۲.۴ نگاشت‌های دوگان

۱. تعریف . فرض کنید E یک فضای باناخ و E^* دوگان آن است . به هر $x\in E$ مجموعه
$$J(x)=\{f\in E^*:\ (x,f)=\|x\|^2=\|f\|^2\}$$
را متناظر می‌کنیم، که در آن (x,f) نشان دهنده $f(x)$ است . عملگر چند مقداری $J:E\longrightarrow E^*$ را نگاشت دوگان E نامیم .

در ابتدا برخی از خواص مقدماتی نگاشت دوگان را مورد بررسی قرار می‌دهیم .

۲. قضیه . فرض کنید E یک فضای باناخ و J نگاشت دوگان E است . در این صورت
الف) برای هر $x\in E$ ، $J(x)$ یک مجموعه ناتهی ، کراندار ، بسته و محدب است .
ب) $J(0)=\{0\}$.
ج) برای $x\in E$ و عدد حقیقی α ، $J(\alpha x)=\alpha J(x)$.
د) برای $x,y\in E$ ، $f\in J(x)$ و $g\in J(y)$ ، $(x-y,f-g)\geqslant 0$.
هـ) برای $x,y\in E$ و $f\in J(y)$ ، $\|x\|^2-\|y\|^2\geqslant 2(x-y,f)$.
اثبات . (الف) و (ب) . اگر $x=0$ باشد، آنگاه به وضوح $J(0)=\{0\}$. اگر $x\neq 0$ آنگاه طبق قضیه هان ـ باناخ ، $g\in E^*$ وجود دارد به طوری که $(x,g)=\|x\|$ و $\|g\|=1$. قرار می‌دهیم $f=\|x\|g$ ، داریم
$$(x,f)=\|x\|(x,g)=\|x\|^2,$$
و
$$\|f\|^2=\|\,\|x\|g\,\|^2=\|x\|^2\|g\|^2=\|x\|^2.$$
بنابراین $J(x)\neq\emptyset$. واضح است که $J(x)$ کراندار ، بسته و محدب است .
ج) فرض کنید $x\in E$. اگر $\alpha=0$ باشد واضح است که $J(0x)=0J(x)$. فرض کنید $\alpha\neq 0$ و $f\in J(\alpha x)$. آنگاه طبق تعریف J ، داریم
$$(\alpha x,f)=\|\alpha x\|^2=\|f\|^2,$$

و بنابراین

$$(x,\frac{f}{\alpha})=\frac{1}{\alpha^2}(\alpha x,f)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\alpha^2\|x\|^2=\|x\|^2=\|\frac{f}{\alpha}\|^2.$$

درنتیجه $\frac{f}{\alpha}\in J(x)$، بنابراین $f\in\alpha J(x)$، به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $f\in\alpha J(x)$ آن گاه $f\in J(\alpha x)$، بنابراین $J(\alpha x)=\alpha J(x)$.

د) فرض کنید $f\in J(x)$ و $g\in J(y)$، آن گاه

$$\begin{aligned}(x-y,f-g)&=(x,f)-(x,g)-(y,f)+(y,g)\\&\geq\|x\|^2-\|x\|\|g\|-\|y\|\|f\|+\|y\|^2\\&=\|x\|^2-2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|-\|y\|)^2\geq0.\end{aligned}$$

ه) اگر $f\in J(y)$ آن گاه

$$\begin{aligned}\|x\|^2-\|y\|^2-2(x-y,f)&=\|x\|^2+\|y\|^2-2(x,f)\\&\geq\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\|y\|\\&=(\|x\|-\|y\|)^2\geq0.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|x\|^2-\|y\|^2\geq2(x-y,f).$$

۳. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ است، در این صورت

الف) اگر E اکیداً محدب باشد آن گاه J یک به یک است یعنی

$$x\neq y\Rightarrow J(x)\cap J(y)=\emptyset.$$

ب) اگر E انعکاسی باشد آن گاه J نگاشتی از E بروی E^* است.

ج) اگر E^* اکیداً محدب باشد آن گاه J تک مقداری است.

اثبات. الف) فرض کنید $x,y\in E$ و $f\in J(x)\cap J(y)$، آن گاه $\|x\|=\|y\|$ و

$$\|\frac{x+y}{2}\|\,\|x\|\geq(\frac{x+y}{2},f)=\|x\|^2.$$

بنابراین $\|\frac{x+y}{2}\|=\|x\|=\|y\|$، چون E اکیداً محدب است باید $x=y$ که در نتیجه

$$x \neq y \Rightarrow J(x) \cap J(y) = \emptyset.$$

ب) برای هر $f \in E^*$، طبق قضیه هان باناخ، $u \in E^{**}$ وجود دارد به طوری که

$$(f, u) = \|f\|, \quad \|u\| = 1.$$

قرار می‌دهیم $x = \|f\| u$ داریم

$$(f, x) = (f, \|f\| u) = \|f\|^2 = \|x\|^2.$$

چون $E = E^{**}$ داریم $f \in J(x)$، یعنی J نگاشتی از E بروی E^* است.

ج) می‌دانیم که $J(0) = \{0\}$. فرض کنید $x \neq 0$ و $f, g \in J(x)$. دراین صورت

$$(x, f) = \|f\|^2 = \|x\|^2 = \|g\|^2 = (x, g),$$

و بنابراین

$$2\|x\|^2 = (x, f+g) \leq \|x\| \, \|f+g\|.$$

پس $\|f\| + \|g\| = 2\|x\| \leq \|f+g\|$. درنتیجه $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$. چون E^* اکیداً محدب است، داریم $g = \alpha f$ به ازای αیی در $\mathbb{R}$. از

$$(x, f) = (x, g) = (x, \alpha f) = \alpha (x, f)$$

داریم $\alpha = 1$ و بنابراین $f = g$.

۴. لم. فرض کنید E یک فضای باناخ است. دراین صورت E اکیداً محدب است اگر و تنها اگر

$$x, y \in S(E), \; x \neq y, \; x^* \in J(x) \Rightarrow 1 - (y, x^*) > 0$$

اثبات. ابتدا شرط لزوم را نشان می‌دهیم. فرض کنید $x, y \in S(E)$ و $x \neq y$ و $x^* \in J(x)$، آنگاه

$$\begin{aligned}(y, x^*) &= (x+y, x^*) - (x, x^*) \\ &\leq \|x+y\| \, \|x^*\| - (x, x^*) \\ &= \|x\| \left(\|x+y\| - \|x\| \right) \\ &= \|x+y\| - 1.\end{aligned}$$

بنابراین $1 - (y, x^*) \geq 2 - \|x+y\|$. از اکیداً محدب بودن E داریم $\|x+y\| < 2$، پس

$$1 - (y, x^*) \geq 2 - \|x+y\| > 2 - 2 = 0.$$

حال کفایت را ثابت می‌کنیم. فرض کنید E اکیداً محدب نیست. در این صورت x و y در $S(E)$ وجود دارند به طوری که $x \neq y$ و $\|x+y\| = 2$. قرار می‌دهیم $z = \frac{x+y}{2}$ داریم $z \neq x$ و $\|z\| = 1$. حال برای $z^* \in J(z)$

$$\|z^*\| = \|z\| = \|x\| = \|y\| = 1,$$

و

$$(x+y, z^*) = (2z, z^*) = 2\|z\|^2 = 2.$$

در نتیجه

$$(x, z^*) = 2 - (y, z^*) \geq 2 - \|y\|\|z^*\| = 2-1 = 1$$

از طرف دیگر چون $(x, z^*) \leq \|x\|\|z^*\| = 1$ داریم $(x, z^*) = 1$ و این اثبات را کامل می‌کند.

با استفاده از لم (۴) قضیه زیر را می‌توان نتیجه گرفت.

۵. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E اکیداً محدب است اگر و تنها اگر

$$x^* \in J(x),\ y^* \in J(y),\ x \neq y \Rightarrow (x-y, x^*-y^*) > 0.$$

اثبات. ابتدا لزوم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x^* \in J(x)$، $y^* \in J(y)$ و $x \neq y$. آنگاه

$$(y, x^*) = (x+y, x^*) - (x, x^*) \leq \|x^*\|(\|x+y\| - \|x\|).$$

پس

$$\|x^*\|\|y\| - (y, x^*) \geq \|x^*\|(\|x\| + \|y\| - \|x+y\|).$$

به طور مشابه

$$\|y^*\|\|x\| - (x, y^*) \geq \|y^*\|(\|x\| + \|y\| - \|x+y\|).$$

از این دو نامساوی داریم

$$\begin{aligned}(x-y, x^*-y^*) &= (\|x^*\| - \|y^*\|)(\|x\| - \|y\|) + (\|x^*\|\|y\| - (y, x^*)) \\ &\quad + (\|y^*\|\|x\| - (x, y^*)) \\ &\geq (\|x\| - \|y\|)^2 + (\|x\| + \|y\|)(\|x\| + \|y\| - \|x+y\|).\end{aligned}$$

اگر x و y مستقل خطی باشند، آنگاه از اکیداً محدب بودن E داریم $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$.

بنابراین $(x-y\,,\,x^*-y^*)>0$. اگر به ازای αیی حقیقی، $y=\alpha x$ آنگاه از $x\neq y$ داریم $x\neq 0$. پس از $(\|x\|-\|y\|)^2=\|x\|^2(1-|\alpha|)^2$ و $|\alpha|\neq 1$ نتیجه می‌شود

$$(x-y\,,\,x^*-y^*)>0.$$

چون $x\neq y$ داریم $\alpha\neq 1$. اگر $\alpha=-1$ باشد، از

$$(\|x\|+\|y\|)(\|x\|+\|y\|-\|x+y\|)=(\|x\|+\|y\|)^2>0,$$

نیز نتیجه می‌شود $(x-y\,,\,x^*-y^*)>0$.

حال کفایت قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید E اکیداً محدب نیست. طبق لم (۴)، $x,y\in S(E)$ و $x^*\in J(x)$ وجود دارند به طوری که $x\neq y$ و $(y,x^*)-1=0$. برای چنین x و yهایی داریم

$$1=(y,x^*)\le\|x^*\|(\|x+y\|-\|x\|)=\|x+y\|-1,$$

و بنابراین $2\le\|x+y\|$. از طرف دیگر، چون $\|y+x\|\le\|x\|+\|y\|=2$ داریم $\|x+y\|=2$. فرض کنید $z=\frac{x+y}{2}$. آنگاه $z\neq x$ و $\|z\|=1$. اگر $z^*\in J(z)$ آنگاه همانند اثبات لم (۴) داریم $(x,z^*)=1$. پس

$$(z-x\,,\,z^*-x^*)=1-(z,x^*)-(x,z^*)+1=0.$$

و اثبات کامل می‌شود.

حال، شرط لازم و کافی برای آن که یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد را به دست می‌آوریم.

۶ لم. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E به طور یکنواخت محدب است اگر و تنها اگر برای هر $t\in(0,2]$، $\beta(t)>0$ که در آن

$$\beta(t)=\inf\{1-(y,x^*) : x,y\in S(E),\ \|x-y\|\ge t,\ x^*\in J(x)\}.$$

اثبات. (لزوم) فرض کنید $x,y\in S(E)$ و $x^*\in J(x)$. مشابه اثبات لم (۴) داریم

$$1-(y,x^*)\ge 2-\|x+y\|.$$

اگر $\|x-y\|\ge t$ از $t\in(0,2]$ آنگاه از به طور یکنواخت محدب بودن E نتیجه می‌شود که $\delta(t)$ وجود دارد به طوری که

$$2-\|x+y\|\ge\delta(t)>0.$$

بنابراین $\beta(t) \geq 2\delta(t) > 0$.

(کفایت). فرض کنید برای هر $t \in (0,2]$، $\beta(t) > 0$ و E به طور یکنواخت محدب نباشد. در این صورت دنباله های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در $S(E)$ و $t_0 \in (0,2]$ وجود دارند به طوری که

$$0 < \|x_n + y_n\| \to 2, \qquad \|x_n - y_n\| \geq t_0.$$

حال قرار می دهیم

$$a_n = \frac{1}{\|x_n + y_n\|}, \qquad z_n = a_n(x_n + y_n)$$

و $z_n^* \in J(z_n)$، $x_n^* \in J(x_n)$ و $y_n^* \in J(y_n)$ را انتخاب می کنیم. در این صورت $z_n \in S(E)$ و

$$\|x_n - z_n\| = \|a_n(x_n - y_n) - (2a_n - 1)x_n\| \geq a_n t_0 - |2a_n - 1|.$$

به طور مشابه

$$\|y_n - z_n\| \geq a_n t_0 - |2a_n - 1|.$$

چون $a_n \to \frac{1}{2}$، داریم $a_n t_0 - |2a_n - 1| \to t_0/2$. در نتیجه عدد صحیح n_0 وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_0$،

$$\|x_n - z_n\| \geq t_0/4, \qquad \|y_n - z_n\| \geq t_0/4.$$

بنابراین اگر $n \geq n_0$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned} 2 - \|x_n + y_n\| &= 2 - (x_n + y_n, z_n^*) \\ &= 1 - (x_n, z_n^*) + 1 - (y_n, z_n^*) \\ &\geq \beta(\tfrac{t_0}{4}) + \beta(\tfrac{t_0}{4}) = 2\beta(\tfrac{t_0}{4}) > 0. \end{aligned}$$

در نتیجه وقتی $n \to \infty$ داریم

$$0 < 2\beta(\tfrac{t_0}{4}) \leq 0$$

که یک تناقض است.

با استفاده از لم (۴)، قضیه زیر را داریم.

۷. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E به طور یکنواخت محدب

است اگر و تنها اگر برای هر $t\in(0,2]$ ، $\gamma(t)>0$ که در آن

$$\gamma(t)=\inf\{(x-y,x^*-y^*): x,y\in S(E),\ \|x-y\|\ge t,\ x^*\in J(x),\ y^*\in J(y)\}.$$

اثبات. (لزوم) فرض کنید $t\in(0,2]$ و $x,y\in S(E)$ با شرط $\|x-y\|\ge t$ و $x^*\in J(x)$ و $y^*\in J(y)$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$(x-y,x^*-y^*)=1-(y,x^*)+1-(x,y^*)$$
$$\ge 2\beta(t)>0,$$

و بنابراین $\gamma(t)>0$.

(کفایت) فرض کنید برای هر $t\in(0,2]$ ، $\gamma(t)>0$. اگر E به طور یکنواخت محدب نباشد آن‌گاه $t\in(0,2]$ با $\beta(t)=0$ وجود دارد. یعنی دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در $S(E)$ و $\{x_n^*\}\subset E^*$ و $t\in(0,2]$ وجود دارند به طوری که

$$\|x_n-y_n\|\ge t,\quad x_n^*\in J(x_n),\quad 1-(y_n,x_n^*)\to 0$$

از

$$1-(y_n,x_n^*)\ge 2-\|x_n+y_n\|\ge 0,$$

داریم $\|x_n+y_n\|\to 2$. بنابراین فرض می‌کنیم که برای هر n ، $\|x_n+y_n\|>0$ ، قرار می‌دهیم

$$a_n=\frac{1}{\|x_n+y_n\|},\quad z_n=a_n(x_n+y_n).$$

و $z_n^*\in J(z_n)$ را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه

$$(x_n+y_n,z_n^*)=\|x_n+y_n\|\to 2.$$

و بنابراین

$$(x_n,z_n^*)\to 1.$$

پس

$$(z_n-x_n,z_n^*-x_n^*)=1-a_n-a_n(y_n,x_n^*)+1-(x_n,z_n^*)$$
$$\to 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 1+1-1=0.$$

از طرف دیگر، مشابه اثبات لم (۶)، عدد صحیح n_0 وجود دارد به طوری که برای هر $n\ge n_0$ داریم

$$\|z_n-x_n\|\ge t/4.$$

پس برای هر $n\ge n_0$ داریم

$$(z_n - x_n, z_n^* - x_n^*) \geq \gamma(\tfrac{t}{4}) > 0.$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$ داریم $0 \geq \gamma(\frac{t}{4}) > 0$ که یک تناقض است.

در پایان بخش قضیه‌ای برای فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب را ارائه می‌دهیم که توسط Prüß ثابت شده است.

۸. تعریف. تابع $\omega: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را متعلق به Γ نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کند.

الف) $\omega(0)=0$؛

ب) $r>0 \Rightarrow \omega(r)>0$؛

ج) $t\le s \Rightarrow \omega(t)\le\omega(s)$.

۹. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب است. در این صورت برای هر $R>0$، $\omega_R\in\Gamma$ وجود دارد به طوری که

$$x,y\in B_R[0],\ x^*\in J(x),\ y^*\in J(y) \Rightarrow (x-y, x^*-y^*) \geq \omega_R(\|x-y\|)\,\|x-y\|,$$

که در آن $B_R[0]=\{x: \|x\|\le R\}$.

اثبات. $R>0$ را ثابت گرفته و تابع $\omega_R(0): \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
اگر $r=0$ باشد آنگاه $\omega_R(0)=0$ و اگر $r\in(0,2R]$ باشد آنگاه

$$\omega_R(r)=\inf\left\{\frac{(x-y,x^*-y^*)}{\|x-y\|}: x,y\in B_R[0],\ \|x-y\|\ge r,\ x^*\in J(x),\ y^*\in J(y)\right\}$$

و اگر $r\in(2R,\infty)$ آنگاه $\omega_R(r)=\omega_R(2R)$. در این صورت چون $(x-y,x^*-y^*)\geq 0$ طبق قسمت (د) قضیه (۲) برای هر $r\ge 0$ داریم $\omega_R(r)\ge 0$. همچنین ω_R غیرنزولی است. بنابراین نشان می‌دهیم برای هر $r>0$، $\omega_R(r)>0$.

فرض کنید به ازای r ای در $(0,2R]$، $\omega_R(r)=0$. پس از تعریف ω_R نتیجه می‌شود که دنباله‌های $\{x_n\}$، $\{y_n\}$، $\{x_n^*\}$ و $\{y_n^*\}$ وجود دارند به طوری که

$$\{x_n\},\{y_n\}\subset B_R[0],\quad x_n^*\in J(x_n),\quad y_n^*\in J(y_n),$$

$$\|x_n-y_n\|\ge r>0 \quad , \quad (x_n-y_n,\ x_n^*-y_n^*)\to 0.$$

چون $(\|x_n\|-\|y_n\|)^2 \le (x_n-y_n,\ x_n^*-y_n^*)$، می‌توان فرض کرد که

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|y_n\| = a > 0.$$

پس از

$$(x_n+y_n,\ x_n^*+y_n^*) = 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - (x_n-y_n,\ x_n^*-y_n^*),$$

داریم

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n,\ x_n^*+y_n^*) = 4a^2,$$

و بنابراین

$$4a^2 \le \liminf_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|\,(\|x_n\|+\|y_n\|) = 2a\liminf_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|$$

در نتیجه

$$2a \le \liminf_n \|x_n+y_n\|.$$

از طرف دیگر، چون

$$\limsup_n \|x_n+y_n\| \le 2a,$$

نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\| = 2a$$

حال از این که E به طور یکنواخت محدب است نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\| = 0,$$

که با $\|x_n-y_n\| \ge r > 0$ در تناقض است، و این اثبات را کامل می‌کند.