۶.۳ قضایای نقطه ثابت برای نیم‌گروه‌های لیپ‌شیتزی

در این بخش، مفهوم زیرمیانگین‌ها که تعمیم میانگین و حدبالایی (lim sup) است را مطرح می‌کنیم. سپس یک قضیه نقطه ثابت برای نیم‌گروه‌های لیپ‌شیتزی در فضاهای هیلبرت را ثابت خواهیم کرد.

تعریف ۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه و X زیرفضایی از $B(S)$ شامل ثابت‌ها است. تابع با مقدار حقیقی μ روی X را یک زیرمیانگین روی X نامیم هرگاه μ در شرایط زیر صدق کند

۱. برای هر $f,g\in X$ ، $\mu(f+g)\leq \mu(f)+\mu(g)$.

۲. برای هر $f\in X$ و هر α ، $0\leq\alpha$ ، $\mu(\alpha f)=\alpha\,\mu(f)$.

۳. برای $f,g\in X$ ، $f\leq g$ نتیجه دهد $\mu(f)\leq\mu(g)$.

۴. برای هر $c\in\mathbb{R}$ ، $\mu(c)=c$.

یک میانگین روی X یک زیرمیانگین روی X است. تابع μ با مقادیر حقیقی تعریف شده توسط

$$\mu(f)=\sup_{s} f(s), \qquad f\in B(S)$$

یک زیرمیانگین روی $B(S)$ است، (تمرین ۱). شبیه به حالت میانگین‌ها، اگر μ یک زیرمیانگین روی X و $f\in X$ باشد، گاهی اوقات $\mu(f)$ را با $\mu_t(f(t))$ نمایش می‌دهیم. لم زیر از نتایج مهم این بخش است.

لم ۲. فرض کنید S یک نیم‌گروه و X زیرفضایی از $B(S)$ شامل ثابت‌ها است و فرض کنید μ یک زیرمیانگین روی X است. فرض کنید $\{x_t : t\in S\}$ زیرمجموعه کرانداری از فضای هیلبرت X است و C یک زیرمجموعه بسته و محدب از H باشد. فرض کنید برای هر $x\in C$ تابع f روی S با مقادیر حقیقی تعریف شده توسط

$$f(t)=\|x_t-x\|^2, \qquad \forall t\in S$$

متعلق به X است. اگر

$$r(x)=\mu_t \|x_t-x\|^2, \qquad \forall x\in C$$

و

$$r=\inf\{r(x): x\in C\},$$

آن‌گاه عضو منحصربفرد $z\in C$ وجود دارد به طوری که $r(z)=r$. علاوه بر آن نامساوی زیر برقرار است.

$$r+\|z-x\|^2\le r(x) \qquad \forall x\in C.$$

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم تابع r با مقادیر حقیقی روی C پیوسته و محدب است. در واقع فرض کنید $x_n\to x$ و

$$M=\sup\{\|x_t-x_n\|+\|x_t-x\| : n=1,2,\dots,\ t\in S\}$$

آن‌گاه از

$$\begin{aligned}\|x_t-x_n\|^2-\|x_t-x\|^2&=(\|x_t-x_n\|+\|x_t-x\|)(\|x_t-x_n\|+\|x_t-x\|)\\&\le M\ \big|\|x_t-x_n\|-\|x_t-x\|\big|\\&\le M\ \|x_n-x\|\end{aligned}$$

برای هر $n=1,2,\dots$ و $t\in S$ داریم

$$\mu_t\|x_t-x_n\|^2\le \mu_t\|x_t-x\|^2+M\|x_n-x\|.$$

به طور مشابه

$$\mu_t\|x_t-x\|^2\le \mu_t\|x_t-x_n\|^2+M\|x_n-x\|.$$

پس

$$|r(x_n)-r(x)|\le M\|x_n-x\|.$$

در نتیجه r روی C پیوسته است. فرض کنید α و β اعداد نامنفی بوده و $\alpha+\beta=1$ و $x,y\in C$ آن‌گاه از نامساوی

$$\|x_t-(\alpha x+\beta y)\|^2\le \alpha\|x_t-x\|^2+\beta\|x_t-y\|^2,$$

نتیجه می‌شود که

$$r(\alpha x+\beta y)\le \alpha r(x)+\beta r(y).$$

یعنی r روی C محدب است. می‌توان علاوه بر آن ثابت کرد که اگر $\|x_n\|\to\infty$ آن‌گاه

$r(x_n) \to \infty$. بنابراین از قضیه (۱۵.۳.۱) نتیجه می‌شود که عضو $z \in C$ با $r(z)=r$ وجود دارد. حال نشان می‌دهیم چنین عضو z یی در C منحصر بفرد است. برای هر $x \in C$، $t \in S$ و λ با $0<\lambda<1$، داریم

$$\begin{aligned}
\|x_t-(\lambda x+(1-\lambda)z)\|^2 &= \|x_t - z + \lambda(z-x)\|^2 \\
&= \|x_t-z\|^2 + 2\lambda(x_t-z, z-x) + \lambda^2\|z-x\|^2 \\
&= \|x_t-z\|^2 + \lambda\|x_t-x\|^2 - \lambda\|x_t-z\|^2 - \lambda\|z-x\|^2 + \lambda^2\|z-x\|^2 \\
&= (1-\lambda)\|x_t-z\|^2 + \lambda\|x_t-x\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|z-x\|^2
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
r &\le r(\lambda x+(1-\lambda)z) \\
&\le (1-\lambda)r + \lambda r(x) - \lambda(1-\lambda)\|z-x\|^2.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$r \le r(x) - (1-\lambda)\|z-x\|^2.$$

در نتیجه وقتی $\lambda \to 0$ داریم

$$r \le r(x) - \|z-x\|^2$$

یعنی اگر $r=r(u)$ آن‌گاه $z=u$.

تعریف ۴. برای $s \in S$ و $f \in B(S)$، تعریف کرده‌ایم که

$$\ell_s f(t)=f(st), \qquad r_s f(t)=f(ts), \qquad \forall t \in S.$$

فرض کنید X یک زیرفضای $B(S)$ شامل ثابت‌ها است که ℓ_s-پایا است، یعنی برای هر $s \in S$،

$$\ell_s(X) \subset X.$$

در این صورت زیرمیانگین μ روی X را پایای چپ نامیم، اگر برای هر $s \in S$ و هر $f \in X$،

$$\mu(f)=\mu(\ell_s f).$$

همچنین آن را زیرپایای چپ گوییم، اگر برای هر $s \in S$ و هر $f \in X$،

$$\mu(f) \le \mu(\ell_s f).$$

حال یک قضیه نقطه ثابت که به طور همزمان تعمیم قضایای (۴.۳) و (۹.۳) است را بیان می‌کنیم

اما قبل از آن تعاریف زیر را داریم.

تعریف ۴. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت است. نگاشت $T: C \to C$ را لیپ‌شیتزی نامیم، اگر عدد نامنفی k وجود داشته باشد به طوری که

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

تعریف ۵. فرض کنید S یک نیم‌گروه است. خانواده $S = \{T_s : s \in S\}$ که از نگاشت‌های C توی C را یک نیم‌گروه لیپ‌شیتزی روی C نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کند

۱. برای هر $s, t \in S$ و هر $x \in C$، $T_{st}x = T_s T_t x$.

۲. برای هر $s \in S$، T_s یک نگاشت لیپ‌شیتزی از C بتوی C باشد یعنی $k_s \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\|T_s x - T_s y\| \leq k_s \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

یک نیم‌گروه لیپ‌شیتزی $S = \{T_s : s \in S\}$ روی C با ثابت‌های لیپ‌شیتزی k_s برای $s \in S$ را k-لیپ‌شیتز یکنواخت نامیم اگر برای هر $s \in S$،

$$k_s = k.$$

قضیه ۶. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H است و فرض کنید X یک زیرفضای l_1-پایا از $B(S)$ شامل ثابت‌هاست که دارای زیرمیانگین زیرپایای μ است. فرض کنید $S = \{T_s : s \in S\}$ یک نیم‌گروه لیپ‌شیتزی روی C است و $\{T_s x : s \in S\}$ به ازای xای در C کراندار است. اگر برای هر $u, v \in C$ تابع f با مقادیر حقیقی روی S که توسط

$$f(t) = \|T_t u - v\|^2, \quad \forall t \in S$$

تعریف شود و تابع g روی S که توسط

$$g(t) = k_t^2 \quad \forall t \in S$$

تعریف شده و متعلق به X باشد و $\mu_s(k_s^2) < 2$ آنگاه $z \in C$ وجود دارد به طوری که برای هر $s \in S$، $T_s z = z$.

اثبات. چون $\{T_s x : s \in S\}$ کراندار است، پس برای هر $y \in C$، $\{T_s y : s \in S\}$ کراندار است. با توجه به لم (۲)، به طور استقرایی دنباله $\{x_n\}$ در C را می‌سازیم به طوری که $x_0 = x$ و برای $n = 1, 2, \dots$،

$$\mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2 = \min_{y \in C} \mu_t \|T_t x_{n-1} - y\|^2$$

مجدداً با توجه به لم (۲) داریم

$$\|x_n - y\|^2 \le \mu_t \|T_t x_{n-1} - y\|^2 - \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2, \quad \forall y \in C, \qquad (1)$$

قرار می‌دهیم $y = T_s x_n$ داریم

$$\begin{aligned}
\|x_n - T_s x_n\|^2 &\le \mu_t \|T_t x_{n-1} - T_s x_n\|^2 - \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2 \\
&\le \mu_t \|T_{st} x_{n-1} - T_s x_n\|^2 - \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2 \\
&\le k_s^2 \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2 - \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2 \\
&= (k_s^2 - 1) \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2,
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
\mu_s \|T_s x_n - x_n\|^2 &\le \mu_s (k_s^2 - 1) \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2 \\
&\le \{\mu_s (k_s^2) - 1\} \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2.
\end{aligned}$$

یعنی

$$\mu_s \|T_s x_n - x_n\|^2 \le k \, \mu_t \|T_t x_{n-1} - x_n\|^2,$$

که در آن $k = \mu_s (k_s^2) - 1$. از (۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\mu_s \|T_s x_n - x_n\|^2 &\le k \, \mu_s \|T_s x_{n-1} - x_n\|^2 \\
&\le k \, \mu_s \|T_s x_{n-1} - x_{n-1}\|^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

چون

$$\|x_n - x_{n-1}\|^2 \le 2 \|x_n - T_s x_{n-1}\|^2 + 2 \|T_s x_{n-1} - x_{n-1}\|^2$$

از (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_{n-1}\|^2 &\le 2 \mu_s \|x_n - T_s x_{n-1}\|^2 + 2 \mu_s \|T_s x_{n-1} - x_{n-1}\|^2 \\
&\le 4 \mu_s \|T_s x_{n-1} - x_{n-1}\|^2 \\
&\le 4k \, \mu_s \|T_s x_{n-2} - x_{n-2}\|^2 \le \dots \le 4k^{n-1} \mu_s \|T_s x_0 - x_0\|^2.
\end{aligned}$$

توجه داریم که $k<1$، پس $\{x_n\}$ یک دنباله کشی در C و بنابراین همگرا به z ای در C است. از (۲) داریم

$$\mu_s\|T_s x_n - x_n\|^2 \le k^n \mu_s \|T_s x_0 - x_0\|^2, \qquad n=1,2,\dots$$

و بنابراین وقتی $n\to\infty$،

$$\mu_s\|T_s x_n - x_n\|^2 \longrightarrow 0 .$$

چون برای $s\in S$،

$$\begin{aligned}\|T_s z - z\|^2 &\le 3\|z-x_n\|^2 + 3\|x_n - T_s x_n\|^2 + 3\|T_s x_n - T_s z\|^2\\ &\le 3(1+k_s^2)\|z-x_n\|^2 + 3\|x_n - T_s x_n\|^2,\end{aligned}$$

داریم

$$\mu_s\|T_s z - z\|^2 \le 9\|z-x_n\|^2 + 3\mu_s\|x_n - T_s x_n\|^2,$$

و بنابراین $\mu_s\|T_s z - z\| = 0$. بنابراین برای هر $a\in S$ داریم

$$\begin{aligned}\|z-T_a z\|^2 &\le 2\mu_s\|z - T_s z\|^2 + 2\mu_s\|T_s z - T_a z\|^2\\ &= 2\mu_s\|T_s z - T_a z\|^2\\ &\le 2\mu_s\|T_{as} z - T_a z\|^2\\ &\le 2k_a^2\mu_s\|T_s z - z\|^2 = 0\end{aligned}$$

و این نتیجه می‌دهد که برای هر $a\in S$،

$$z = T_a z .$$

تعریف ۷. فرض کنید S یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک است. $f\in C(S)$ را یک تابع کراندار پیوسته یکنواخت راست نامیم، هرگاه نگاشت $s\mapsto r_s f$ پیوسته باشد. فضای تمام توابع کراندار پیوسته یکنواخت راست را با $RUC(S)$ نمایش می‌دهیم.

$RUC(S)$ یک زیرجبر بسته از $C(S)$ شامل ثابت‌ها است و تحت l_s و r_s برای $s\in S$ پایاست. با توجه به قضیه (۶) دو قضیه نقطه ثابت که به ترتیب توسط ایشی‌هارا ـ تاکاهاشی و داونینگ ـ ری ثابت شده‌اند را بیان کرد.

قضیه ۸. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته محدب از فضای هیلبرت H است و فرض کنید S یک نیم‌گروه نیم توپولوژیک است به طوری که $RUC(S)$ دارای یک میانگین پایای چپ است. فرض کنید $S=\{T_s : s\in S\}$ نیم‌گروه k-لیپ‌شیتزی یکنواخت روی C با $k<\sqrt{2}$ است به طوری که برای هر $x\in C$ نگاشت $s\mapsto T_s x$ از S توی C پیوسته است. فرض کنید $\{T_s x : s\in S\}$ برای x‌ای در C کراندار باشد. آن‌گاه $x_0\in C$ وجود دارد به طوری که برای هر $s\in S$، $T_s x_0=x_0$.

اثبات. نشان می‌دهیم برای هر $z\in C$ تابع h با مقادیر حقیقی تعریف شده توسط

$$h(t)=\|T_t x-z\|^2 \qquad \forall t\in S$$

متعلق به $RUC(S)$ است. در واقع، قرار دهید $M=2\sup_{t\in S}\|T_t x-z\|$، هر s,u در S داریم

$$\begin{aligned}
\|r_s h-r_u h\| &= \sup_{t\in S}|(r_s h)(t)-(r_u h)(t)|\\
&= \sup_{t\in S}|h(ts)-h(tu)|\\
&= \sup_{t\in S}\left|\|T_{ts}x-z\|^2-\|T_{tu}x-z\|^2\right|\\
&= \sup_{t\in S}\left|(\|T_{ts}x-z\|-\|T_{tu}x-z\|)(\|T_{ts}x-z\|+\|T_{tu}x-z\|)\right|\\
&\le M\sup_{t\in S}\|T_{ts}x-T_{tu}x\|\\
&\le Mk\|T_s x-T_u x\|.
\end{aligned}$$

بنابراین اگر $u\longrightarrow s$ آن‌گاه $r_u h\longrightarrow r_s h$ و این نتیجه می‌دهد که $h\in RUC(S)$. با توجه به قضیه (۶) حکم حاصل می‌شود.

قضیه ۹. (قضیه داونینگ-ری). فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته محدب از فضای هیلبرت H است. فرض کنید S یک نیم‌گروه نیم توپولوژیک برگشت‌پذیر چپ است. فرض کنید $S=\{T_s : s\in S\}$ یک نیم‌گروه k-لیپ‌شیتزی یکنواخت روی C با $k<\sqrt{2}$ است و $\{T_t x : t\in S\}$ برای x‌ای در C کراندار است. آن‌گاه $x_0\in C$ وجود دارد به طوری که برای هر $s\in S$، $T_s x_0=x_0$.

اثبات. تابع μ با مقادیر حقیقی تعریف شده بر $C(S)$ توسط

$$\mu(f)=\limsup_s f(s) \qquad \forall f\in C(S),$$

را در نظر بگیرید. μ یک زیرمیانگین زیرپایای چپ روی $C(S)$ است. طبق قضیه (۶) حکم حاصل می‌شود.

تبصره ۱۰. برای نیم‌گروه لیپ‌شیتز $S=\{T_s : s\in S\}$ روی C، مجموعه تمام نقاط ثابت مشترک نگاشت‌های T_s برای $s\in S$ را با $F(S)$ نمایش می‌دهیم. قضیه لم زیر وقتی که فضاهای ارگودیک غیرخطی برای نیم‌گروه‌های لیپ‌شیتزی در فضاهای هیلبرت را در نظر می‌گیریم، بسیار با اهمیت است.

قضیه ۱۱. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب در H و $S=\{T_s : s\in S\}$ نیم‌گروه لیپ‌شیتز روی C با $\inf_s \sup_t k_{ts}^2 \le 1$ است. آنگاه $F(S)$ بسته و محدب است.

اثبات. بسته بودن $F(S)$ واضح است. برای بررسی تحدب، کافی است ثابت کنیم $z=\frac{x+y}{2}\in F(S)$ برای هر $x,y\in F(S)$. فرض کنید $s,t\in S$. داریم

$$\|T_{ts}z-x\|^2=\|T_{ts}z-T_{ts}x\|^2\le k_{ts}^2\|z-x\|^2=\frac{1}{4}k_{ts}^2\|x-y\|^2,$$

و به طور مشابه

$$\|T_{ts}z-y\|^2\le\frac{1}{4}k_{ts}^2\|x-y\|^2.$$

بنابراین با استفاده از اتحاد متوازی‌الاضلاع داریم

$$\begin{aligned}\|T_{ts}z-z\|^2&=\frac{1}{2}\|T_{ts}z-x\|^2+\frac{1}{2}\|T_{ts}z-y\|^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2\\&\le\frac{1}{4}(k_{ts}^2-1)\|x-y\|^2\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\inf_s\sup_t\|T_{ts}z-z\|^2=0.$$

به این ترتیب، برای هر $\varepsilon>0$، عضو $s\in S$ وجود دارد به طوری که

$$\sup_t\|T_{ts}z-z\|^2<\varepsilon.$$

فرض کنید $a\in S$. چون

$$\|z-T_az\|^2\le 2\|z-T_{ats}z\|^2+2\|T_{ats}z-T_az\|^2,$$

نتیجه می‌شود

$$\|z-T_az\|^2\le 2\sup_t\|z-T_{ats}z\|^2+2k_a^2\sup_t\|T_{ts}z-z\|^2<2(1+k_a^2)\varepsilon.$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است، داریم $\|z-T_az\|^2=0$ برای هر $a\in S$ یعنی $z\in F(S)$ و اثبات کامل است.

تبصره ۱۲. از قضیه (۱۱) برای نشان دادن اینکه اگر

$$\bigcap_{s\in S} \overline{co}\{T_{ts}x : t\in S\} \cap F(S) \neq \emptyset, \quad \forall x\in C,$$

باشد، آنگاه نگاشت ناگسترشی P از C بروی $F(S)$ وجود دارد به طوری که

$$T_t P = P T_t = P, \quad \forall t\in S,$$

و برای هر $x\in C$، $Px \in \overline{co}\{T_t x : t\in S\}$، می‌توان استفاده کرد. چنین نتیجه مهمی برای قضایای ارگودیک غیرخطی نیم‌گروه‌های لیپ‌شیتز را مورد استفاده قرار می‌دهیم.