مجموعه‌های مقدماتی

امقدمه: می‌خواهیم $\int_a^b f$ را که در آن f تابعی پله‌ای است که دامنه آن شامل فاصله‌ای چون $[a,b]$ می‌باشد را تعریف کنیم. در این بخش نماد $\int_A$ را که در ریاضیات عمومی برای انتگرالهای زوج و سه‌گانه بکرات استفاده می‌گردید را تولید کنیم.

در ریاضی عمومی، اگر A یک ناحیه از نقاط صفحه است و اگر f تابعی تعریف شده روی A باشد، آنگاه در صورت امکان وجود از انتگرال $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ صحبت می‌کنیم و آن را انتگرال تابع $f(x,y)$ روی ناحیه A می‌نامیم. بطور مشابه، اگر A ناحیه‌ای از نقاط در فضا باشد آنگاه، در صورت امکان وجود از انتگرال $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ صحبت می‌کردیم. بدین صورت برای توابع از یک متغیر باید بتوان $\int_A f(x)\,dx$ را در نظر گرفت که در آن f تابعی زیبا تعریف شده روی یک مجموعه زیبا از اعداد حقیقی است. ملاحظات کلی چنین انتگرالهائی را برای ریاضیات پیشرفته واگذار می‌کنیم. در این بحث هدف ما در نظر گرفتن انتگرالهائی به فرم

$$\int_A f(x)\,dx \qquad (1)$$

است که در آن f یک تابع پله‌ای و A یک نوع ساده خاص از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ است. اگر A فاصله‌ای به صورت $[a,b]$ باشد آنگاه مفهوم انتگرال (1) واضح است در این حالت تعریف می‌کنیم

$$\int_A f = \int_a^b f$$

توسیع طبیعی این ایده به مجموعه‌های A ای است که می‌توان آنها را به صورت اجتماع متناهی از فواصل نوشت. برای این منظور مفهوم مجموعه مقدماتی را بیان می‌کنیم.

۲. تعریف تابع مشخصه: $A \subseteq \mathbb{R}$ داده شده است، تابع مشخصه A تابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: χ_A تعریف شده توسط

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in \mathbb{R}\setminus A\end{cases}$$

است.

۳. تعریف یک مجموعه مقدماتی: مجموعه کراندار E از اعداد حقیقی را یک مجموعه مقدماتی نامیم هرگاه χ_E یک تابع پله‌ای باشد.

توجه کنید که χ_ϕ تابع ثابت صفر است و بنابراین ϕ یک مجموعه مقدماتی است. برای مجموعه کراندار E با کران پایین a و کران بالای b، شرط آنکه E یک مجموعه مقدماتی باشد به شرط ساده‌تر "χ_E تحدید شده به $[a,b]$ تابع پله‌ای روی $[a,b]$ باشد" تبدیل می‌گردد.

۴. مثال: همان‌گونه که در زیر بیان می‌شود، یک مجموعه مقدماتی مجموعه‌ای است که از اجتماع تعدادی متناهی فواصل کراندار تشکیل شده باشد. مثال‌های زیر به این ایده کمک می‌نمایند.

(۱) فرض کنید $E=[0,1)\cup(1,2)\cup[3,4]\cup\{5\}\cup(6,7]\cup[8,9]$. اگر افراز P به صورت $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ از فاصله $[0,9]$ باشد آنگاه χ_E روی P پله‌ای است و در نتیجه E یک مجموعه مقدماتی خواهد بود.

(2) فرض کنید $E=[0,1]\setminus\{\frac{1}{m}\mid m\in\mathbb{Z}^+\}$. آنگاه برای هر افراز $(x_0,\dots,x_n)$ از $[0,1]$، به وضوح χ_E نمی‌تواند روی فاصله (x_0,x_1) ثابت باشد و در نتیجه E یک مجموعه مقدماتی نیست.

(3) فرض کنید $E=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. مشابه بحث مثال (2)، E یک مجموعه مقدماتی نیست.

(4) فرض کنید $E=[0,1]\cup[2,\infty)$. E مقدماتی نیست زیرا کراندار نمی‌باشد. توجه کنید که فاصله کرانداری خارج از مجموعه فوق وجود ندارد که χ_E روی آن صفر شود.

۵. قضیه: (a) هر فاصله کراندار یک مجموعه مقدماتی است.

(b) اشتراک دو مجموعه مقدماتی، یک مجموعه مقدماتی است.

(c) اجتماع دو مجموعه مقدماتی، مجموعه‌ای مقدماتی است.

(d) تفاضل $A \setminus B$ از دو مجموعه مقدماتی A و B یک مجموعه مقدماتی است.

(e) مجموعه E مقدماتی است اگر و تنها اگر اجتماع تعدادی متناهی فواصل کراندار باشد.

اثبات: قسمت (a) واضح است. حال فرض کنید A و B مجموعه‌های مقدماتی اند. طبق تعریف χ_A و χ_B توابع پله‌ای هستند. چون

$$\chi_{A\cap B} = (\chi_A)(\chi_B)$$

و چون ضرب دو تابع پله‌ای باید پله‌ای باشد، مجموعه $A\cap B$ باید مقدماتی باشد. چون

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - (\chi_A)(\chi_B)$$

دیده می‌شود که $A\cup B$ باید مقدماتی باشد و نهایتاً از

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - (\chi_A)(\chi_B)$$

نیز دیده می‌شود که $A \setminus B$ مقدماتی است. که قسمتهای (b) و (c) و (d) را ثابت می‌کند. همچنین واضح است که اجتماع تعداد متناهی فواصل کراندار، یعنی اجتماع متناهی مجموعه‌های مقدماتی، باید مقدماتی باشد و بنابراین برای تکمیل اثبات تنها نیاز داریم نشان دهیم که هر مجموعه مقدماتی باید اجتماع تعدادی متناهی فواصل کراندار باشد. فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی است. کران پایین آن را انتخاب کرده و a می‌نامیم. به همین فرض کنید b کران بالای E است. چون χ_E یک تابع پله‌ای است، افراز $P = (x_0, \dots, x_n)$ از $[a,b]$ را اختیار می‌کنیم بطوری که χ_E درون P پله‌ای باشد. در نتیجه E اجتماع برخی (احتمالاً هیچ یک) از فواصل (x_{i-1}, x_i) و برخی (یا احتمالاً هیچ یک) از نقاط P است.

۶. انتگرال یک تابع پله‌ای روی مجموعه‌ای مقدماتی: فرض کنید f تابعی پله‌ای و E یک مجموعه مقدماتی است. انتگرال f روی E که با $\int_E f$ نشان می‌دهیم به صورت زیر

$$\int_E f = \int_{-\infty}^{\infty} f\chi_E$$

تعریف می‌کنیم. تابع $f\chi_E$ مقدار $f(x)$ را برای $x\in E$ و مقدار ۰ را برای $x\in\mathbb{R}\setminus E$ می‌پذیرد.

۷. قضیه. جمع‌پذیری: فرض کنید f تابعی پله‌ای و E و F مجموعه مقدماتی مجزا باشند. داریم

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$$

اثبات: حکم با توجه به این واقعیت که

$$f\chi_{E\cup F} = f\chi_E + f\chi_F$$

حاصل می‌شود.

۸. قضیه: فرض کنید E یک مجموعه متناهی و f تابعی پله‌ای است. آنگاه $\int_E f = 0$.

اثبات: تمرین

اندازه لبگ یک مجموعه مقدماتی

۱. مقدمه: مفهوم اندازه لبگ به ما اجازه یافتن راهی برای صحبت در مورد طول $m(E)$ از یک مجموعه E اعداد حقیقی را می‌دهد. می‌توانیم اندازه لبگ $m(E)$ را برای هر کلاس عریض از مجموعه‌های E تعریف کنیم اما در بحث حاضر چنین عملی انجام نمی‌دهیم. در بحث فوق این مفهوم را برای مجموعه‌های مقدماتی بیان خواهیم کرد. مثالهای زیر به فهم تعریف اندازه لبگ برای مجموعه‌های مقدماتی که با $m(E)$ نشان می‌دهیم کمک خواهد کرد.

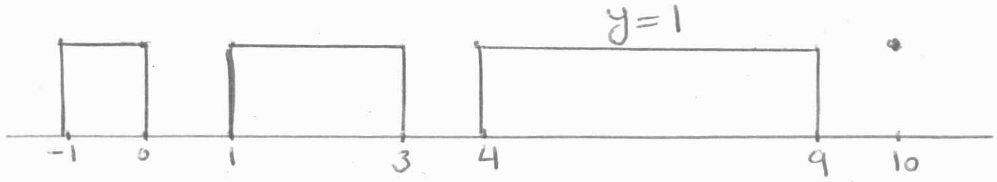
(1) فرض کنید $a<b$ و E هر یک از چهار فاصله (a,b) ، $[a,b)$ ، $(a,b]$ و $[a,b]$ باشد. مفهوم طبیعی طول $m(E)$ این مجموعه E همان عدد $b-a$ است.

(2) فرض کنید $E=(-1,0)\cup[1,3)\cup(4,9]\cup\{10\}$. مجموعه E یک مجموعه مقدماتی است زیرا اجتماعی از فواصل کراندار است. مفهوم طبیعی طول این مجموعه عبارت است از:

$$m(E)=(0-(-1))+(3-1)+(9-4)+0=8$$

از دید دیگری $m(E)$ را می‌توان با در نظر گرفتن تابع χ_E مورد بررسی قرار داد:

$\chi_E(x)=0$	$x\le -1$	$\chi_E(x)=1$	$-1<x<0$
$\chi_E(x)=0$	$0\le x<1$	$\chi_E(x)=1$	$1\le x<3$
$\chi_E(x)=0$	$3\le x\le 4$	$\chi_E(x)=1$	$4\le x\le 9$
$\chi_E(x)=0$	$9<x<10$	$\chi_E(0)=1$	
$\chi_E(x)=0$	$x>10$		



حال مشاهده می‌شود که $m(E)$ شرح داده شده در بالا را می‌توان توسط

$$m(E)=\int_{-1}^{10}\chi_E=\int_{\infty}^{\infty}\chi_E$$

نیز شرح داد.

با شرایط بیان شده فکر تعریف اندازه لبگ یک مجموعه مقدماتی به صورت زیر خواهد بود.

۲. تعریف: فرض کنید مجموعه مقدماتی E داده شده است. اندازه لبگ $m(E)$ از E توسط

$$m(E)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E=\int_E 1$$

تعریف می‌گردد.

۳. قضیه: فرض کنید A و B مجموعه‌های مقدماتی اند.

(a) $m(A)\geq 0$ و اگر A تهی باشد آنگاه $m(A)=0$.

(b) $m(A\cup B)\leq m(A)+m(B)$

(c) اگر A و B متقابلاً مجزا باشند آنگاه $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$.

(d) اگر $B\subseteq A$ آنگاه $m(A\setminus B)=m(A)-m(B)$.

(e) اگر $B\subseteq A$ آنگاه $m(B)\leq m(A)$.

اثبات: (a) واضح است. چون $\chi_{A\cup B}\leq\chi_A+\chi_B$ پس از نامنفی بودن و خطی بودن انتگرال نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{A\cup B}\leq\int_{-\infty}^{\infty}(\chi_A+\chi_B)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_A+\int_{-\infty}^{\infty}\chi_B$$

که درستی (b) را ثابت می‌کند. قسمت (c) بطور مشابه حاصل می‌شود زیرا اگر A و B مجزا باشند داریم $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$. قسمت (d) از این واقعیت که اگر $B\subseteq A$ آنگاه $\chi_A-\chi_B=\chi_{A\setminus B}$، حاصل می‌گردد و قسمت (e) با توجه به قسمت (d) به دست می‌آید.

قضیه زیر به مجموعه‌های باز و بسته رجوع می‌کند. قضیه بیان می‌کند که اگر E یک مجموعه مقدماتی باشد آنگاه یک مجموعه بسته مقدماتی H و یک مجموعه مقدماتی باز U می‌توان یافت

به طوری که $H\subseteq E\subseteq U$ و $m(H)$ و $m(U)$ نزدیک به $m(E)$ می‌باشند.

۴. قضیه: فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی است.

(a) برای $\varepsilon>0$ داده شده، مجموعه مقدماتی بسته H و مجموعه مقدماتی باز U وجود دارند به طوری که $H\subseteq E\subseteq U$ و $m(U\setminus H)<\varepsilon$.

(b) برای $\varepsilon>0$ داده شده، مجموعه مقدماتی بسته H و مجموعه مقدماتی باز U وجود دارند به طوری که $H\subseteq E\subseteq U$ و

$$m(H)>m(E)-\varepsilon \quad \text{و} \quad m(U)<m(E)+\varepsilon$$

اثبات: وقتی که $H\subseteq E\subseteq U$ داریم $m(H)\le m(E)\le m(U)$ و با توجه به رابطه

$$m(U\setminus H)=m(U)-m(H)$$

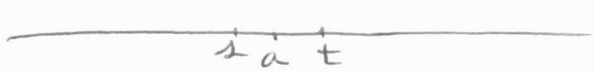
بنابراین نتیجه می‌شود که اگر $\varepsilon>0$ آنگاه نامساوی‌ها در قسمت (b) وقتی که $m(U\setminus H)<\varepsilon$ باشد برقرار است. قسمت (b) بعد از اثبات قسمت (a) نتیجه می‌شود.

برای اثبات قسمت (a) نخست حالتی را که در آن E یک فاصله باز کراندار (a,b) در نظر می‌گیریم. برای $\varepsilon>0$ داده شده، اعداد s و t را چنان انتخاب می‌کنیم که $a<s<t<b$ و

$$s<a+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad t>b-\frac{\varepsilon}{2}$$

و تعریف می‌کنیم $H=[s,t]$ و $U=(a,b)$.

حال حالتی را در نظر می‌گیریم که E یک مجموعه تک نقطه‌ای است. فرض کنید $E=\{a\}$ و فرض کنید $\varepsilon>0$. اعداد s و t را چنان انتخاب می‌کنیم که $s<a<t$ و $t<a+\frac{\varepsilon}{2}$ و $s>a-\frac{\varepsilon}{2}$.



و تعریف می‌کنیم $U=(s,t)$ و $H=\{a\}$.

نهایتاً برای اتمام اثبات، یک مجموعه مقدماتی E منظم است هرگاه در شرط (b) صدق کند.

حکمی که در قسمت اول اثبات بیان گردید این است که هر فاصلهٔ باز کراندار منتظم است. همچنین هر مجموعهٔ تک عضوی منتظم است. نشان می‌دهیم که اجتماع هر دو مجموعهٔ منتظم، منتظم است و چون هر مجموعهٔ مقدماتی اجتماع تعداد متناهی از فواصل باز و تعداد متناهی تک نقطه‌ای است نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ مقدماتی منتظم است.

فرض کنید A و B منتظم باشند. برای اثبات اینکه $A \cup B$ منتظم است، فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده است. مجموعه‌های مقدماتی بستهٔ H و K و مجموعهٔ مقدماتی باز U و V را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$H \subseteq A \subseteq U \quad , \quad K \subseteq B \subseteq V$$

و داشته باشیم

$$m(U \setminus H) < \frac{\epsilon}{2} \quad , \quad m(V \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}$$

داریم

$$H \cup K \subseteq A \cup B \subseteq U \cup V$$

و چون

$$(U \cup V) \setminus (H \cup K) \subseteq (U \setminus H) \cup (V \setminus K)$$

داریم

$$m((U \cup V) \setminus (H \cup K)) \leq m(U \setminus H) + m(V \setminus K) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

و حکم تمام است.

۵. قضیه: برای مجموعهٔ مقدماتی E داده شده و تابع پلهٔای f، داریم

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

اثبات: برای هر عدد x داریم

$$-|f(x)| \chi_E(x) \leq f(x) \chi_E(x) \leq |f(x)| \chi_E(x)$$

و نتیجه اکنون از نامنفی بودن (قضیه ۷ بخش سوم) حاصل می‌شود.

۶. قضیه: فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی و f تابعی پله‌ای است و فرض کنید برای عددی مانند $K\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$|f(x)|\le K \qquad x\in E$$

آنگاه

$$\left|\int_E f\right| \le K m(E)$$

اثبات: چون $K\chi_E \ge |f|\chi_E$ داریم

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\right| &\le \int_E |f| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f|\chi_E \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} K\chi_E \\ &= K\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E = K\, m(E).\end{aligned}$$