۲.۴ مشتق‌پذیری نرم‌ها

در این بخش مشتق‌پذیری نرمهای فضاهای باناخ را مطالعه می‌کنیم. در تمام بخش حاضر فرض داریم E یک فضای باناخ و $S(E)=\{x\in E: \|x\|=1\}$ کره یکه است.

۱. تعریف. گوییم فضای باناخ E هموار است، هرگاه حد

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \tag{1}$$

برای هر $x, y\in S(E)$ موجود باشد. در این حالت، نرم فضای E را مشتق‌پذیر گاتوس نامیم.

۲. تعریف. گوییم فضای باناخ E دارای یک نرم مشتق‌پذیر گاتوس یکنواخت است، اگر برای هر $y\in S(E)$، حد در (۱) برای $x\in S(E)$ به طور یکنواخت موجود باشد.

۳. تعریف. نرم فضای باناخ E را مشتق‌پذیر فرشه نامیم، اگر برای هر $x\in S(E)$، حد در (۱) برای $y\in S(E)$ به طور یکنواخت موجود باشد.

۴. تعریف. نرم فضای باناخ E مشتق‌پذیر فرشه یکنواخت (و در نتیجه E هموار یکنواخت) نامیده می‌شود، اگر حد در (۱) برای (x,y) در $S(E)\times S(E)$ به طور یکنواخت موجود باشد.

۵. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ هموار است. در این صورت نگاشت دوگان J روی E تک مقداری است.

اثبات. چون $J(0)=\{0\}$، پس می‌توان فرض کرد $x\neq 0$. فرض کنید $\|x\|=1$. آنگاه برای $f\in J(x)$، $y\in S(E)$ و $\lambda>0$ داریم

$$\frac{(y,f)}{\|x\|}=\frac{(x+\lambda y, f)-\|x\|^2}{\lambda\|x\|}\le\frac{\|x\|\|x+\lambda y\|-\|x\|^2}{\lambda\|x\|}$$
$$=\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}.$$

به طور مشابه، اگر $\lambda<0$ داریم

$$\frac{(y,f)}{\|x\|} \geq \frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}.$$

از هموار بودن E نتیجه می‌شود که

$$\tau(x,y)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}$$

موجود است و

$$(y,f)=\|x\|\,\tau(x,y).$$

بنابراین $J(x)$ تک مقداری است. اگر $x\neq 0$ آن‌گاه $J(x)=\|x\|\,J(\frac{x}{\|x\|})$، پس $J(x)$ برای هر $x\neq 0$ تک مقداری است.

۶. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ و J نگاشت دوگانی E است. اگر J تک مقداری باشد آن‌گاه E هموار است.

قبل از اثبات قضیه (۶)، ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

۷. لم. فرض کنید E یک فضای باناخ و J نگاشت دوگانی E است. اگر J تک مقداری باشد آن‌گاه J در نرم پیوسته ضعیف * است.

اثبات. فرض کنید $x_n\to x$. در این صورت، اگر $f_n=J(x_n)$ می‌توان نشان داد که $\{f_n\}$ در توپولوژی ضعیف * همگرا به $J(x)$ است. چون $\{x_n\}$ کراندار است پس $\{f_n\}$ نیز کراندار است. بنابراین زیرتور $\{f_{n_\alpha}\}$ از $\{f_n\}$ همگرا به f' ای در E^* در توپولوژی ضعیف * وجود دارد. نشان می‌دهیم $f'=J(x)$. چون نرم برای E^* در توپولوژی ضعیف * نیم پیوسته پایینی است، داریم

$$\|f'\| \leq \liminf_{\alpha}\|f_{n_\alpha}\| = \liminf_{\alpha}\|x_{n_\alpha}\| = \|x\|.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}|(x,f')-\|x_{n_\alpha}\|^2| &= |(x,f')-(x_{n_\alpha},f_{n_\alpha})|\\ &\leq |(x,f'-f_{n_\alpha})|+|(x-x_{n_\alpha},f_{n_\alpha})|.\end{aligned}$$

چون $(x,f'-f_{n_\alpha})\to 0$ و $(x-x_{n_\alpha},f_{n_\alpha})\to 0$ پس

$$|(x, f') - \|x_{n_\alpha}\|^2| \to 0$$

بنابراین $(x, f') = \|x\|^2$. درنتیجه

$$\|x\|^2 = (x, f') \leq \|x\|\,\|f'\|$$

وبنابراین $\|f'\| \leq \|x\|$. درنتیجه $\|f'\|^2 = \|x\|^2 = (x, f')$ وبنابراین $J(x) = f'$.

اثبات قضیه ۶ . اگر J تک مقداری باشد، طبق لم (۷)، J پیوسته ضعیف* درنرم است. مشابه اثبات قضیه (۵)، برای $x, y \in S(E)$ و $\lambda > 0$ داریم

$$\frac{(y, J(x))}{\|x\|} \leq \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \frac{\|x+\lambda y\|^2 - \|x\|\,\|x+\lambda y\|}{\lambda \|x+\lambda y\|}$$

$$\leq \frac{\|x+\lambda y\|^2 - (x, J(x+\lambda y))}{\lambda \|x+\lambda y\|}$$

$$= \frac{(x+\lambda y, J(x+\lambda y)) - (x, J(x+\lambda y))}{\lambda \|x+\lambda y\|}$$

$$= \frac{(\lambda y, J(x+\lambda y))}{\lambda \|x+\lambda y\|} = \frac{(y, J(x+\lambda y))}{\|x+\lambda y\|}$$

به طور مشابه، اگر $\lambda < 0$ آنگاه

$$\frac{(y, J(x))}{\|x\|} \geq \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \geq \frac{(y, J(x+\lambda y))}{\|x+\lambda y\|}$$

بنابراین

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \frac{(y, J(x))}{\|x\|}$$

که نتیجه می‌دهد E هموار است.

۸. قضیه . فرض کنید E^* یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب است و J نگاشت دوگانی E است، دراین صورت ، J تک مقداری است و روی مجموعه‌های محدب از E به طور یکنواخت پیوسته است، یعنی برای مجموعه کراندار B در E و $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$x, y \in B, \ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|J(x) - J(y)\| < \varepsilon.$$

اثبات . ازانکه E^* به طور یکنواخت محدب است، نتیجه می‌شود که E^* به طور اکید محدب است. پس طبق قضیه (۲.۲)، نگاشت دوگان J برای E تک مقداری است. فرض کنید J روی مجموعه کرانداری مانند B از E پیوسته یکنواخت نباشد . دراین صورت $\varepsilon > 0$ و دنباله‌های

$\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در B وجود دارند به طوری که $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ و $\|J(x_n) - J(y_n)\| \geq \varepsilon$.
فرض کنید $x_n \to 0$ در نتیجه $y_n \to 0$. از $\|x_n\| = \|J(x_n)\|$ با $\|y_n\| = \|J(y_n)\|$ نتیجه می‌شود که $J(x_n) \to 0$ و $J(y_n) \to 0$ که با $\|J(x_n) - J(y_n)\| \geq \varepsilon$ در تناقض است. پس فرض کنید $x_n \not\to 0$ آن گاه $\alpha > 0$ و زیردنباله $\{x_{n_i}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارند به طوری که $\|x_{n_i}\| \geq \alpha$. چون $\|x_n\| - \|y_n\| \leq \|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ می‌توان فرض کرد که $\|y_{n_i}\| \geq \frac{\alpha}{2}$. بنابراین بدون کم شدن از کلیت، فرض می‌کنیم $\beta > 0$ وجود دارد به طوری که $\|x_n\| \geq \beta$ و $\|y_n\| \geq \beta$. قرار دهید $u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ و $v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$
داریم $\|u_n\| = \|v_n\| = 1$ و وقتی $n \to \infty$ داریم

$$\|u_n - v_n\| = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| = \left\| \frac{\|y_n\| x_n - \|x_n\| y_n}{\|x_n\| \|y_n\|} \right\|$$

$$\leq \frac{1}{\beta^2} \left(\| (\|y_n\| - \|x_n\|) x_n + \|x_n\| (x_n - y_n) \| \right)$$

$$\leq \frac{1}{\beta^2} \left(\big| \|y_n\| - \|x_n\| \big| \|x_n\| + \|x_n\| \|x_n - y_n\| \right) \to 0$$

علاوه بر آن، چون

$$\begin{aligned}(u_n, J(u_n) + J(v_n)) &= \|u_n\|^2 + (u_n - v_n, J(v_n)) + \|v_n\|^2 \\ &\geq 2 - \|u_n - v_n\| \|J(v_n)\| \\ &= 2 - \|u_n - v_n\|,\end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned}\left\| \frac{J(u_n) + J(v_n)}{2} \right\| &\geq \frac{1}{2} (u_n, J(u_n) + J(v_n)) \\ &\geq 1 - \frac{\|u_n - v_n\|}{2}\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{J(u_n) + J(v_n)}{2} \right\| \geq 1$$

از طرف دیگر، با توجه به

$$\limsup_{n \to \infty} \left\| \frac{J(u_n) + J(v_n)}{2} \right\| \leq \limsup \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1$$

داریم

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{J(u_n) + J(v_n)}{2} \right\| = 1$$

چون $\|J(u_n)\| = \|J(v_n)\| = 1$ و E^* بطور یکنواخت محدب است، داریم

$$\|J(u_n) - J(v_n)\| \to 0$$

پس از

$$J(x_n) - J(y_n) = \|x_n\| \left(J(u_n) - J(v_n)\right) + \left(\|x_n\| - \|y_n\|\right) J(v_n)$$

نتیجه می‌شود

$$\|J(x_n) - J(y_n)\| \to 0$$

که با $\|J(x_n) - J(y_n)\| \geq \varepsilon > 0$ در تناقض است و این اثبات را کامل می‌کند.

۹ قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ با نرم مشتق‌پذیر فرشه است، آنگاه نگاشت دوگانی $J: E \to E^*$ پیوسته نرم به نرم است.

اثبات. کافی است نشان دهیم نگاشت J از $S(E)$ به $S(E^*)$ پیوسته نرم به نرم است (تمرین ۴). فرض کنید $x_n, x \in S(E)$ و $x_n \to x$، در این صورت چون

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - (x, J(x_n)) &= (x_n, J(x_n)) - (x, J(x_n)) \\ &= (x_n - x, J(x_n)) \\ &\leq \|x_n - x\| \, \|J(x_n)\| \\ &= \|x_n - x\| \to 0, \end{aligned}$$

داریم $(x, J(x_n)) \to 1$. از طرف دیگر، چون دارای یک نرم مشتق‌پذیر فرشه است، پس بطور یکنواخت برای $y \in S(E)$ داریم

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} = (y, J(x)),$$

یعنی برای هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ وجود دارد بطوری که برای هر $y \in S(E)$

$$0 < |t| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} - (y, J(x)) \right| < \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم $t = \delta$، داریم

$$\|x + ty\| - 1 < t\varepsilon + t(y, J(x)),$$

و

$$\|x - ty\| - 1 < t\varepsilon - t(y, J(x)).$$

چون $(x, J(x_n)) \to 1$ پس عدد صحیح n_0 وجود دارد به طوری که برای هر $n_0 \leq n$

$$1 \leq (x, J(x_n)) + t\varepsilon$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 1 - t\varepsilon \leq (x, J(x_n)) &= (x, J(x) + J(x_n)) - 1 \\ &= (x+ty, J(x)) + (x-ty, J(x_n)) - 1 - t(y, J(x) - J(x_n)) \\ &\leq \|x+ty\| + \|x-ty\| - 1 - t(y, J(x) - J(x_n)) \\ &< t\varepsilon + t(y, J(x)) + 1 + t\varepsilon - t(y, J(x)) + 1 - 1 \\ &\quad - t(y, J(x) - J(x_n)) \\ &= 2t\varepsilon + 1 - t(y, J(x) - J(x_n)). \end{aligned}$$

و این نتیجه می دهد که برای هر $y \in S(E)$

$$(y, J(x) - J(x_n)) \leq 3\varepsilon.$$

به طور مشابه برای هر $y \in S(E)$،

$$(y, J(x_n) - J(x)) \leq 3\varepsilon.$$

بنابراین برای هر $n \geq n_0$ داریم

$$|(y, J(x) - J(x_n))| \leq 3\varepsilon \qquad \forall y \in S(E),$$

یعنی $\|J(x) - J(x_n)\| \leq 3\varepsilon$ و اثبات کامل می شود.

مشابه اثبات قضیه ۹، قضیه زیر را می توان بررسی کرد.

۱۰ قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ با نرم مشتق پذیر کاملاً یکنواخت است. آنگاه نگاشت دوگان $J: E \to E^*$ روی کمیت های کراندار از E به طور یکنواخت پیوسته نرم به ضعیف* است.

اثبات. مشابه قضیه ۹، به عنوان تمرین به عهده دانشجو است.

اگر E دارای یک نرم مشتق پذیر فرشه یکنواخت باشد، آنگاه نتیجه زیر را داریم.

۱۱. قضیه. فرض کنید E یک فضای باناخ است. در این صورت E دارای یک نرم مشتق‌پذیر فرشه یکنواخت است اگر و تنها اگر E^* بطور یکنواخت محدب باشد.

اثبات. نخست لزوم را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $f,g\in S(E^*)$ و $\|f-g\|\geq\varepsilon>0$. چون نرم E بطور یکنواخت مشتق‌پذیر فرشه است، برای هر $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ وجود دارد بطوری که

$$0<|t|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}-(y,J(x))\right|<\frac{\varepsilon}{8}\qquad \forall x,y\in S(E).$$

t با شرط $0<t<\delta$ را ثابت اختیار می‌کنیم، داریم

$$\|x+ty\|<\frac{1}{8}t\varepsilon+t(y,J(x))+1$$

و

$$\|x-ty\|<\frac{1}{8}t\varepsilon-t(y,J(x))+1$$

بنابراین برای هر $x,y\in S(E)$ داریم

$$\|x+ty\|+\|x-ty\|<2+\frac{1}{4}t\varepsilon$$

از $\|f-g\|\geq\varepsilon>0$ نتیجه می‌شود $y_0\in S(E)$ وجود دارد بطوری که $(f-g)(y_0)>\frac{\varepsilon}{2}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \sup\{(f+g)(x) : x\in S(E)\}\\
&= \sup\{f(x+ty_0)+g(x-ty_0)-(f-g)(ty_0) : x\in S(E)\}\\
&< \sup\{\|x+ty_0\|+\|x-ty_0\|-\tfrac{1}{2}t\varepsilon : x\in S(E)\}\\
&\leq 2+\tfrac{1}{4}t\varepsilon-\tfrac{1}{2}t\varepsilon = 2-\tfrac{1}{4}t\varepsilon.
\end{aligned}$$

پس E^* بطور یکنواخت محدب است.

حال کفایت را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $x,y\in S(E)$. با اثبات قضیه (۹)، اگر $\lambda>0$ باشد آنگاه

$$\frac{(y,J(x))}{\|x\|}\leq\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}\leq\frac{(y,J(x+\lambda y))}{\|x+\lambda y\|}$$

و اگر $\lambda<0$ باشد آنگاه

$$\frac{(y,J(x))}{\|x\|}\geq\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}\geq\frac{(y,J(x+\lambda y))}{\|x+\lambda y\|}.$$

حال با توجه به قضیه (۸)، E دارای یک نرم مشتق‌پذیر فرشه یکنواخت است و این اثبات را کامل می‌کند.