S.$$

حال قرار می‌دهیم $Q = T_\mu$. از قضیه (۶.۳) نتیجه می‌شود Q یک درون بر ناگسترشی از

به روی $F(S)$ است به طوری که برای هر $t\in S$

$$QT_t=T_tQ=Q,$$

و برای هر $x\in C$،

$$Qx\in \overline{co}\{T_tx : t\in S\}.$$

نهایتاً، نشان می‌دهیم که برای هر $x\in C$، $\{T_{\mu_\alpha}x\}$ به طور ضعیف همگرا به Qx است. چون $\{T_{\mu_\alpha}x : \alpha\in I\}$ یک تور کراندار در C است، پس زیرتور $\{T_{\mu_{\alpha_\beta}}x\}$ از $\{T_{\mu_\alpha}x\}_{\alpha\in I}$ همگرای ضعیف به x_0یی در C وجود دارد. اگر λ نقطه انباشتگی $\{\mu_{\alpha_\beta}\}$ در توپولوژی ضعیف* باشد، آن گاه λ یک نقطه انباشتگی $\{\mu_\alpha\}$ نیز هست، بنابراین λ یک میانگین پایای $C(S)$ است. از $T_{\mu_{\alpha_\beta}}x\longrightarrow x_0$، برای هر $y\in H$ داریم

$$\lambda_t(T_tx,y)=(x_0,y),$$

یعنی $T_\lambda x=x_0$. چون $T_\lambda=T_\mu=Q$ (از لم (۵)) پس $x_0=Qx$ و در نتیجه

$$T_{\mu_\alpha}x\longrightarrow Qx,$$

که این اثبات را کامل می‌کند.

تبصره ۷. در قضیه (۶)، درون بر ناگسترشی Q از C به روی $F(S)$ برای تمام تورهای به طور مجانبی پایا یکی است.