قانون پیوستگی در انتگرال ریمان

این بخش را با اثبات قضیه اینکه توابع پیوسته همیشه انتگرال پذیرند شروع می‌کنیم.

۱. قضیه: فرض کنید f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته است. آنگاه f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان می‌باشد.

اثبات: روش نشان دادن اینکه f انتگرال پذیر است بدین صورت می‌باشد که نشان می‌دهیم f در شرط (ب) قضیه ۴ صدق می‌کند. نیاز داریم ثابت کنیم که برای هر عدد $\varepsilon > 0$ افراز P از $[a,b]$ وجود دارد بطوری که اگر

$$E = \{x \mid \omega(P,f)(x) \geq \varepsilon\}$$

آنگاه $m(E) < \varepsilon$. اما در اینجا مطلبی بیشتر از این ادعا را نشان می‌دهیم، می‌بینیم که مجموعه E تهی است وقتی که افراز P دارای نُرمی به اندازه کافی کوچک باشد.

فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون f روی $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است عدد $\delta > 0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که وقتی x و t نقاطی در $[a,b]$ باشند و $|x-t| < \delta$ داشته باشیم $|f(x)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. حال افراز $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از $[a,b]$ را انتخاب می‌کنیم بطوری که $\|P\| < \delta$. می‌توان چنین کرد زیرا برای مثال P را می‌توان یک n-افراز منظم از $[a,b]$ گرفت که در آن n به اندازه کافی بزرگ است تا $(b-a)/n < \delta$ برقرار باشد. حال وقتی دو نقطه x و t در فاصله داده شده (x_{i-1}, x_i) باشند داریم $|x-t| < \delta$ و در نتیجه $|f(x)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. بنابراین برای هر $x \in [a,b]$ داریم

$$\omega(P,f) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

و چون مجموعه $E = \{x \mid \omega(P,f)(x) \geq \varepsilon\}$ تهی است در نتیجه $m(E) = 0 < \varepsilon$.

۲. قضیه: محک   لبگ برای انتگرال‌پذیری ریمان. فرض کنید f تابع کراندار تعریف شده روی فاصله $[a,b]$ است. آنگاه شرط کافی برای آنکه f انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a,b]$ باشد آن است که برای هر عدد $\varepsilon>0$ زیرمجموعه فشرده‌ای E از $[a,b]$ وجود داشته باشد بطوری که $m(E)<\varepsilon$ و f روی مجموعه $[a,b]\setminus E$ پیوسته باشد.

اثبات: مشابه قضیه ۱ برای نشان دادن آنکه f انتگرال‌پذیر است، ثابت می‌کنیم f در شرط (ب) قضیه   ۴ صدق می‌کند.

فرض کنید $\varepsilon>0$. زیرمجموعه فشرده‌ای E از $[a,b]$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که $m(E)<\varepsilon$ و f روی $[a,b]\setminus E$ پیوسته باشد. با استفاده از قضیه ۵، مجموعه باز U وجود دارد به طوری که $U\supseteq E$ و $m(U)<\varepsilon$. چون f روی مجموعه کراندار بسته $[a,b]\setminus U$ پیوسته است، باید روی این مجموعه پیوسته یکنواخت باشد. عدد $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر x، t نقاطی از $[a,b]\setminus U$ باشند و $|x-t|<\delta$ آنگاه $|f(x)-f(t)|<\varepsilon/2$.

حال افراز P_1 از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\|P_1\|<\delta$ و افراز P_2 از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که تابع پله‌ای χ_U روی P_2 پله‌ای است. حال P را تظریف مشترک P_1 و P_2 در نظر می‌گیریم و آن را به صورت $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ می‌نویسیم. مطلبی که در مورد این افراز P مهم است این است که برای هر $i=1,2,\dots,n$ فاصله (x_{i-1},x_i) یا داخل U است یا مجزا از U می‌باشد و البته با آنکه مقدار ثابت χ_U در (x_{i-1},x_i) یک یا صفر باشد. بعلاوه اگر (x_{i-1},x_i) از U مجزا باشد آنگاه نامساوی $x_i-x_{i-1}<\delta$ تضمین می‌کند که $|f(x)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$ برای هر x و t در (x_{i-1},x_i) و بنابراین مقدار ثابت $\omega(P,f)$ در (x_{i-1},x_i) نمی‌تواند بیشتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ باشد. پس اگر $A=\{x\in[a,b] \mid \omega(P,f)(x)\geq\frac{\varepsilon}{2}\}$ داریم $A\subseteq U$ و در نتیجه $m(A)<\varepsilon$.

۳. تبصره . برخلاف محک   لبگ که در بحث پیشرفته‌تر مطرح می‌شود، محک لبگ شرط لازم و کافی برای انتگرال‌پذیری نیست. این محک تنها شرط کافی است. برای دیدن اینکه عکس قضیه   ۲ غلط است، فرض کنید f تابع تعریف شده توسط

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{گنگ باشد } x \\ \frac{1}{n} & \text{باشد } x_n=\frac{m}{n} \text{ گویای } x \end{cases}$$

نشان دهید f روی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر ریمان است، اما در هر عدد گویایی ناپیوسته می‌باشد.

حال فرض کنید E یک مجموعه مقدماتی و f روی $[0,1]\setminus E$ پیوسته باشد. آنگاه چون $E \supseteq \mathbb{Q}\cap[0,1]$ ، مجموعه E باید شامل تمام بجز احتمالاً تعداد متناهی از نقاط فاصله $[0,1]$ باشد و بنابراین $m(E)\geq 1$.

قضیه ترکیب برای انتگرال‌پذیری ریمان

این بخش را با دو حالت ساده که به ما در رسیدن به نتیجه اصلی کمک می‌کنند، شروع می‌کنیم.

۱. قضیه. فرض کنید f روی فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه $|f|$ نیز روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \qquad (1)$$

اثبات. مجدداً برای نشان دادن اینکه تابع انتگرال‌پذیر است، برقراری شرط (ب) قضیه ۲ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده و افراز P از $[a,b]$ را انتخاب کرده‌ایم به طوری که اگر

$$E=\{x \mid \omega(P,f)(x) \geq \varepsilon\}$$

آنگاه $m(E)<\varepsilon$. اما برای هر عدد x و t در $[a,b]$ داریم

$$\big||f(x)|-|f(t)|\big| \leq |f(x)-f(t)|$$

و بنابراین اگر E^* را به صورت

$$E^*=\{x \mid \omega(P,|f|)(x) \geq \varepsilon\}$$

تعریف کنیم آنگاه $E^* \subseteq E$ و بنابراین $m(E^*)<\varepsilon$. حال نامساوی (1) از نامنفی بودن حاصل می‌شود.

۲. قضیه: فرض کنید f روی فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. آنگاه تابع f^2 روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر می‌باشد.

اثبات: از آنجایی که f کراندار است، عدد مثبت K وجود دارد به طوری که برای هر $x\in[a,b]$ داریم $|f(x)|\leq K$. حال واضح است که اگر x و t نقاط دلخواهی در $[a,b]$ باشند آنگاه

$$|f^2(x)-f^2(t)|=|f(x)-f(t)|.|f(x)+f(t)|$$
$$\leq 2K|f(x)-f(t)|$$

و اگر P افراز دلخواهی از $[a,b]$ باشد نتیجه می‌شود که

$$\omega(P, f^2) \leq 2K\,\omega(P, f)$$

برای نشان دادن اینکه f^2 در شرط (ب) قضیه ۴ صدق می‌کند، فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده است. α را برابر با می‌نیمم دو عدد ϵ و $\epsilon/2K$ تعریف می‌کنیم و با استفاده از قضیه ۴. افراز P از $[a,b]$ را انتخاب کرده به طوری که اگر

$$E = \{x \mid \omega(P, f)(x) \geq \alpha\}$$

آنگاه $m(E) < \alpha$. دیده می‌شود که اگر

$$E^* = \{x \mid \omega(P, f^2)(x) \geq \epsilon\}$$

آنگاه $E^* \subseteq E$ و بنابراین $m(E^*) < \alpha \leq \epsilon$. بنابراین f^2 در شرط (ب) قضیه ۴ صدق می‌کند و در نتیجه f^2 انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ است.

۳. نتیجه: فرض کنید f و g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند. آنگاه تابع fg روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر می‌باشد.

اثبات. قضیه قبل بیان می‌کند که مربع هر تابع انتگرال‌پذیر، انتگرال‌پذیر است. بنابراین انتگرال‌پذیری تابع fg از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$$

برای هر تابع f، تابع $|f|$ ترکیب $h \circ f$ است که در آن $h(u) = |u|$ برای هر u؛ به طریق مشابه f^2 به صورت $h \circ f$ است که در آن $h(u) = u^2$ برای هر u. توجه کنید که در هر یک از حالتها f کراندار و h روی برد f پیوسته یکنواخت می‌باشد.

حال می‌خواهیم قضایای ۱ و ۲ را با نشان دادن اینکه اگر f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و h روی برد f پیوسته یکنواخت باشد آنگاه $h \circ f$ انتگرال‌پذیر است، توسعه دهیم.

توجه به این واقعیت که وقتی h کراندار است می‌توان شرط پیوسته یکنواخت را با پیوستگی جابجا کرد، مهم است، اما در این وضعیت اثبات قضیه مشکل می‌گردد. قضیه تابع مرکب کلی‌تر با کمک محک لبگ برای انتگرال‌پذیری در آنالیز پیشرفته‌تری مورد بحث قرار می‌گیرد.

۴. قضیه تابع مرکب. فرض کنید f روی فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و h روی برد f پیوسته یکنواخت است. آنگاه تابع مرکب $h \circ f$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات: قرار می‌دهیم $g = h \circ f$ یعنی

$$g(x) = h(f(x)) \qquad \forall x \in [a,b]$$

تابع g کراندار است (تمرین). برای اثبات اینکه g انتگرال‌پذیر می‌باشد درستی شرط (ب) قضیه ۴. را برای g بررسی می‌کنیم.

فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است، چون h پیوسته یکنواخت روی برد f است، عدد $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر y و z نقاطی در برد f بوده و $|y-z|<\delta$، آنگاه $|h(y)-h(z)|<\varepsilon/2$. فرض کنید α می‌نیمم ε و δ باشد، با استفاده از انتگرال‌پذیری f افراز $P=(x_0,\dots,x_n)$ از $[a,b]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که اگر

$$E = \{x \mid \omega(P,f)(x) \geq \alpha\}$$

آنگاه $m(E)<\alpha$. حال برای هر $i=1,2,\dots,n$ مگر اینکه $(x_{i-1},x_i) \subseteq E$، می‌دانیم که وقتی x و t نقاطی از (x_{i-1},x_i) باشند داریم $|f(x)-f(t)|<\alpha \leq \delta$ و بدین ترتیب $|h(f(x))-h(f(t))|<\frac{\varepsilon}{2}$. این بیان می‌کند که در هر فاصله (x_{i-1},x_i) که مشمول در E نباشد مقدار ثابت $\omega(P,g)$ نمی‌تواند بیشتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ باشد. در نتیجه اگر

$$A = \{x \mid \omega(P,g)(x) \geq \varepsilon\}$$

آنگاه $A \subseteq E$ پس $m(A) \leq m(E) < \alpha \leq \varepsilon$.

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

قضایای این بخش ارتباط مهمی بین مفاهیم مشتق گیری و انتگرال گیری را بیان می کنند، که این ارتباط را قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می نامیم.

۱. قضیه: فرض کنید f روی $[a,b]$ مشتق پذیر بوده و f' روی $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان باشد. آنگاه

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

اثبات: قضیه را با نشان دادن این مطلب که اگر s و S توابع پله ای دلخواه باشند به طوری که $s \leq f' \leq S$ آنگاه

$$\int_a^b s \leq f(b) - f(a) \leq \int_a^b S \qquad (1)$$

ثابت می کنیم. فرض کنید s و S توابع پله ای دلخواه بوده و $s \leq f' \leq S$. افراز $P = (x_0, \ldots, x_n)$ از $[a,b]$ را انتخاب می کنیم به طوری که s و S درون P پله ای باشند، و مقادیر ثابت s و S در هر فاصله (x_{i-1}, x_i) را به ترتیب α_i و β_i نامیم. حال اولین قضیه مقدار میانگین را برای f در هر فاصله $[x_{i-1}, x_i]$ بکار می بریم. برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ نقطه t_i در (x_{i-1}, x_i) وجود دارد به طوری که

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f'(t_i)$$

چون $\alpha_i \leq f'(t_i) \leq \beta_i$ برای هر i، می بینیم که

$$\int_a^b s = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$\leq \sum_{i=1}^n \beta_i (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b S$$

بنابراین

$$\int_a^b s \leq \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \leq \int_a^b S$$

و نامساوی (1) حاصل می شود.

۲. قضیه. فرض کنید f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است و برای هر x در $[a,b]$ تعریف می‌کنیم

$$F(x)=\int_a^x f$$

آنگاه F روی $[a,b]$ لیپ‌شیتز (و بنابراین پیوسته یکنواخت) است.

اثبات. عدد K وجود دارد به طوری که برای هر $x\in[a,b]$، $|f(x)|\le K$. حال نشان می‌دهیم که برای هر x، t در $[a,b]$ نتیجه می‌شود که $|F(x)-F(t)|\le K|x-t|$. فرض کنید x، t متعلق به $[a,b]$ است و بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید $t\le x$. آنگاه

$$\begin{aligned}|F(x)-F(t)| &= \left|\int_a^x f-\int_a^t f\right|\\ &= \left|\int_t^x f\right|\\ &\le \int_t^x |f| \le \int_t^x K = K|x-t|\end{aligned}$$

۳. قضیه. فرض کنید f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است که در آن $a<b$، و برای هر $x\in[a,b]$ تعریف می‌کنیم

$$F(x)=\int_a^x f$$

فرض کنید $c\in[a,b]$ و f در c پیوسته است. آنگاه F در c مشتق‌پذیر بوده و $F'(c)=f(c)$.

اثبات. نخست توجه کنید اگر $x\in[a,b]$ و $x\neq c$، آنگاه

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)=\frac{1}{x-c}\int_c^x (f-f(c))$$

حال نشان می‌دهیم وقتی که $x\to c$ عبارت آخر به صفر میل می‌کند. فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است، عدد $\delta>0$ وجود دارد به طوری که وقتی $x\in[a,b]$ و $|x-c|<\delta$ داریم $|f(x)-f(c)|<\epsilon$. حال فرض کنید $x\in[a,b]\setminus\{c\}$ و $|x-c|<\delta$. برای

نشان دادن اینکه

$$\left|\frac{1}{x-c}\int_c^x (f-f(c))\right| \leq \varepsilon$$

بطور مجزا حالتهای $x<c$ و $x>c$ را در نظر می‌گیریم. نخست فرض کنید $x<c$. در این صورت

$$\left|\frac{1}{x-c}\int_c^x (f-f(c))\right| \leq \frac{1}{|x-c|}\int_x^c |f-f(c)|$$

$$\leq \frac{1}{|x-c|}\int_x^c \varepsilon = \varepsilon$$

بطور مشابه وقتی $x>c$ داریم

$$\left|\frac{1}{x-c}\int_c^x (f-f(c))\right| \leq \frac{1}{|x-c|}\int_c^x |f-f(c)|$$

$$\leq \frac{1}{|x-c|}\int_c^x \varepsilon = \varepsilon$$

۴. قضیه: انتگرال جزء بجزء: فرض کنید f و g روی $[a,b]$ مشتق پذیرند و فرض کنید f' و g' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند. آنگاه

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

اثبات. نخست توجه می‌کنیم که $f'g$ و fg' حاصلضرب توابع انتگرال‌پذیر ریمان هستند و بنابراین انتگرال‌پذیر ریمان می‌باشند. حال تعریف می‌کنیم $h=fg$. چون $h'=f'g+fg'$ پس h' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است و طبق قضیه ۱ داریم

$$\int_a^b h' = h(b)-h(a)$$

بعبارت دیگر

$$\int_a^b (f'g+fg') = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

و این بوضوح حکم را ثابت می‌کند.

قضیه تغییر متغیر

یکی از مهمترین و مفیدترین تکنیکها برای محاسبه انتگرالها که در ریاضی عمومی یاد گرفته‌ایم تکنیک "تغییر متغیر" است. برای مثال فرض کنید بخواهیم انتگرال

$$\int_{\sqrt{\pi-1}}^{\sqrt{2\pi-1}} 2t\sin(1+t^2)\,dt$$

را محاسبه کنیم. در ریاضی عمومی این انتگرال را با قرار دادن $x=1+t^2$ محاسبه می‌کردیم. با دقت بیشتر، تابع u را توسط

$$u(t)=1+t^2 \qquad \sqrt{\pi-1}\le t\le\sqrt{2\pi-1}$$

تعریف می‌کنیم و انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\int_{\sqrt{\pi-1}}^{\sqrt{2\pi-1}}\sin u(t)\,u'(t)\,dt=\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=-2$$

قضیه تغییر متغیر پایه تئوری برای این تکنیک است. در حالی که فرمهای بسیار طبیعی و عمومی از این قضیه به سادگی بیان می‌شود، متأسفانه برای اثبات قضیه‌ای بسیار مشکل است. فرم عمومی این قضیه را در این بخش بیان می‌کنیم، اما اثبات آن در آنالیز پیشرفته ارائه می‌گردد. بیان قضیه تغییر متغیر در فرم کلی به صورت زیر است؛

۱. قضیه تغییر متغیر در حالت کلی. فرض کنید $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ تعریف شده است و مشتق آن یعنی u' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است. آنگاه برای هر تابع f دلخواه که روی برد u انتگرال‌پذیر ریمان باشد، داریم

$$\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,dt=\int_{u(a)}^{u(b)}f(x)\,dx$$

در این بخش، دو حالت خاص مهم از قضیه ۱ را که برای کاربردهای ما کفایت می‌کند اثبات می‌کنیم. در اولین حالت، فرض می‌کنیم f پیوسته است و در حالت دوم فرض می‌کنیم u یکنوا است.

اثبات قضیه ۱ وقتی که f روی برد u پیوسته است. اولین مطلبی که مشاهده می‌کنیم این است که $f \circ u$ ترکیب دو تابع پیوسته، روی $[a,b]$ پیوسته است و در نتیجه روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر می‌باشد. بنابراین، چون u' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است از نتیجه ۳. نتیجه می‌شود که این دو تابع انتگرال‌پذیرند. پس طرف چپ اتحاد مورد نظر با معنی است. حال برد u فاصله‌ای است که آن را $[\alpha,\beta]$ نامیم. برای هر $x \in [\alpha,\beta]$ تعریف می‌کنیم

$$F(x) = \int_a^x f$$

آنگاه چون f روی $[\alpha,\beta]$ پیوسته است، از قضیه ۳. نتیجه می‌شود که برای هر $x \in [\alpha,\beta]$ داریم $F'(x) = f(x)$. حال تعریف می‌کنیم: برای $t \in [a,b]$، $h(t) = F(u(t))$، از قانون زنجیره‌ای می‌بینیم که برای هر $t \in [a,b]$ داریم

$$h'(t) = F'(u(t))u'(t) = f(u(t))\,u'(t)$$

و از قضیه ۱. نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt &= \int_a^b h' = h(b) - h(a) \\ &= F(u(b)) - F(u(a)) \\ &= \int_a^{u(b)} f - \int_a^{u(a)} f \\ &= \int_{u(a)}^{u(b)} f\end{aligned}$$

برای اثبات حالت دوم نیاز به لم ساده زیر داریم.

۲. لم. فرض کنید f تابعی روی فاصله $[a,b]$ است. فرض کنید دنباله‌های (h_n) و (g_n) از توابع انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که برای هر n، $g_n \le f \le h_n$ و به طوری که

$$\int_a^b (h_n-g_n)\to 0 \qquad n\to\infty$$

آنگاه، f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات. دنباله‌های (f_n) و (g_n) را انتخاب می‌کنیم. برای هر n، توابع پله‌ای s_n و S_n روی $[a,b]$ وجود دارند به طوری که $s_n \le g_n$ و $h_n \geqslant S_n$ و

$$\int_a^b (g_n-s_n)<\frac{1}{n} \qquad و \qquad \int_a^b (S_n-h_n)<\frac{1}{n}$$

از نامساوی

$$\int_a^b (S_n-s_n) < \int_a^b (h_n-g_n)+\frac{2}{n}$$

نتیجه می‌شود که دنباله‌های (s_n) و (S_n) فشار f روی $[a,b]$ است.

اثبات قضیه وقتی که u یکنوا است. فرض می‌کنیم u صعودی است. حالتی که u نزولی باشد مشابه است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود. توجه کنید که برد u فاصله $[u(a),u(b)]$ است. برای اثبات قضیه، نخست حالت خاصی که f تابع پله‌ای است را بررسی می‌کنیم. فرض کنید f یک تابع پله‌ای با پله‌های درون افراز

$$P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$$

از $[u(a),u(b)]$ است و f مقدار ثابت α_i را روی هر فاصله (x_{i-1},x_i) بپذیرد. برای هر $i=0,\dots,n$ مجموعه تمام اعداد $t\in[a,b]$ که $u(t)=x_i$ یک زیرفاصله بسته از $[a,b]$ است. این فاصله را $[s_i,t_i]$ نامیم. توجه کنید که

$$a=s_0\le t_0<s_1\le t_1<\dots\ t_{n-1}<s_n\le t_n=b$$

حال برای هر i، چون u روی فاصله $[s_i,t_i]$ ثابت است داریم

$$f(u(t))\,u'(t)=0 \qquad t\in(s_i,t_i)$$

بعلاوه، وقتی که $t \in (t_{i-1}, s_i)$ داریم $x_{i-1} < u(t) < x_i$ و بنابراین

$$f(u(t))\, u'(t) = \alpha_i\, u'(t)$$

پس $(f \circ u)\, u'$ روی هر یک از فواصل $[s_i, t_i]$ و $[t_{i-1}, s_i]$ انتگرال‌پذیر است و از خاصیت جمع‌پذیری نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b f(u(t))\, u'(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{s_i}^{t_i} f(u(t))\, u'(t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{s_i} f(u(t))\, u'(t)\, dt$$

چون انتگرالها در اولین دو مجموع تماما صفر است، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_a^b f(u(t))\, u'(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{t_{i-1}}^{s_i} u'(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(u(s_i) - u(t_{i-1})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_{i-1}) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\, dx$$

حال حالت کلی را در نظر می‌گیریم. با استفاده از این واقعیت که f انتگرال‌پذیر ریمان روی $[u(a), u(b)]$ است، زوج دنباله‌های (s_n) و (S_n) از توابع پله وجود دارند بطوری که برای هر n، $s_n \le f \le S_n$ و

$$\int_{u(a)}^{u(b)} (S_n - s_n) \to 0 \qquad n \to \infty$$

برای هر n، توابع $s_n \circ u$ و $S_n \circ u$ توابع پله‌ای روی $[a, b]$ می‌باشند. همچنین چون تابع u' نامنفی است، داریم

$$(s_n \circ u)\, u' \le (f \circ u)\, u' \le (S_n \circ u)\, u'$$

و با توجه به حالتی که در نظر گرفته شد، داریم

$$\int_a^b (S_n \circ u - s_n \circ u)\, u' = \int_{u(a)}^{u(b)} (S_n - s_n) \to 0 \qquad n \to \infty$$

از لم ۲ نتیجه می‌شود که $(f \circ u)\, u'$ انتگرال‌پذیر ریمان روی $[u(a), u(b)]$ است و داریم

$$\int_a^b f(u(t))\, u'(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b s_n(u(t))\, u'(t)\, dt$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{u(a)}^{u(b)} s_n(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\, dx.$$

قضایای مقدار میانگین برای انتگرال

در بحث یکنوایی انتگرال دیدیم که اگر f و g توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ باشند و برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $f(x) \geq g(x)$، آنگاه $\int_a^b f \geq \int_a^b g$ که در آن $b>a$

۱. قضیه: فرض کنید f تابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ بوده و M و m کرانهای f روی $[a,b]$ باشند. آنگاه

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

و عدد μ وجود دارد به طوری که $m \leq \mu \leq M$ و $\int_a^b f = \mu(b-a)$.

اثبات. چون $m \leq f \leq M$ روی $[a,b]$ و f انتگرال‌پذیر روی آن است داریم

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$$

بنابراین

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

از طرفی رابطه به دست آمده را می‌توان به صورت

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$$

نوشت. قرار می‌دهیم $\mu = \frac{\int_a^b f}{b-a}$ و حکم تمام است.

۲. نتیجه. در شرایط قضیه ۱ اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه عدد $c \in [a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f = (b-a) f(c)$$

اثبات. با توجه به قضیه ۱ چون f پیوسته است بین مقادیر میانی خود را می‌پذیرد یعنی عدد c در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\mu = f(c)$ و حکم تمام است.

نتیجه بالا را اغلب به عنوان اولین قضیه مقدار میانگین برای انتگرال می‌شناسند.

۳. قضیه. اگر f و g توابع انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a,b]$ باشند و برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $g(x)\geq 0$ ، آنگاه عدد μ وجود دارد به طوری که $m\leq \mu \leq M$ و

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

که در آن m و M به ترتیب کران بالایی و پایینی f روی $[a,b]$ می‌باشند.

اثبات. چون روی $[a,b]$ داریم $g\geq 0$ پس روی $[a,b]$ ؛

$$mg \leq fg \leq Mg$$

و بنابراین

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g \qquad (1)$$

حال برای μ ای در $[m,M]$ داریم

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

زیرا از رابطه (۱) داریم $m \leq \left(\int_a^b fg\right)/\int_a^b g \leq M$. دقت کنید که $0 \leq \int_a^b g$.

۴. نتیجه. اگر g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان و f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه c ای در (a,b) وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$$

اثبات. با توجه به پیوستگی تابع f روی $[a,b]$ برای $\mu\in[m,M]$ عدد $c\in[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\mu = f(c)$. حال $c\neq a$، $c\neq b$ (چرا؟)

۵. قضیه: قضیه مقدار میانگین بونت. اگر g روی $[a,b]$ تابعی انتگرال‌پذیر ریمان و f روی $[a,b]$ یکنوا و نامنفی باشد آنگاه به ازای α و β ای در $[a,b]$ داریم:

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\alpha g \qquad \text{یا} \qquad \int_a^b fg = f(b)\int_\beta^b g$$

بر طبق اینکه f بطور یکنوا غیر صعودی یا بطور یکنوا غیر نزولی روی $[a,b]$ باشد.

اثبات. برای $a=b$ قضیه به وضوح برقرار است. فرض کنید $b>a$ و $f>0$ تابعی بطور یکنوا غیر صعودی است و P افرازی از $[a,b]$ است. اگر M_i و m_i کرانهای بالا و پایین g روی $[x_{i-1},x_i]$ و $\alpha_i \in [x_{i-1},x_i]$ با $\alpha_1 = a$، آنگاه

$$m_i(x_i-x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} g \leq M_i(x_i-x_{i-1})$$

و

$$m_i(x_i-x_{i-1}) \leq g(\alpha_i)(x_i-x_{i-1}) \leq M_i(x_i-x_{i-1})$$

حال با جمع هر کدام از جملات متناظر برای $i=1,2,\dots,p$ که $p \leq n$ داریم

$$\sum_{i=1}^{p} m_i(x_i-x_{i-1}) \leq \int_a^{x_p} g \leq \sum_{i=1}^{p} M_i(x_i-x_{i-1})$$

و

$$\sum_{i=1}^{p} m_i(x_i-x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{p} g(\alpha_i)(x_i-x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{p} M_i(x_i-x_{i-1})$$

پس

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{x_p} g - \sum_{i=1}^{p} g(\alpha_i)(x_i-x_{i-1})\right| &\leq \sum_{i=1}^{p}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &= U(P,g)-L(P,g) \\ &= \omega(P,g)\end{aligned}$$

چون $\int_a^{x} g$ روی $[a,b]$ پیوسته است پس روی $[a,b]$ کراندار می باشد. فرض کنید M' و m' کرانهای بالا و پایین آن روی $[a,b]$ است. آنگاه

$$m'-\omega(P,g) \leq \sum_{i=1}^{p} g(\alpha_i)(x_i-x_{i-1}) \leq M'+\omega(P,g)$$

حال طبق لم آبل با $u_i = g(\alpha_i)(x_i-x_{i-1})$ و $v_i = f(\alpha_i)$ داریم

$$f(a)\left[m'-\omega(P,f)\right] \leq \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\, g(\alpha_i)(x_i-x_{i-1}) \leq f(a)\left[M'+\omega(P,f)\right]$$

چون g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است و با توجه به یکنوا بودن داریم f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است، بنابراین fg روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان می‌باشد. حال وقتی که $\|P\|\to 0$ داریم $\omega(P,g)\to 0$ و

$$f(a)\,m' \leq \int_a^b fg \leq f(a)\,M'$$

یعنی $\int_a^b fg = f(a)\,c$ که در آن c بین کرانهای بالا و پایین تابع پیوسته $\int_a^x g$ روی $[a,b]$ قرار دارد. بنابراین عدد α در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\int_a^\alpha g = c$

پس

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\alpha g$$

وقتی f بطور یکنوا غیرنزولی روی $[a,b]$ است اثبات مشابه می‌باشد.

۶. نتیجه. اگر g انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a,b]$ و f یکنوا باشد به طوری که روی $[a,b]$ تغییر علامت ندهد، آنگاه برای α و β یی در $[a,b]$ برطبق اینکه f بطور یکنوا غیرصعودی یا بصورت یکنوا غیرنزولی باشد داریم

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\alpha g$$

یا

$$\int_a^b fg = f(b)\int_\beta^b g$$

اثبات: اگر f نامنفی باشد طبق قضیه ۵ حکم برقرار است. اگر f نامثبت باشد آنگاه قضیه ۵ برای $-f$ برقرار است.

۷. قضیه: قضیه مقدار میانگین وایراشتراوس (یا دوم). اگر g روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان و f روی $[a,b]$ یکنوا باشد، آنگاه به ازای α یی در $[a,b]$ داریم

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\alpha g + f(b)\int_\alpha^b g$$

اثبات. اگر f به‌طور یکنوا غیرصعودی باشد آنگاه $f - f(b)$ روی $[a,b]$ به‌طور یکنوا غیرصعودی و نامنفی است. بنابراین طبق قضیه بونت عدد α در $[a,b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\int_a^b [f - f(b)]g = [f(a) - f(b)]\int_a^\alpha g$$

یا

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\alpha g + f(b)\left[\int_a^b g - \int_a^\alpha g\right]$$

یعنی

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\alpha g + f(b)\int_\alpha^b g$$

در حالتی که f به‌طور یکنوا غیرنزولی باشد آنگاه نتیجه برای $-f$ به دست می‌آید که به وضوح برای f نیز با عملیات ساده‌ای حاصل می‌شود.