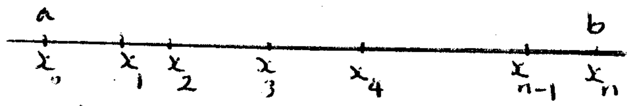
افرازها و توابع پله‌ای

۱. تعریف یک افراز: فرض کنید a و b اعداد حقیقی و $a \le b$ است. افراز P از فاصله $[a,b]$ دنباله اکیداً صعودی متناهی $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ است که در آن n یک عدد صحیح نامنفی و $x_0=a$ و $x_n=b$ می‌باشد.



برای افراز P در بالا، اعداد $x_0, x_1, \dots, x_n$ را نقاط افراز P نامند. اگر P و Q دو افراز $[a,b]$ باشند، آنگاه گوییم Q یک تظریف P است هرگاه هر نقطه P نقطه‌ای از Q باشد. برای دو افراز P و Q از $[a,b]$، تظریف مشترک P و Q افرازی از $[a,b]$ است که نقاطش نقاط P یا Q باشد.

فواصل (x_{i-1}, x_i) از افراز $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ دارای طول یکسانی لزوماً نمی‌باشند، اما اگر چنین باشد گوییم افراز منظم است. $a<b$ و عدد طبیعی n داده شده است، یک n-افراز منظم از $[a,b]$ افراز $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ است که در آن برای هر $i=0,\dots,n$ داشته باشیم

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

در این حالت، طول هر فاصله (x_{i-1}, x_i) برابر $(b-a)/n$ است.

برای افراز $P=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ از فاصله $[a,b]$، گاهی اوقات توجه به بزرگترین طول فواصل (x_{i-1}, x_i) برای هر $i=1,\dots,n$ را داریم. این عدد را تور (mesh) افراز P نامند و با $\|P\|$ نمایش می‌دهند. توجه کنید اگر P یک n-افراز منظم از $[a,b]$ باشد آنگاه $\|P\|=(b-a)/n$.

۲. تعریف یک تابع پله‌ای: فرض کنید P افراز $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ از $[a,b]$ است و f یک تابع با مقدار حقیقی است که دامنه آن شامل $[a,b]$ می‌باشد. گوییم f در ازای P

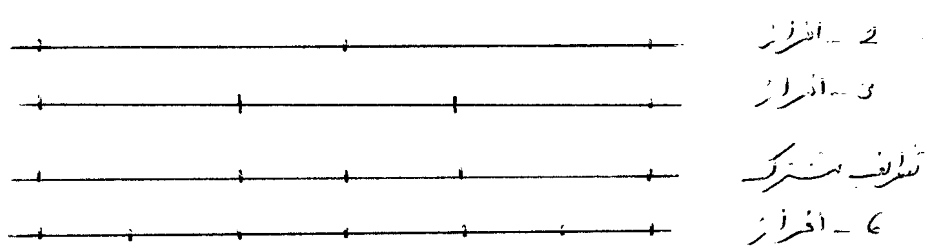
پله‌ای است هرگاه f روی هر فاصلهٔ باز (x_{i-1}, x_i) که در آن $1 \le i \le n$ ثابت باشد.

توجه کنید که تابع f که درون افراز $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ پله‌ای است می‌تواند در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ هر مقداری را بپذیرد. همچنین توجه کنید که اگر f درون افراز P پله‌ای باشد آنگاه f روی هر تظریف از P نیز یقیناً پله‌ای است.

برای تابع f تعریف شده روی مجموعه S از اعداد حقیقی، گوییم f تابعی پله‌ای روی S است هرگاه فاصله‌ای مانند $[a,b]$ که $[a,b] \subseteq S$ و افراز P از $[a,b]$ وجود داشته باشد به طوری که f درون P پله‌ای باشد و برای هر $x \in S \setminus [a,b]$ داشته باشیم $f(x) = 0$.

یک تابع پله‌ای روی $\mathbb{R}$ را به طور ساده تابع پله‌ای نامیم.

۳ مثال: (1) یک 3-افراز منظم از $[0,1]$ تظریف یک 2-افراز منظم نمی‌باشد. 6-افراز منظم از $[0,1]$ تظریف هر 2-افراز منظم و 3-افراز منظم از $[0,1]$ است اما یک تظریف مشترک نمی‌باشد. تظریف مشترک 2-افراز منظم و 3-افراز منظم، افراز $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1)$ است.



(2) فرض کنید n عددی طبیعی و P و Q به ترتیب 2^n و 2^{n+1} افرازهای منظم $[a,b]$ باشند. آنگاه Q تظریف P است و $\|Q\| = \|P\|/2$.

(3) تابع $f : [-3, \infty) \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

اگر $-3 \le x < -1$ آنگاه $f(x) = 3$

اگر $1 < x < 2$ آنگاه $f(x) = 2$

اگر $-1 < x \le 1$ آنگاه $f(x) = -2$

اگر $x \geqslant 7$ آنگاه $f(x) = 0$

اگر $2 \le x < 5$ آنگاه $f(x) = 4$

$f(-1) = 4$

اگر $5 < x < 7$ آنگاه $f(x) = 1$

$f(5) = -1$

چون f درون افراز $(-3,-1,1,2,5,7)$ از $[-3,7]$ پله‌ای است و خارج این فاصله صفر است. پس f یک تابع پله‌ای روی $[-3,\infty)$ می‌باشد.

(۹) در تبدیل به حالت کلی یک تابع پله‌ای که دامنه آن فاصله $[a,b]$ است اشاره می‌کنیم. از تعریف، زیرفاصله $[c,d]$ از $[a,b]$ و افراز $\mathcal{P}=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از $[c,d]$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که f درون $\mathcal{P}$ پله‌ای بوده و برای هر $x\in[a,b]\setminus[c,d]$ داشته باشیم $f(x)=0$. حال توجه داریم که f پله‌ای روی افراز $(a,x_0,x_1,\dots,x_n,b)$ از فاصله $[a,b]$ است.

انتگرال توابع پله‌ای

۱ جمع یک تابع پله‌ای روی یک افراز: فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی افراز $\mathcal{P}$ از $[a,b]$ که در آن $\mathcal{P}=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ پله‌ای است. جمع $\Sigma(\mathcal{P},f)$ از f روی $\mathcal{P}$ توسط

$$\Sigma(\mathcal{P},f)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,(x_i-x_{i-1})$$

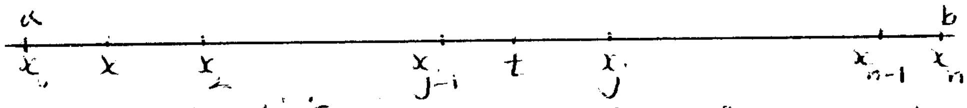
تعریف می‌شود که در آن برای هر $i=1,2,\dots,n$ عدد α_i مقدار ثابت f روی فاصله (x_{i-1},x_i) است.

توجه کنید در حالتی که $a=b$ باید داشته باشیم $n=0$ و چون $\Sigma(\mathcal{P},f)$ جمله‌ای ندارد باید داشته باشیم $\Sigma(\mathcal{P},f)=0$.

۲ لم: فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی افراز $\mathcal{P}$ از $[a,b]$ پله‌ای است. فرض کنید تظریف $\mathcal{Q}$ از $\mathcal{P}$ با اضافه کردن یک نقطه t به افراز $\mathcal{P}$ به دست آمده است. آنگاه

$$\Sigma(\mathcal{P},f)=\Sigma(\mathcal{Q},f)$$

اثبات: فرض کنید $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ و برای هر i مقدار ثابت f در (x_{i-1},x_i) را α_i بنامیم. t را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_{j-1}<t<x_j$.



چون تمام جملات در مجموع $\Sigma(Q,f)$ همان جملات متناظر در مجموع $\Sigma(P,f)$ است بجز جملات مربوط به فاصله (x_{j-1},x_j) داریم

$$\begin{aligned}\Sigma(Q,f)-\Sigma(P,f)&=\alpha_j\cdot(t-x_{j-1})+\alpha_j(x_j-t)-\alpha_j(x_j-x_{j-1})\\&=\alpha_j t-\alpha_j x_{j-1}+\alpha_j x_j-\alpha_j t-\alpha_j x_j+\alpha_j x_{j-1}\\&=0\end{aligned}$$

پس $\Sigma(Q,f)=\Sigma(P,f)$.

۳ لم: فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی افراز P از $[a,b]$ پله‌ای بوده و Q یک تظریف P است. آنگاه $\Sigma(P,f)=\Sigma(Q,f)$.

اثبات: چون Q از اضافه کردن یک نقطه جدید متوالیاً به P به تعداد متناهی دفعه حاصل می‌شود لم از لم ۲ نتیجه خواهد شد.

۴ قضیه: فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ داده شده است و P و Q افرازهایی از $[a,b]$ است به طوری که f روی هر دو افراز پله‌ای باشد. آنگاه

$$\Sigma(P,f)=\Sigma(Q,f)$$

اثبات: تظریف مشترک P و Q را با R نمایش می‌دهیم. طبق لم ۳ داریم

$$\Sigma(P,f)=\Sigma(R,f)=\Sigma(Q,f)$$

حال در رابطه با قضیه فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

۵ تعریف انتگرال یک تابع پله‌ای: فرض کنید f یک تابع پله‌ای روی فاصله $[a,b]$ است.

انتگرال $\int_a^b f$ از f روی فاصله $[a,b]$ را برابر با $\Sigma(P,f)$ تعریف می‌کنیم که در آن P افرازی دلخواه از $[a,b]$ است به طوری که f روی افراز P پله‌ای می‌باشد. نماد دیگر برای $\int_a^b f$ عبارت است از $\int_a^b f(x)\,dx$.

۶. قضیه: خطی بودن انتگرال توابع پله‌ای: فرض کنید f و g توابعی پله‌ای روی فاصله $[a,b]$ بوده و c عددی حقیقی است:

(a) $f+g$ روی $[a,b]$ تابعی پله‌ای است و $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(b) cf روی $[a,b]$ تابعی پله‌ای است و $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

اثبات: افرازهای P و Q از $[a,b]$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که f روی P و g روی Q پله‌ای باشد و R را تظریف مشترک P و Q تعریف می‌کنیم. در نتیجه f و g هر دو روی R پله‌ای اند. R را به صورت $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ نوشته و برای هر i، مقادیر ثابت f و g را در فاصله (x_{i-1}, x_i) به ترتیب با α_i و β_i نشان می‌دهیم. چون $f+g$ در هر فاصله (x_{i-1}, x_i) مقدار ثابت $\alpha_i+\beta_i$ را می‌پذیرد پس $f+g$ روی R پله‌ای است. به علاوه

$$\int_a^b (f+g) = \Sigma(R, f+g) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i+\beta_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \Sigma(R,f) + \Sigma(R,g) = \int_a^b f + \int_a^b g .$$

که (a) را ثابت می‌کند. اثبات قسمت (b) مشابه است.

۷ قضیه. نامنفی بودن انتگرال توابع پله‌ای: توجه کنید که تابع f نامنفی است هرگاه برای هر نقطه x در دامنه تعریفش داشته باشیم $f(x) \geq 0$. حال قضیه زیر را بیان می‌کنیم:

اگر f یک تابع پله‌ای نامنفی روی $[a,b]$ باشد آنگاه $\int_a^b f \geq 0$.

این قضیه بیان می‌کند که: (حالت کلی‌تر) برای دو تابع f و g با یک دامنه، می‌نویسیم $f \leq g$ هرگاه برای هر x در این دامنه داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$. و فرم کلی‌تر قضیه چنین است:

اگر f و g توابع پله‌ای روی $[a,b]$ بوده و داشته باشیم $f \leq g$ آنگاه

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

اثبات (حالت کلی): فرض کنید f و g توابع پله‌ای معین [a,b] بوده و داشته باشیم $f\le g$،
مشابه اثبات قضیه ۹، افراز $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از $[a,b]$ را چنان انتخاب می‌کنیم
که هر دو تابع f و g پله‌ای درون P بوده و برای هر i مقادیر ثابت f و g در (x_{i-1},x_i)
را به ترتیب با α_i و β_i نشان می‌دهیم. بنابراین برای هر i داریم $\alpha_i\le\beta_i$ و در نتیجه

$$\sum(P,f)\le\sum(P,g)$$

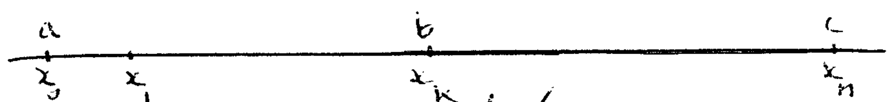
۸ قضیه: جمع‌پذیری انتگرال توابع پله‌ای: فرض کنید $a\le b\le c$ و f یک تابع
پله‌ای روی $[a,c]$ است. آنگاه تحدید f به $[a,b]$ و $[b,c]$ توابع پله‌ای روی $[a,b]$
و $[b,c]$ به ترتیب می‌باشند و داریم

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$$

اثبات: با توجه به توضیحات بیان شده در آخر ۱۰ داریم

$$\int_a^a f=\int_b^b f=\int_c^c f=0$$

بنابراین اگر $a=b$ یا $b=c$ باشد حکم واضح است. حال فرض کنید $a<b<c$.



افراز P از $[a,c]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که f درون P پله‌ای باشد و در صورت لزوم
با اضافه کردن b به این نقاط تعریف P را به دست می‌آوریم. پس می‌توان فرض کرد که P
افراز $(x_0,\dots,x_k,\dots,x_n)$ است و $b=x_k$، در این صورت نقاط $P_1=(x_0,\dots,x_k)$
و $P_2=(x_k,\dots,x_n)$ را در نظر می‌گیریم. به ترتیب P_1 و P_2 افرازهایی از $[a,b]$ و $[b,c]$ است و
تحدید f به $[a,b]$ و $[b,c]$ به وضوح درون P_1 و P_2 به ترتیب پله‌ای اند. حال با
توجه به رابطه $\sum(P,f)=\sum(P_1,f)+\sum(P_2,f)$ حکم حاصل می‌شود.

۹. توسیع برخی از نمادگذاری‌ها :

(1) فرض کنید f یک تابع پله‌ای روی $[a,b]$ است که در آن $a<b$ ، تعمیم جمع‌پذیری ۸ را می‌توان برای تعیین معنی عبارت $\int_b^a f$ بکار برد. داریم

$$\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = 0$$

پس $\int_b^a f = -\int_a^b f$. با توجه به این مطلب به سادگی دیده می‌شود که اگر a و b و c اعداد حقیقی دلخواه باشند و f یک تابع پله‌ای روی فاصله‌ای که از عدد کوچک به بزرگ تعریف کنند باشد آنگاه

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

(2) فرض کنید f مقدار ثابت α را روی $[a,b]$ بپذیرد. نشان داده می‌شود که

$$\int_a^b f = \alpha(b-a)$$

(3) فرض کنید f تابعی پله‌ای بوده و برای هر $x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$ داشته باشیم $f(x)=0$ ، که در آن $[a,b]$ یک فاصله داده شده است و $[c,d]$ فاصله‌ای شامل $[a,b]$ باشد.

به انتخاب افراز $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ از $[a,b]$ به طوری که تابع f در روی P پله‌ای است و تعریف افراز $Q=(c,x_0,x_1,\dots,x_n,d)$ از $[c,d]$ داریم

$$\int_a^b f = \Sigma(P,f)=\Sigma(Q,f)=\int_c^d f$$

در نتیجه نشان داده شد که اگر تابع پله‌ای f خارج از هر دو فاصله $[a,b]$ و $[c,d]$ صفر باشد آنگاه

$$\int_a^b f = \int_c^d f$$

این مطلب به ما توانایی تعریف انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f$ را می‌دهد. به طور ساده تعریف می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_a^b f$$

گرچه این انتگرال ممکن است ناسره باشد.