۵.۴ برخی از قضایای ارگودیک غیرخطی

در این بخش، با استفاده از قضیه ارگودیک غیرخطی تعمیم یافته (قضیه (۶.۴))، برخی از قضایای ارگودیک غیرخطی در فضاهای هیلبرت را بدست می‌آوریم. نخست، قضیه ارگودیک غیرخطی بایلون (قضیه (۳.۲)) را با استفاده از قضیه (۶.۴) ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱. قضیه (۳.۲) (قضیه ارگودیک غیرخطی بایلون) را با استفاده از قضیه (۶.۴) نتیجه بگیرید.

اثبات. فرض کنید $S=\{0,1,2,\dots\}$. برای $f=(x_0,x_1,x_2,\dots)\in B(S)$ تعریف می‌کنیم

$$\mu_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k,\qquad n=1,2,\dots .$$

در این صورت μ_n یک میانگین است. زیرا، به وضوح μ_n خطی است. همچنین برای هر f در $B(S)$،

$$|\mu_n(f)|\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f\|=\|f\|,$$

و

$$\mu_n(1)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1=1.$$

پس $\|\mu_n\|=\mu_n(1)=1$ یعنی μ_n یک میانگین است.

حال برای $f=(x_0,x_1,x_2,\dots)\in B(S)$ و $m\in S$ داریم

$$\begin{aligned}|\mu_n(f)-\mu_n(r_mf)|&=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+m}\right|\\&\le\frac{1}{n}(2m\|f\|)\longrightarrow 0,\qquad n\to\infty.\end{aligned}$$

بنابراین $\{\mu_n\}$ به طور مجانبی پایا است. علاوه بر آن، برای $x\in C$ و $y\in H$ داریم

$$\begin{aligned}(\mu_n)_k(T^kx,y)&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(T^kx,y)\\&=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx,\ y\right)\end{aligned}$$

پس

$$T_{\mu_n}x=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx$$

حال از قضیه (۶.۴) نتیجه می‌شود که $T_{\mu_n}x=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx$ به طور ضعیف همگرا به yی در $F(T)$ است و این قضیه بایلون را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۲. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است و فرض کنید T یک نگاشت ناگسترشی از C توی خودش است و $F(T)\neq\emptyset$. آنگاه برای هر $x\in C$،

$$S_r x = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k T^k x$$

به طور ضعیف به x ای در $F(T)$ وقتی $r\uparrow 1$ همگرا است.

اثبات. فرض کنید $S=\{0,1,2,\dots\}$. برای $f=(x_0,x_1,\dots)\in B(S)$ و r با $0<r<1$ تعریف می‌کنیم

$$\mu_r(f) = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_k .$$

در این صورت، $\{\mu_r : 0<r<1\}$ یک تور به طور مجانبی پایا از میانگین‌ها روی $B(S)$ است. زیرا برای $f=(x_0,x_1,x_2,\dots)\in B(S)$،

$$\begin{aligned}
|\mu_r(f)| &= (1-r)\left|\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_k\right| \\
&\le (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k \|f\| \\
&= (1-r)\frac{1}{1-r}\|f\| = \|f\|,
\end{aligned}$$

و

$$\mu_r(1) = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k = (1-r)\frac{1}{1-r} = 1.$$

بنابراین برای هر r با $0<r<1$، داریم $\|\mu_r\| = \mu_r(1) = 1$. حال، چون برای هر $m\in S$،

$$\begin{aligned}
|\mu_r(f)-\mu_r(r_m f)| &= \left|(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_k - (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_{k+m}\right| \\
&= \left|(1-r)\sum_{k=0}^{m-1} r^k x_k - (1-r^m)(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_{k+m}\right| \\
&\le (1-r^m)\|f\| + (1-r^m)\|f\| \\
&= 2(1-r^m)\|f\| \longrightarrow 0, \qquad r\uparrow 1,
\end{aligned}$$

پس $\{\mu_r : 0<r<1\}$ به طور مجانبی پایا هستند. علاوه بر آن، از

$$\begin{aligned}
(\mu_r)_k (T^k x, y) &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k (T^k x, y) \\
&= \left((1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k T^k x , y\right)
\end{aligned}$$

داریم $T_{\mu_r} x = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k T^k x$. بنابراین از قضیه (۴.۴) نتیجه می‌شود که

وقتی $r\uparrow 1$، $(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k T^k x$ به طور ضعیف به x یی در $F(T)$ همگرا است.

تعریف ۳. فرض کنید $S=\mathbb{R}^+=\{t\in\mathbb{R}: 0\le t<+\infty\}$ و C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است. در این صورت، خانواده $\mathcal{S}=\{S(t): t\in\mathbb{R}^+\}$ از نگاشت‌ها روی C به‌توی C را نیم‌گروه ناگسترشی روی C نامیم، هرگاه که در شرایط زیر صدق کند

1. برای هر $x\in C$ و هر $t,s\in\mathbb{R}^+$، $S(t+s)x=S(t)S(s)x$.
2. برای هر $x\in C$، $S(0)x=x$.
3. برای هر $x\in C$ نگاشت $t\mapsto S(t)x$ از $\mathbb{R}^+$ به‌توی C پیوسته‌ای است.
4. برای هر $x,y\in C$، $t\in\mathbb{R}^+$، $\|S(t)x-S(t)y\|\le\|x-y\|$.

برای یک نیم‌گروه ناگسترشی روی C، می‌توان قضیه ارگودیک غیرخطی زیر را بیان و اثبات نمود.

قضیه ۴. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است و فرض کنید $\mathcal{S}=\{S(t): t\in\mathbb{R}^+\}$ یک نیم‌گروه ناگسترشی روی C است و $F(\mathcal{S})\neq\emptyset$. آنگاه برای هر $x\in C$،

$$S_\lambda x=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt,$$

وقتی $\lambda\to\infty$ به طور ضعیف همگرا به x_0 یی در $F(\mathcal{S})$ است.

اثبات. فرض کنید $S=\mathbb{R}^+$. برای $f\in C(\mathbb{R}^+)$، تعریف می‌کنیم

$$\mu_\lambda(f)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)\,dt,\qquad \forall\lambda>0.$$

در این صورت $\{\mu_\lambda: 0<\lambda<+\infty\}$ یک تور به طور مجانبی پایا از میانگین‌ها روی $C(\mathbb{R}^+)$ است، زیرا برای $f\in C(\mathbb{R}^+)$،

$$|\mu_\lambda(f)|=\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)\,dt\right|\le\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\|f\|\,dt=\|f\|,$$

و

$$\mu_\lambda(1)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda 1\,dt=1.$$

بنابراین $\|\mu_\lambda\| = \mu_\lambda(1) = 1$. حال برای $h \in \mathbb{R}^+$ داریم

$$\begin{aligned}|\mu_\lambda(f) - \mu_\lambda(r_h f)| &= \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t+h)\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda}\int_h^{\lambda+h} f(t)\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^h f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^{\lambda+h} f(t)\,dt\right| \\ &\le \frac{2\|f\|.h}{\lambda} \longrightarrow 0 \qquad \lambda \to +\infty.\end{aligned}$$

در نتیجه $\{\mu_\lambda : 0<\lambda<\infty\}$ به طور مجانبی پایا است. همچنین برای $x\in C$، $y\in H$ داریم

$$\begin{aligned}(\mu_\lambda)_t\,(S(t)x, y) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda (S(t)x, y)\,dt \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt,\ y\right)\end{aligned}$$

بنابراین $T_{\mu_\lambda}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$. حال از قضیه (۴.۴) نتیجه می‌شود که $\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$ به طور ضعیف همگرا به y_0 ای در $F(S)$ برای $\lambda\to\infty$ است.

به طور مشابه به قضیه زیر داریم.

قضیه ۵. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است و $S=\{S(t): t\in\mathbb{R}^+\}$ یک نیم گروه ناگسترشی روی C باشد. فرض کنید $F(S)\neq\emptyset$. در این صورت برای هر $x\in C$،

$$r\int_0^\infty e^{-rt}S(t)x\,dt,$$

وقتی $r\downarrow 0$، به y_0 ای در $F(S)$ به طور ضعیف همگرا است.

اثبات. فرض کنید $S=\mathbb{R}^+$. برای $f\in C(\mathbb{R}^+)$ تعریف می‌کنیم

$$\mu_r(f) = r\int_0^\infty e^{-rt}f(t)\,dt, \qquad r>0.$$

در نتیجه $\{\mu_r : 0<r<+\infty\}$ یک تور از میانگین‌های به طور مجانبی پایا روی $C(\mathbb{R}^+)$ است. در واقع، برای $f\in C(\mathbb{R}^+)$ داریم

$$\begin{aligned}|\mu_r(f)| &= \left|r\int_0^\infty e^{-rt}f(t)\,dt\right| \\ &\le r\int_0^\infty e^{-rt}\|f\|\,dt = \|f\|,\end{aligned}$$

و

$$\mu_r(1) = r\int_0^\infty e^{-rt}\, 1\, dt = 1,$$

پس $\|\mu_r\| = \mu_r(1) = 1$. حال برای $h \in \mathbb{R}^+$ وقتی $r \downarrow 0$ داریم

$$\begin{aligned}
|\mu_r(f) - \mu_r(r_h f)| &= \left|r\int_0^\infty e^{-rt} f(t)\,dt - r\int_0^\infty e^{-rt} f(t+h)\,dt\right| \\
&= \left|r\int_0^\infty e^{-rt} f(t)\,dt - re^{rh}\int_h^\infty e^{-rt} f(t)\,dt\right| \\
&\le \left|r(1-e^{rh})\int_0^\infty e^{-rt} f(t)\,dt\right| + \left|re^{rh}\int_0^h e^{-rt} f(t)\,dt\right| \\
&\le |1-e^{rh}|\,\|f\| + e^{rh}|1-e^{-rh}|\,\|f\| \\
&= 2|1-e^{rh}|\,\|f\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

بنابراین $\{\mu_r : 0<r<\infty\}$ به طور مجانبی پایاست، همچنین برای هر $x \in C$, $y \in H$ داریم

$$\begin{aligned}
(\mu_r)_t (S(t)x, y) &= r\int_0^\infty e^{-rt} (S(t)x, y)\,dt \\
&= \left(r\int_0^\infty e^{-rt} S(t)x\,dt, y\right),
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$T_{\mu_r} x = r\int_0^\infty e^{-rt} S(t)x\,dt$$

پس از قضیه (۶.۴) نتیجه می‌شود که

$$r\int_0^\infty e^{-rt} S(t)x\,dt$$

به چیزی در $F(S)$ همگرای ضعیف است.

نهایتاً، یک قضیه ارگودیک غیرخطی برای دو نگاشت ناگسترشی جابجایی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۶. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H بوده و فرض کنید S و T نگاشت‌های ناگسترشی از C بتوی خودش هستند به طوری که $ST=TS$. فرض کنید $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$؛ آنگاه برای هر $x \in C$ وقتی $n \to \infty$،

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} S^i T^j x$$

به چیزی در $F(S) \cap F(T)$ به طور ضعیف همگراست.

اثبات. فرض کنید $S' = \{0,1,2,\dots\} \times \{0,1,2,\dots\}$ و

$\mathcal{S} = \{S^iT^j : (i,j)\in S'\}$.

برای هر $f \in B(S)$ تعریف می‌کنیم

$$\mu_n(f) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} f(i,j) \qquad n>0$$

در این صورت $\{\mu_n : n=1,2,\dots\}$ یک دنباله از میانگین‌های به طور مجانبی پایا روی $B(S)$ است.

در واقع، برای هر $(l,m)\in S'$ وقتی $n\to\infty$ داریم

$$|\mu_n(f) - \mu_n(r_{(l,m)}f)| = \left|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} f(i,j) - \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} f(i+l,j+m)\right|$$
$$\le \frac{1}{n^2}\{ln + m(n-l) + ln + m(n-l)\}\|f\|$$
$$= \frac{1}{n^2}\{2n(l+m) - 2ml\}\|f\| \to 0$$

پس $\{\mu_n\}$ به طور مجانبی پایا است. واضح است که $\{\mu_n\}$ یک دنباله از میانگین‌ها روی $B(S)$ اند. همچنین برای هر $x\in C$ و $y\in H$ داریم

$$(\mu_n)_{(i,j)}(S^iT^jx, y) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}(S^iT^jx, y)$$
$$= \left(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} S^iT^jx, y\right)$$

در نتیجه

$$T_{\mu_n}x = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} S^iT^jx.$$

حال از قضیه (۴.۴) نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} S^iT^jx,$$

به x_0 ای در $F(S)\cap F(T)$ همگرای ضعیف است.