دستیابی به تئوری عمومی‌تر انتگرال

گرچه نظریه انتگرال توابع پله‌ای که تا این مرحله آن را توسعه داده‌ایم دارای مشخصه و رفتار حساب انتگرال (ریاضی عمومی) است که معمولاً در جبر محض مطرح می‌گردد. برای رسیدن به تعریف انتگرال یک تابع پله‌ای تنها نیاز به عملیات حساب داریم: جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم. تا این قسمت بحث هیچ نیازی به نمادها و مفاهیمی از قبیل حد، سوپریمم یا اینفیمم که سازگاری نزدیکتری با حساب دیفرانسیل و انتگرال دارند، نداشتیم. به هر حال این مفهوم حدی برای توسعه نظریه فوق به کلاس عریض‌تری از توابع مشاهده می‌شود. چند روش متفاوت برای توسیع نظریه فوق به کلاس عریض‌تری از توابع وجود دارد و هر یک از آنها منجر به یکی از تئوری‌های انتگرال می‌شود. هر یک از این تئوری‌ها با انتگرال توابع پله‌ای به عنوان شروع بحث سروکار دارد و سپس انتگرال توابع کلی‌تر با در نظر گرفتن حد یا سوپریمم یا اینفیمم توابعی مانند توابع پله‌ای تقریب زده می‌شوند.

در قلب هر یک از تئوری‌های انتگرال، تکنیکی قرار دارد که توسط ادوکسوس Eudoxus کشف گردید و سپس به یک تئوری پیشرفته توسط ارشمیدس توسیع داده شد (حدود ۲۵ سال قبل از میلاد) ارشمیدس مساحت‌ها و حجم‌های تعدادی از اشکال هندسی را با تقریب آنها از داخل و خارج توسط چندضلعی‌ها محاسبه کرد. دلیل وی این بود که اگر A یک ناحیه مسطح باشد و اگر s و S دو چندضلعی باشند به طوری که $s \subseteq A \subseteq S$ آنگاه

$$Area(s) \leq Area(A) \leq Area(S)$$

بنابراین، برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توان تضمین کرد که مساحت (s) و مساحت (S) باید تقریباً مساحت (A) با تقریب ε باشند، به طور ساده‌تر

$$Area(S) - Area(s) < \varepsilon$$

ت به این ایده برای توابع به شرح زیر است: فرض کنید f یک تابع کراندار تعریف شده روی $[a,b]$ است و s و S توابع پله‌ای روی $[a,b]$ اند به طوری که $s \le f \le S$. آنگاه با توجه به معنی $\int_a^b f$، باید داشته باشیم

$$\int_a^b s \le \int_a^b f \le \int_a^b S$$

بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توانیم تضمین کنیم که هر دوی $\int_a^b s$ و $\int_a^b S$ تقریب $\int_a^b f$ به حدود ε است، یا به طور ساده‌تر

$$\int_a^b S - \int_a^b s < \varepsilon$$

این روش تقریب زدن یک تابع داده شده توسط توابع پله‌ای که در تئوری انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد توسط کُشی، داربکس، ریمان و دیگران در قرن نوزدهم توسیع داده شد و چیزی است که ما آن را انتگرال ریمان می‌نامیم.

انتگرال پذیری ریمان و انتگرال ریمان

۱. انتگرالهای پایینی: فرض کنید f تابع کراندار تعریف شده روی $[a,b]$ است. انتگرال پایینی $\underline{\int_a^b} f$ از تابع f به صورت سوپرمم مجموعه تمام انتگرالهای $\int_a^b s$ تعریف می‌شود که سوپرمم روی تمام توابع پله‌ای s که $f \geq s$ است گرفته می‌شود.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\int_a^b s \;\middle|\; s \leq f \text{ است و } [a,b] \text{ یک تابع پله‌ای روی } s\right\}$$

۲. انتگرالهای بالایی. انتگرالهای بالایی به روش مشابه با انتگرال پایینی تعریف می‌شود: فرض کنید f تابعی کراندار تعریف شده روی فاصله $[a,b]$ است. انتگرال بالایی $\overline{\int_a^b} f$ از تابع f اینفیمم مجموعه تمام انتگرالهای $\int_a^b S$ است که اینفیمم روی تمام توابع پله‌ای S که $f \leq S$ گرفته می‌شود.

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{\int_a^b S \;\middle|\; S \geq f \text{ و } [a,b] \text{ است } S \text{ یک تابع پله‌ای روی}\right\}$$

۳. قضیه: اگر f تابعی کراندار تعریف شده بر $[a,b]$ باشد، آنگاه

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

اثبات: برای توابع پله‌ای s و S داده شده روی $[a,b]$ بطوری که $s \leq f \leq S$، از قضیه نامنفی بودن نتیجه می‌شود $\int_a^b s \leq \int_a^b S$ و قضیه برقرار است.

۴. انتگرال پذیری ریمان و انتگرال ریمان: فرض کنید f تابعی پله‌ای روی فاصله $[a,b]$ باشد. چون $\int_a^b f$ بزرگترین عضو مجموعه

$$\left\{\int_a^b s \;\middle|\; s \leq f \text{ که } [a,b] \text{ تابع پله‌ای روی } s\right\}$$

است و هم کوچکترین عضو مجموعه

$$\left\{\int_a^b S \;\middle|\; S \geq f \text{ که } [a,b] \text{ تابع پله‌ای روی } S\right\}$$

می‌باشد، در آن صورت داریم

$$\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f$$

این مطلب منجر به تعریف انتگرال پذیری ریمان می‌شود:

تابع کراندار f روی فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان روی $[a,b]$ است هرگاه

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

و در این حالت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

روش دیگر بیان این مطلب چنین است که: $\int_a^b f$ عدد منحصر بفرد I است که در نامساوی زیر برقرار است:

$$\int_a^b s \le I \le \int_a^b S$$

برای هر انتخاب توابع پله‌ای s و S بطوری که $s \le f \le S$. مشابه با انتگرال‌های توابع پله‌ای در بخش‌های قبل نماد دیگر برای $\int_a^b f$ عبارت است از $\int_a^b f(x)dx$.

محکی برای انتگرال پذیری ریمان:

۱. قضیه. فرض کنید f تابعی کراندار روی فاصله $[a,b]$ است.

الف) دنباله (s_n) از توابع پله‌ای روی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ $s_n \le f$ و داریم

$$\int_a^b s_n \longrightarrow \underline{\int_a^b} f \qquad \text{وقتی } n \to \infty$$

ب) دنباله (S_n) از توابع پله‌ای روی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$، $S_n \ge f$ و داریم

$$\int_a^b S_n \longrightarrow \overline{\int_a^b} f \qquad \text{وقتی } n \to \infty$$

اثبات: برای هر عدد طبیعی n، تابع پله‌ای $s_n \le f$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\int_a^b s_n > \underline{\int_a^b} f - \frac{1}{n}$$

چون

$$\forall n \qquad \underline{\int_a^b} f - \frac{1}{n} < \int_a^b s_n \leq \underline{\int_a^b} f$$

واضح است که دنباله (s_n) در قسمت (الف) برقرار است.

قسمت (ب) مشابه است.

۲. تعریف: فرض کنید f تابعی کراندار روی فاصله $[a,b]$ است. گوئیم که زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) از توابع پله‌ای روی $[a,b]$ فشار f روی $[a,b]$ است هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم $s_n \leq f \leq S_n$ و

$$\int_a^b (S_n - s_n) \longrightarrow 0 \qquad \text{وقتی } n \to \infty$$

۳. قضیه: فرض کنید f تابعی کراندار روی فاصله $[a,b]$ است. آنگاه شرایط زیر معادل اند:

الف) f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان است.

ب) زوج دنباله‌هایی مانند (s_n) و (S_n) از توابع پله‌ای وجود دارند بطوری که فشار f روی $[a,b]$ هستند.

اثبات: (الف) $\Rightarrow$ (ب)، فرض کنید (الف) برقرار است. با استفاده از قضیه ۱ زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) از توابع پله‌ای روی $[a,b]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم $s_n \leq f \leq S_n$ و

$$\int_a^b s_n \longrightarrow \underline{\int_a^b} f \quad , \quad \int_a^b S_n \longrightarrow \overline{\int_a^b} f$$

پس

$$\int_a^b (S_n - s_n) \longrightarrow \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$$

پس زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) فشار f روی $[a,b]$ اند.

برای اثبات (ب) $\Rightarrow$ (الف)، فرض کنید (ب) برقرار است و زوج دنباله (s_n) و (S_n) از

توابع پله‌ای را که فشار f روی $[a,b]$ انتخاب کرده‌ایم. برای هر n داریم

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \int_a^b (S_n - s_n)$$

و چون عبارت آخر وقتی $n\to\infty$ به صفر میل می‌کند نتیجه می‌شود

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$$

۴ قضیه : فرض کنید f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است و زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) را

فشار f روی $[a,b]$ باشند. آنگاه وقتی $n\to\infty$ داریم

$$\int_a^b s_n \longrightarrow \int_a^b f \quad , \quad \int_a^b S_n \longrightarrow \int_a^b f$$

اثبات : از نامساوی

$$\int_a^b s_n \leq \int_a^b f \leq \int_a^b S_n$$

دیده می‌شود که برای n

$$0 \leq \int_a^b f - \int_a^b s_n \leq \int_a^b S_n - \int_a^b s_n$$

بنابراین وقتی $n\to\infty$ داریم

$$\int_a^b S_n - \int_a^b s_n = \int_a^b (S_n - s_n) \longrightarrow 0$$

از قضیه ساندویچ نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b f - \int_a^b s_n \longrightarrow n \qquad \text{وقتی که } n\to\infty$$

به عبارت دیگر وقتی $n\to\infty$ داریم

$$\int_a^b s_n \longrightarrow \int_a^b f$$

استدلال مشابه نشان می‌دهد که $\int_a^b S_n \to \int_a^b f$.

خواص ساده انتگرال ریمان

۱. قضیه: خطی بودن انتگرال ریمان. فرض کنید f و g توابعی تعریف شده روی $[a,b]$ و c عددی حقیقی دلخواه است.

الف) اگر f و g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند آنگاه $f+g$ نیز چنین است و داریم

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

ب) اگر f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد آنگاه cf نیز چنین است و داریم

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f$$

اثبات

۲ قضیه : نامنفی بودن انتگرال ریمان . فرض کنید f و g روی $[a,b]$ توابع انتگرال پذیر ریمان بوده و $f \leq g$. آنگاه

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

اثبات :

۴. قضیه : جمع پذیری انتگرال ریمان . فرض کنید $a \leq b \leq c$ و f روی $[a,c]$ تابع انتگرال پذیر ریمان باشد . آنگاه f باید روی هر یک از فواصل $[a,b]$ و $[b,c]$ انتگرال پذیر ریمان باشد و داریم

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

اثبات :

۴. تعریف . اگر f روی $[a,b]$ یک تابع انتگرال پذیر ریمان باشد که در آن $a<b$، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

با این تعریف، قضیه جمع پذیری را بدست می‌آوریم که وابسته به ترتیب حدود انتگرال گیری نمی‌باشد .

۵. قضیه : فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی و f انتگرال پذیر ریمان روی فاصله‌ای از کوچکترین این اعداد به بزرگترین این اعداد باشد، آنگاه

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

مثال‌هایی از توابع انتگرال‌پذیر و انتگرال‌ناپذیر

۱. می‌توانیم مساحت یک مثلث را به دست آوریم. در این مثال $\int_0^1 x\,dx$ را در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم: $f(x)=x$ برای $0\le x\le 1$ و برای هر عدد طبیعی n افراز P_n را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P_n = \left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$$

به عبارت دیگر P یک n-افراز منتظم از $[0,1]$ است. دو تابع پله‌ای s_n و S_n را با قرار دادن $s_n(x)=S_n(x)=x$ به ازای $x\in P_n$ و در هر فاصله $((i-1)/n\,,\,i/n)$ قرار می‌دهیم s_n و S_n به ترتیب مقادیر $(i-1)/n$ و i/n را بگیرد، انتخاب می‌کنیم. واضح است که برای هر n

$$s_n \le f \le S_n$$

و چون

$$\int_0^1 (S_n - s_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

نتیجه می‌دهد که زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) تابع f را می‌فشارد. بنابراین f انتگرال‌پذیر ریمان روی $[0,1]$ است. برای یافتن مقدار $\int_0^1 f$ توجه می‌کنیم که برای هر n داریم

$$\int_0^1 S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}$$

و بنابراین $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$ یا $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

۲. در این مثال روش مثال قبل را برای انتگرال ریمان $\int_0^1 x^2 dx$ تکرار می‌کنیم. برای $0\le x\le 1$ تعریف می‌کنیم $f(x)=x^2$ و همانند مثال قبل، P_n را یک n-افراز منتظم از $[0,1]$ برای هر n در نظر می‌گیریم. در این حالت توابع پله‌ای s_n و S_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_n(x) = S_n(x) = x^2 \qquad x\in P_n$$

$$s_n(x) = (i-1)^2/n^2 \qquad \frac{i-1}{n} < x < \frac{i}{n}$$

$$S_n(x) = i^2/n^2 \qquad \frac{i-1}{n} < x < \frac{i}{n}$$

واضح است که $s_n \le f \le S_n$ $\forall n$ و چون

$$\int_0^1 (S_n - s_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right)\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \longrightarrow 0$$

پس زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) فشار f روی $[0,1]$ می‌باشند. بنابراین f انتگرال‌پذیر ریمان روی $[0,1]$ است. برای یافتن مقدار $\int_0^1 f$ توجه داریم که برای هر n وقتی $n \to \infty$

$$\int_0^1 S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}$$

در توابع انتگرال‌پذیر در مثال‌های قبل هر دو یکنوا هستند. در مثال بعد، می‌بینیم که تمام توابع یکنوا انتگرال‌پذیرند.

۲. توابع یکنوا انتگرال‌پذیرند. فرض کنید f تابعی یکنوا تعریف شده روی فاصله $[a,b]$ است. آنگاه f انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a,b]$ می‌باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم f صعودی است و اثبات حالت نزولی به عنوان تمرین واگذار می‌گردد. برای هر عدد طبیعی داده شده n، P_n یک n-افراز منظم از $[a,b]$ را در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر P_n افراز $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ است که در آن برای هر $i = 0, \ldots, n$ داریم

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

حال s_n و S_n، توابع پله‌ای روی $[a,b]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_n(x_i) = S_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n$$

$$s_n(x) = f(x_{i-1}) \qquad x_{i-1} < x < x_i$$

$$S_n(x) = f(x_i) \qquad x_{i-1} < x < x_i$$

توجه کنید که $s_n \le f \le S_n$ و

$$\int_a^b (S_n - s_n) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$= \frac{(b-a)}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

وقتی که $n \to \infty$ داریم

$$\int_a^b (S_n - s_n) = \frac{(b-a)}{n}\left(f(b)-f(a)\right) \longrightarrow 0$$

زوج دنباله‌های (S_n) و (s_n) فشار f روی $[a,b]$ اند و در نتیجه f انتگرال‌پذیر است.

۴. یک تابع انتگرال‌ناپذیر: در این مثال به تابعی روی $[0,1]$ نگاه می‌کنیم که علاوه بر ناپیوسته بودن انتگرال‌پذیر ریمان نیست. تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

توجه کنید که این تابع در هر نقطه از فاصله $[0,1]$ ناپیوسته است. حال فرض کنید P افراز دلخواه $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از $[0,1]$ است که s و S درون P پله‌ای اند و $S \geq f \geq s$. آنگاه برای هر i، اگر α_i و β_i به ترتیب مقادیر ثابت s و S در فاصله (x_{i-1}, x_i) باشند، چون فاصله (x_{i-1}, x_i) باید شامل هم نقاط گویا و هم نقاط غیرگویا باشد، می‌بینیم که $\alpha_i \leq 0$ و $\beta_i \geq 1$، بنابراین $\underline{\int_0^1} f \leq 0$ و $\overline{\int_0^1} f \geq 1$ و در نتیجه f روی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

توابع بالایی، پایینی و نوسانی

در این بخش خواهیم دید که اگر f تابعی کراندار روی $[a,b]$ و P افرازی از آن حاصل باشد آنگاه کوچکترین تابع پله‌ای S که $f \le S$ و بزرگترین تابع پله‌ای s که $s \le f$ وجود دارد بطوری که s و S درون P پله‌ای اند. توابع S و s و $S-s$ را تابع بالایی، پایینی و نوسانی f روی P می‌نامیم. با استفاده از این توابع روش (محک) مفید برای بررسی انتگرال‌پذیری f را ارائه می‌دهیم. بحث را با لم زیر شروع می‌کنیم.

۱. لم: فرض کنید f تابع کراندار تعریف شده روی مجموعه ناتهی S باشد. قرار می‌دهیم

$$\alpha = \inf\{f(x) \mid x\in S\} \qquad \beta = \sup\{f(x) \mid x\in S\}$$

$$\delta = \sup\{f(x)-f(t) \mid x \,\&\, t\in S\} = \sup\{|f(x)-f(t)| \mid x\,\&\,t\in S\}$$

آنگاه $\delta = \beta - \alpha$.

اثبات: برای هر نقطه داده شده x و t در S، عدد $|f(x)-f(t)|$ یا برابر $f(x)-f(t)$ یا $f(t)-f(x)$ است. بنابراین دو عبارت در تعریف δ یکسان می‌باشند. حال وقتی که x و t نقاطی از S اند، چون $f(x) \le \beta$ و $f(t) \ge \alpha$ داریم

$$f(x)-f(t) \le \beta-\alpha$$

پس $\delta \le \beta-\alpha$. برای رسیدن به تناقض، فرض کنید $\delta < \beta-\alpha$. با استفاده از این فرض داریم $\delta+\alpha < \beta$، نقطه $x\in S$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\delta+\alpha < f(x)$. حال با استفاده از این واقعیت که $\alpha < f(x)-\delta$، نقطه $t\in S$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $f(t) < f(x)-\delta$. حال داریم $\delta < f(x)-f(t)$ که غیرممکن است. پس فرض $\delta < \beta-\alpha$ رد می‌شود یعنی $\delta = \beta-\alpha$.

۲. توابع بالایی، پایینی و نوسانی یک تابع داده شده روی یک افراز. فرض کنید f تابع کراندار
تعریف شده روی فاصله $[a,b]$ است و P افراز $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ از $[a,b]$ باشد. توابع
بالایی و پایینی $\mathcal{U}(P,f)$ و $\mathcal{L}(P,f)$ از f روی P به صورت زیر تعریف می‌شوند:
برای هر $i=0,1,\dots,n$ تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{U}(P,f)(x_i)=\mathcal{L}(P,f)(x_i)=f(x_i)$$

و برای هر $i=1,2,\dots,n$ فرض می‌کنیم $\mathcal{U}(P,f)$ و $\mathcal{L}(P,f)$ در فاصله (x_{i-1},x_i) به ترتیب مقادیر
زیر را اختیار کنند: $\sup\{f(x) \mid x\in(x_{i-1},x_i)\}$ و $\inf\{f(x) \mid x\in(x_{i-1},x_i)\}$.
توجه کنید که $\mathcal{U}(P,f)$ از تمام توابع پله‌ای s که درون افراز P پله‌ای اند و در $s\ge f$
صدق می‌کنند کوچکتر است و $\mathcal{L}(P,f)$ از تمام توابع پله‌ای s که درون افراز P پله‌ای اند و $s\le f$
بزرگتر است.

تابع نوسانی $\omega(P,f)$ از f روی P را با

$$\omega(P,f)=\mathcal{U}(P,f)-\mathcal{L}(P,f)$$

تعریف می‌کنیم. تابع $\omega(P,f)$ در هر نقطه x_i صفر است و طبق لم قبل در هر فاصله (x_{i-1},x_i)
مقدار ثابتی را می‌پذیرد.

$$\begin{aligned}
&\sup\{f(x) \mid x\in(x_{i-1},x_i)\}-\inf\{f(x) \mid x\in(x_{i-1},x_i)\}\\
&=\sup\{f(x)-f(t) \mid x \,\&\, t\in(x_{i-1},x_i)\}\\
&=\sup\{|f(x)-f(t)| \mid x \,\&\, t\in(x_{i-1},x_i)\}
\end{aligned}$$

۳. قضیه: محک اول برای انتگرال پذیری. فرض کنید f یک تابع کراندار تعریف شده بر $[a,b]$
است. آنگاه دو شرط زیر باهم معادل اند:
الف) f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان است.

ب) برای هر $\varepsilon > 0$ ، افراز P از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b \omega(P,f) < \varepsilon$$

اثبات: (الف) $\Leftarrow$ (ب). فرض کنید (الف) برقرار است و زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) از توابع پله‌ای را انتخاب می‌کنیم که f را روی $[a,b]$ می‌فشارد. فرض کنید $\varepsilon > 0$ و n را چنان انتخاب می‌کنیم که $\int_a^b (S_n - s_n) < \varepsilon$. افراز P از $[a,b]$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که هر دوی s_n و S_n روی P پله‌ای باشند. چون $S_n \geq U(P,f)$ و $s_n \leq L(P,f)$ داریم

$$\int_a^b \omega(P,f) = \int_a^b \left(U(P,f) - L(P,f)\right) \leq \int_a^b (S_n - s_n) < \varepsilon$$

(ب) $\Leftarrow$ (الف). فرض کنید (ب) برقرار است. برای هر عدد طبیعی n ، افراز P_n از $[a,b]$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$\int_a^b \omega(P_n,f) < \frac{1}{n}$$

برای هر n تعریف می‌کنیم $S_n = U(P_n,f)$ و $s_n = L(P_n,f)$. چون زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) تابع f را روی $[a,b]$ می‌فشارند، نتیجه می‌گیریم که f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

۴. قضیه: محک دوم برای انتگرال‌پذیری. فرض کنید f تابعی کراندار تعریف شده بر $[a,b]$ است. آنگاه دو شرط زیر معادل‌اند.

الف) f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

ب) برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، افراز P از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که اگر تعریف کنیم

$$E = \{ x \in [a,b] \mid \omega(P,f)(x) \geq \varepsilon \}$$

آنگاه $m(E) < \varepsilon$.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب). فرض کنید (الف) برقرار است. فرض $\varepsilon > 0$ داده شده، با استفاده از قضیه قبل افراز P از $[a,b]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\int_a^b \omega(P,f) < \varepsilon^2$$

مجموعه E را همان گونه که در شرط (ب) آمده است تعریف می‌کنیم. در این صورت E یک مجموعه مقدماتی است و داریم

$$\varepsilon^2 > \int_a^b \omega(P,f) \geq \int_E \omega(P,f) \geq \int_E \varepsilon = \varepsilon\, m(E)$$

پس $m(E) < \varepsilon$.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). فرض کنید (ب) برقرار است. با توجه به اینکه f کراندار است، عدد K را انتخاب می‌کنیم به طوری که $|f| \leq K$. برای هر عدد طبیعی n، افراز P_n از $[a,b]$ را اختیار می‌کنیم به طوری که اگر

$$E_n = \{ x \in [a,b] \mid \omega(P_n,f)(x) \geq \tfrac{1}{n} \}$$

آنگاه $m(E_n) < \frac{1}{n}$. برای هر n تعریف می‌کنیم $F_n = [a,b] \setminus E_n$. بنابراین فاصله $[a,b]$ به دو قسمت E_n و F_n تقسیم می‌شود که در آن E_n یک مجموعه «کوچک» و تابع $\omega(P_n,f)$ در F_n «کوچک» است. توجه کنید که برای هر $x \in [a,b]$ داریم $\omega(P_n,f)(x) \leq 2K$. بنابراین برای هر n داریم

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(P_n,f) &= \int_{E_n} \omega(P_n,f) + \int_{F_n} \omega(P_n,f) \\
&\leq \int_{E_n} 2K + \int_{F_n} \left(\tfrac{1}{n}\right) \\
&\leq 2K\, m(E_n) + \int_a^b \left(\tfrac{1}{n}\right) \\
&\leq \frac{2K}{n} + \frac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

وقتی $n \to \infty$ طرف راست نامساوی بالا به صفر میل می‌کند. پس شرط (b) از قضیه ۳ برقرار است و در نتیجه f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان می‌باشد.