فصل چهارم هندسه فضاهای باناخ

در این فصل، خواص هندسی فضاهای باناخ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدون در نظر گرفتن خواص هندسی فضاهای باناخ، شرح مسائل غیرخطی در فضاهای باناخ بسیار مشکل است.

۱.۴ تحدب فضاهای باناخ

در این بخش، تحدب فضاهای باناخ را مورد نظر قرار می‌دهیم. در تمام فصل حاضر، فرض کنید E یک فضای باناخ است.

۱. تعریف. فضای باناخ E را اکیداً محدب گوییم، اگر برای هر دو عضو مستقل خطی $x,y\in E$ داشته باشیم

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|. \quad (1)$$

شرط (۱) معادل با شرط زیر است

$$\|x\| = \|y\| = 1,\ x\neq y \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1. \quad (2)$$

۲. تعریف. فضای باناخ E را بطور یکنواخت محدب نامیم، اگر برای هر دو دنباله $\{x_n\}$، $\{y_n\}$ در E با شرایط

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \quad \lim \|x_n + y_n\| = 2,$$

داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

۳. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ است. شرایط زیر با هم معادلند:

الف) E بطور یکنواخت محدب است.

ب) اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در E بوده و

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2;$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

ج) برای هر ε با $0 < \varepsilon \le 2$، عدد $\delta > 0$ تنها وابسته به $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر

$x,y \in E$ با شرط $\|x\| = \|y\| = 1$ و $\|x-y\| \geq \varepsilon$ داریم

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$$

اثبات. (ب) $\Rightarrow$ (الف). واضح است.

(الف) $\Rightarrow$ (ب). فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در E اند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|y_n\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| = 1$$

آن‌گاه می‌توان فرض کرد که برای هر n، $\|x_n\| > 0$ و $\|y_n\| > 0$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| &= \left\|\frac{x_n+y_n}{\|x_n\|} - \left(\frac{1}{\|x_n\|} - \frac{1}{\|y_n\|}\right)y_n\right\| \\ &\geq \frac{\|x_n+y_n\|}{\|x_n\|} - \left|\frac{1}{\|x_n\|} - \frac{1}{\|y_n\|}\right|\|y_n\| \\ &= \frac{2}{\|x_n\|}\left(\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| - \frac{|\|y_n\| - \|x_n\||}{2}\right)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| \geq 2(1-0) = 2.$$

از طرف دیگر، چون

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| \leq 2$$

داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| = 2.$$

از (الف) داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| = 0$$

پس از

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| \geq \frac{1}{\|x_n\|}\left(\|x_n-y_n\| - |\|y_n\| - \|x_n\||\right)$$

داریم

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-y_n\| \leq \limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| = 0.$$

بنابراین از $\liminf_n \|x_n-y_n\| \geq 0$ نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\| = 0$.

(الف) $\Rightarrow$ (ج). فرض کنید ε با $0 < \varepsilon \leq 2$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد صحیح n، x_n و y_n در E با

$$\|x_n-y_n\| \geq \varepsilon, \quad \|x_n\| = \|y_n\| = 1, \quad \left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| \geq 1-\frac{1}{n},$$

وجود دارند. چون $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$ از (الف) داریم
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0,$$
که با $0<2\leq\|x_n-y_n\|$ در تناقض است.

(ج) $\Leftarrow$ (الف). فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در E باشند به طوری که $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ و $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$. در این صورت، نشان می‌دهیم که برای هر $\varepsilon>0$ عدد صحیح n_0 وجود دارد به طوری که برای هر $n_0\leq n$، $\|x_n-y_n\|<\varepsilon$. اگر چنین نباشد، آنگاه عدد $\varepsilon>0$ وجود دارد به طوری که به ازای زیردنباله‌هایی مانند $\{x_{n_m}\}\subset\{x_n\}$ و $\{y_{n_m}\}\subset\{y_n\}$ داریم
$$\|x_{n_m}-y_{n_m}\|\geq\varepsilon.$$
طبق فرض، $\delta>0$ وجود دارد به طوری که
$$\left\|\frac{x_{n_m}+y_{n_m}}{2}\right\|\leq 1-\delta \qquad (۳)$$
از طرف دیگر، چون $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$ پس عدد صحیح n_0 وجود دارد به طوری که برای هر $n_0\leq n$
$$2-\|x_n+y_n\|<2\delta.$$
در نتیجه $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|>1-\delta$ که با (۳) در تناقض است. و این اثبات را کامل می‌کند.

نتیجه مستقیمی از قضیه (۳)، قضیه زیر است.

۴. اگر E یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد، آنگاه E اکیداً محدب است.

۵. تعریف. فرض کنید E یک فضای باناخ است. تابع $\delta:[0,2]\to[0,1]$ تعریف شده توسط
$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{\|x+y\|}{2}:\ \|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1,\ \|x-y\|\geq\varepsilon\right\}$$
را مدول محدب بودن E نامیم.

به وضوح، δ یک تابع غیرنزولی است. یعنی اگر $\varepsilon_1\leq\varepsilon_2$ آنگاه $\delta(\varepsilon_1)\leq\delta(\varepsilon_2)$.

۶. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E به طور یکنواخت محدب است اگر و

تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta(\varepsilon) > 0$.

اثبات. فرض کنید برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $\delta(\varepsilon) > 0$. بنابراین اگر $\|x\| = \|y\| = 1$ و $\|x-y\| \geq \varepsilon > 0$ آنگاه

$$0 < \delta(\varepsilon) \leq 1 - \frac{\|x+y\|}{2},$$

یعنی $\frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \delta(\varepsilon)$. بنابراین E به طور یکنواخت محدب است.

برعکس، فرض کنید E به طور یکنواخت محدب است و به ازای ε ی مثبت داشته باشیم $\delta(\varepsilon) = 0$، در این صورت دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در E وجود دارند به طوری که

$$\|x_n + y_n\| \to 2, \quad \|x_n\| \leq 1, \quad \|y_n\| \leq 1, \quad \|x_n - y_n\| \geq \varepsilon > 0.$$

پس

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| = 1, \quad \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$$

همچنین از

$$\|x_n + y_n\| - \|x_n\| \leq \|y_n\| \leq 1$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\|x_n + y_n\| - 1 \leq \|x_n\|.$$

بنابراین $1 \leq \liminf_n \|x_n\|$، پس $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$. به طور مشابه $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$. چون E به طور یکنواخت محدب است داریم

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0,$$

که با $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon > 0$ در تناقض است.

۷. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب است. در این صورت برای هر r و ε با $r \geq \varepsilon > 0$، نامساوی‌های $\|x\| \leq r$، $\|y\| \leq r$ و $\|x-y\| \geq \varepsilon > 0$ نتیجه می‌دهد $\delta(\frac{\varepsilon}{r}) > 0$ و

$$\frac{\|x+y\|}{2} \leq r\left\{1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right\},$$

که در آن δ مدول محدب بودن E است.

اثبات. فرض کنید $\|x\| \leq r$، $\|y\| \leq r$ و $\|x-y\| \geq \varepsilon > 0$، آنگاه

$$\left\|\frac{x}{r}\right\|\le 1,\quad \left\|\frac{y}{r}\right\|\le 1,\quad \left\|\frac{x}{r}-\frac{y}{r}\right\|\ge\frac{\varepsilon}{r}.$$

چون E به طور یکنواخت محدب است، پس $\delta(\frac{\varepsilon}{r})>0$ و

$$\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\le 1-\left\|\frac{x+y}{2r}\right\|,$$

و بنابراین

$$\frac{\|x+y\|}{2}\le r\left\{1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right\}.$$

۸. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب است و فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E است. آن‌گاه

$$x_n\rightharpoonup x,\quad \|x_n\|\to\|x\|\Rightarrow x_n\to x.$$

اثبات. اگر $x=0$ باشد، آن‌گاه به وضوح $x_n\to 0$. پس فرض کنید $x\neq 0$. قرار می‌دهیم $y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}$ و $y=\frac{x}{\|x\|}$. فرض کنید $x_n\not\to x$. آن‌گاه $y_n\not\to y$. در نتیجه $\varepsilon>0$ و زیردنباله $\{y_{n_k}\}$ از $\{y_n\}$ وجود دارند به طوری که $\|y_{n_k}-y\|\ge\varepsilon$. چون E به طور یکنواخت محدب است، $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$\left\|\frac{y_{n_k}+y}{2}\right\|\le 1-\delta.$$

چون $y_{n_k}\rightharpoonup y$، بدون کم شدن از کلیت داریم

$$\|y\|\le\liminf_{k\to\infty}\left\|\frac{y_{n_k}+y}{2}\right\|\le 1-\delta$$

که با $\|y\|=1$ در تناقض است، پس $x_n\to x$.

۹. قضیه. اگر E یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد آن‌گاه E انعکاسی است.

اثبات. فرض کنید $f\in S(E^*)$ و $\{x_n\}\subset S(E)$ و $f(x_n)\to 1$. آن‌گاه $\{x_n\}$ یک دنباله کشی است. در واقع، اگر $\{x_n\}$ کشی نباشد آن‌گاه $\varepsilon>0$ و زیردنباله‌های $\{x_{n_i}\}$ و $\{x_{m_i}\}$ از $\{x_n\}$ با شرط $\|x_{n_i}-x_{m_i}\|\ge\varepsilon$ وجود دارند. چون E به طور یکنواخت محدب است، پس $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$\left|f\left(\frac{x_{n_i}+x_{m_i}}{2}\right)\right|\le\|f\|\left\|\frac{x_{n_i}+x_{m_i}}{2}\right\|\le 1-\delta$$

که با $f(x_n)\to 1$ در تناقض است. پس $\{x_n\}$ یک دنباله کشی است و بنابراین $x\in E$ با شرط $x_n\to x$ وجود دارد. چون $1=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|\lim_{n\to\infty}x_n\|=\|x\|$ داریم $x\in S(E)$. حال طبق قضیه جیمز، نتیجه می‌گیریم که E انعکاسی است.