دنباله‌ها و سری‌های توابع

در فصل سوم مطالعه دقیقی از حد و دنباله‌های عددی داشتیم، در این فصل نظریه فوق را به سری‌ها، پیوستگی، مشتق‌ها و انتگرال‌ها توابع توسیع داده و بکار می‌بریم و در مورد حد دنباله‌های توابع صحبت می‌کنیم. به سه نوع همگرایی دنباله $\{f_n\}$ از توابع به تابع f توجه داریم یعنی همگرایی نقطه‌وار، همگرایی کراندار و همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع را مطالعه می‌کنیم.

۱. یکنواختی و همگرایی نقطه‌وار یک دنباله از توابع

به مثالهای زیر جهت شناختی از یکنواختی توجه کنید.

۱) می‌دانیم که اگر $|x|<1$ آنگاه $(1-x)^{-1} = 1 + \sum_1^\infty x^n$. پس با توجه به جمع‌پذیری مشتق، بنظر می‌رسد که بتوان آن را برای مجموعهای نامتناهی نیز بکار برد. بنابراین انتظار داریم که

$$(1-x)^{-2} = \sum_1^\infty n x^{n-1}$$

$$(1-x)^{-3} = \sum_1^\infty \frac{1}{2} n(n-1) x^{n-2}$$

و به همین ترتیب. در واقع این سری‌ها برای $|x|<1$ همگرا اند تنها زمانی که بتوانیم از

$$\left(\sum_0^\infty a_n x^n\right)' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} \qquad (1)$$

استفاده کنیم.

۲) برای عدد مثبت a،

$$\int_0^\infty e^{-at} \sin t \, dt = \left[\frac{e^{-at}}{1+a^2}(\cos t + a \sin t)\right]_0^\infty = \frac{1}{1+a^2}$$

و بنابراین

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-at} \sin t \, dt\right) da = \int_0^\infty \frac{da}{1+a^2} = \frac{\pi}{2}$$

حال اگر بتوانیم ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم، آنگاه نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-at}\, da \right) \sin t\, dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$$

۳) اگر $S = 1 + r\cos\theta + \cdots + r^n \cos n\theta$، آنگاه ضرایب r^j در عبارت

$$(1 - 2r\cos\theta + r^2)S$$

عبارت است از

$$\cos j\theta - 2\cos\theta \cos(j-1)\theta + \cos(j-2)\theta \qquad 2 \le j \le n$$

که با توجه به فرمول زیر مقدار آن صفر است:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

زیرا

$$\begin{aligned}
\cos j\theta - 2\cos\theta\cos(j-1)\theta + \cos(j-2)\theta &= 2\cos\tfrac{1}{2}(j\theta + j\theta - 2\theta)\cos\tfrac{1}{2}(2\theta) \\
&\quad - 2\cos\theta\cos(j-1)\theta \\
&= 2\cos(j-1)\theta\cos\theta - 2\cos\theta\cos(j-1)\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
&(1 - 2r\cos\theta + r^2)S \\
&\quad = 1 - r\cos\theta - r^{n+1}\cos(n+1)\theta + r^{n+2}\cos n\theta
\end{aligned}$$

بنابراین

$$(۲) \qquad \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{j=0}^{n} r^j \cos j\theta + \frac{r^{n+1}\cos(n+1)\theta - r^{n+2}\cos n\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

که در آن با فرض $|r|<1$ داریم $(r-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta > 0$. برای چنین r هایی

جمله باقیمانده در معادله (۲) وقتی که $n \to \infty$ به صفر می‌گراید. پس

$$(۳) \qquad \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{j=0}^{\infty} r^j \cos j\theta \qquad |r|<1$$

نتیجه‌گیری مشابه به ما می‌دهد که

(۵)

$\tan^{-1}\left(\frac{r \ldots}{1-r\ldots}\right.$

$\int_0^r \frac{\sin\theta \, du}{(u-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = [\ldots$

$= \tan^{-1}(\ldots$

$= \tan^{-1}\left(\frac{((r-\cos\theta)\ldots}{1+((r-\cos\theta)\ldots}\right.$

$= \tan^{-1}((r\sin\theta)/(\ldots$

از صفرات ... و در نتیجه $k=0$ ، نهایتاً فرض کنید ...

$(r-\ldots$: از ... $\lim \sum = \sum \lim$ باشد ...

... $\sum_1^\infty (\ldots$ ... که ... آن را ... در ... هلاً ...

... $0<\theta<2\pi$ ... داشته باشیم ...

$\tan^{-1}(\cot\frac{\theta}{2}) = \frac{\pi-\theta}{2}$ ... بنابراین

$0<\theta<2\pi$ ... $-\theta)$

$0<\theta<2\pi$

... برابر ... زیرا ...

شروط ... عملاً ... وجود ...

که در آن Ω یک عملگر است مانند d/dx ، $\lim_{x\to a}$ ، $\int_a^b dx$ ، $\int_0^\infty dx$.

برای رسیدن به یک ایده از شرایط عمومی در فرم ساده آن برای برقراری این جابجایی، حالت $f_n(x)\to f(x)$ وقتی $n\to\infty$ را (برای هر x در $[a,b]$) در نظر بگیرید و فرض کنید $f(x)$ و $f_n(x)$ در این حالت انتگرال پذیرند. برای اثبات اینکه $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ ، باید نشان دهیم وقتی $n\to\infty$ ، داریم $\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\to 0$. ساده ترین راه برقراری این شرط این است که ثابت کنیم: وقتی $n\to\infty$ ، $\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid a\le x\le b\}\to 0$ یعنی برای هر $\varepsilon>0$ عدد $n_0=n_0(\varepsilon)$ وجود دارد به طوری که برای هر x در $[a,b]$ و هر $n>n_0$ داریم $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. به عبارت دیگر نیاز به یک مفهوم یکنواختی روی $f_n(x)-f(x)$ داریم.

۲. همگرایی نقطه وار

۱.۲. تعریف همگرایی نقطه وار دنباله توابع. فرض کنید (f_n) دنباله ای از توابع حقیقی روی مجموعه S است. گوییم دنباله (f_n) روی S **همگرای نقطه وار** است هرگاه برای هر نقطه $x\in S$ دنباله $\{f_n(x)\}$ همگرا باشد. در این حالت، اگر تعریف کنیم: برای هر $x\in S$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

آنگاه f را تابع حدی دنباله (f_n) نامیم و گوییم دنباله (f_n) همگرای نقطه وار به f روی S است، و می نویسیم: $f_n \xrightarrow{P} f$ روی S .

۲.۲. مثال: مثالهای زیر مفهوم همگرایی نقطه وار را شرح می دهند.

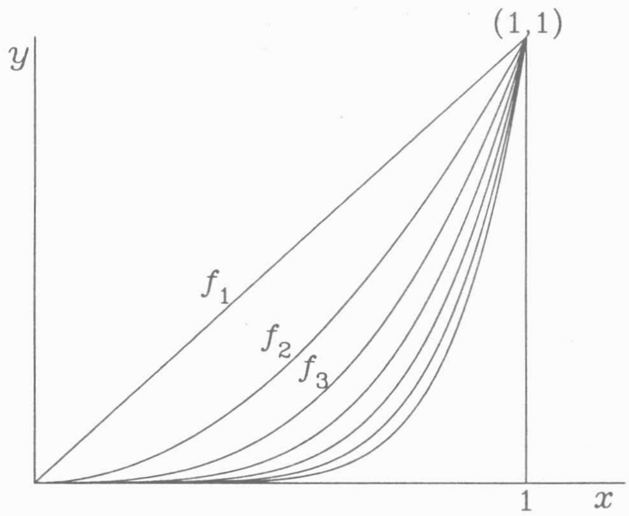
۱) به ازای هر عدد طبیعی n ، تعریف می کنیم

$$f_n(x)=x^n \qquad 0\le x\le 1$$

وقتی که $0\le x<1$ داریم $f_n(x)\to 0$ و $f_n(1)\to 1$ ، پس دیده می شود که دنباله (f_n) همگرای نقطه وار روی $[0,1]$ است و اگر f حد همگرایی این دنباله باشد، آنگاه

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

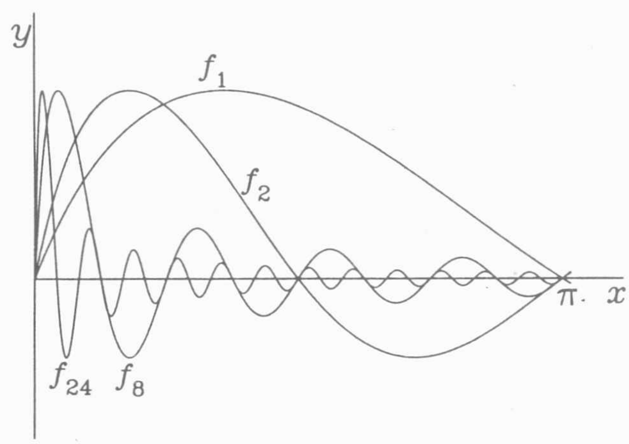
توجه کنید که در این مثال هر تابع f_n به طور یکنواخت پیوسته است، اما حد همگرایی آن یعنی f چنین نیست. بنابراین دیده می‌شود که همگرایی نقطه‌وار یک دنباله از توابع پیوسته لزوماً یک تابع پیوسته را نتیجه نمی‌دهد.



۲) به ازای هر عدد طبیعی n، تعریف می‌کنیم

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{1+nx}\qquad x\ge 0$$

به سادگی دیده می‌شود که (f_n) همگرای نقطه‌وار روی $[0,\infty)$ به تابع ثابت صفر است.



۳) به ازای هر عدد طبیعی n، تعریف می‌کنیم

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\qquad x\in\mathbb{R}$$

با استفاده از قانون هوپیتال به سادگی دیده می‌شود که (f_n) همگرای نقطه‌وار روی $\mathbb{R}$ به تابع ثابتی است.

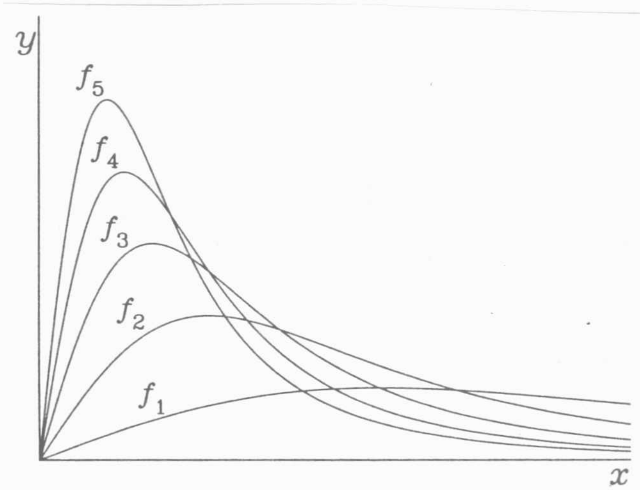
۴) E را مجموعه تمام اعداد گویا در فاصله $[0,1]$ تعریف می‌کنیم و برای هر عدد طبیعی، فرض کنید E_n مجموعه اعدادی مانند $x \in [0,1]$ است که بتوان آن را به فرم $x = p/q$ نوشت که در آن p و q اعداد طبیعی بوده و $q \le n$. تعریف می‌کنیم

$$f_n = \chi_{E_n}$$

توجه می‌کنیم که دنباله (f_n) همگرای نقطه‌وار به تابع χ_E روی $[0,1]$ است. همانگونه که در فصل انتگرال ریمان بیان شد، این تابع روی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست. درحالی که با توجه به اینکه E_n به ازای هر n متناهی است، نتیجه می‌شود f_nها توابع پله‌ای اند و بنابراین انتگرال‌پذیر ریمان هستند. این مثال نشان می‌دهد که حد همگرایی نقطه‌وار دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر لزوماً انتگرال‌پذیر نیست.

۵) به ازای هر عدد طبیعی n، تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} \qquad x \in [0,1]$$



شکل فوق نمودار f_n را به ازای چند مقدار n نمایش می‌دهد. به سادگی دیده می‌شود که دنباله (f_n) همگرای نقطه‌وار به تابع ثابت صفر روی $[0,1]$ است. بهرحال توجه کنید که

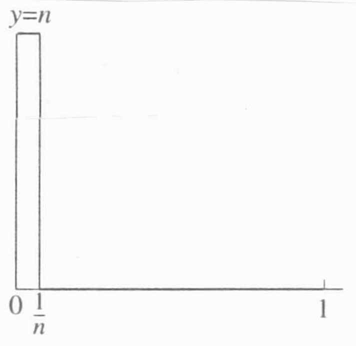
$$\int_0^1 f_n = 1-\frac{1}{1+n^2} \longrightarrow 1 \qquad n\to\infty$$

بنابراین دیده می‌شود که حتی اگر دنباله (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ همگرای نقطه‌وار به تابع انتگرال‌پذیر f باشد، لزومی وجود ندارد که

$$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$$

۶) در این مثال به نکته دیگری که در مثال (۵) رخ داده است دقت می‌کنیم. برای این منظور توابع f_n را توابع پله‌ای در نظر می‌گیریم. به ازای هر عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم

$$f_n(x)=\begin{cases} n & 0<x<1/n \\ 0 & x>\frac{1}{n} \text{ or } x=0 \end{cases}$$



شکل را ببینید. مجدداً دیده می‌شود که دنباله (f_n) همگرای نقطه‌وار روی $[0,1]$ به تابع ثابت صفر است، اما برای هر n داریم:

$$\int_0^1 f_n = 1$$

۷) به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی x تعریف می‌کنیم

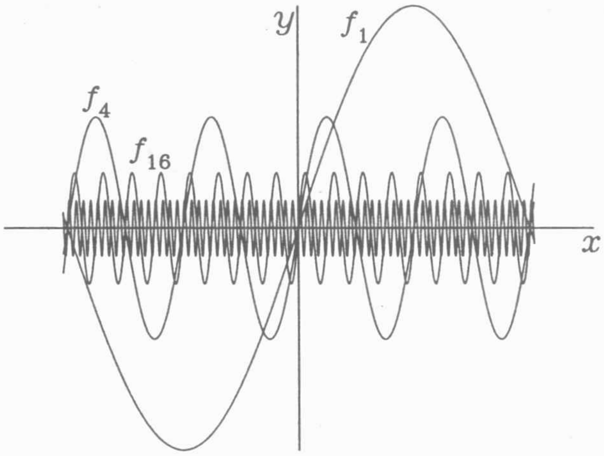
$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

در شکل زیر نمودارهای توابع f_1، f_4، f_{16} و f_{64} نشان داده شده است. چون دنباله روی $\mathbb{R}$ به تابع ثابت صفر همگرای نقطه‌وار است، امکان دارد انتظار داشته باشیم که وقتی $n\to\infty$، $f_n'(x)\longrightarrow 0$ برای هر $x\in\mathbb{R}$، اما چنین نیست. همانگونه که در شکل نشان داده شده است، نمودار f_n با فرکانس بزرگتری وقتی که n زیاد می‌شود نوسان می‌کند و

مشتقات f_n بطور سریعی آشفته می‌گردند. در واقع برای هر n و x داریم

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$$

بنابراین اگر x مضربی از 2π باشد وقتی که $n \to \infty$ داریم $f_n'(x) \to \infty$. از طرف دیگر اگر x مضرب 2π نباشد، چون سری $\sum_{1}^{\infty}(\cos nx)/n$ همگرای مشروط است، به سادگی دیده می‌شود که $f_n'(x)$ وقتی $n \to \infty$ به حدی میل نمی‌کند. این نشان می‌دهد که حتی اگر دنباله (f_n) دنباله‌ای از توابع مشتق‌پذیر به تابع مشتق‌پذیر f همگرای نقطه‌وار باشد تضمینی برای اینکه $f_n' \to f'$ وجود ندارد.



۲.۳. نتیجه‌گیری از مثالهای ارائه شده. از مثالهای فوق می‌توان نتیجه گرفت که گرچه ایده همگرایی نقطه‌وار بسیار طبیعی است، امکان دارد که اطلاعاتی مفید را به دست ندهد. پس نیاز به مفهوم مستدل‌تری از همگرایی می‌باشد.

۳. همگرایی کراندار

۱.۳. مقدمه. همان گونه که در مثالهای (۴)، (۵) و (۶) بخش دوم بیان شد، اگر (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ باشد و اگر (f_n) روی $[a,b]$ به تابع f همگرای نقطه‌وار باشد، آنگاه تضمینی وجود ندارد که تابع حدی f انتگرال‌پذیر

است ، بعلاوه ، حتی اگر f انتگرال پذیر باشد ، لزومی ندارد که رابطه زیر برقرار باشد :

$$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f \qquad n \to \infty \qquad (۱)$$

برای اینکه مطمئن باشیم (۱) برقرار است ، نیاز به شرط کرانداری داریم که نوسانات شدیدی را در جاهایی که در مثال (۵) ۲.۲ و (۶) ۲.۲ مشاهده شد اتفاق نیافتد . همان گونه که در این مثالها دیده می‌شود اطلاع از اینکه هر یک از توابع f_n کراندار است کافی نمی‌باشد . برای حذف امکان اینکه نمودار f_n وقتی n صعودی کند دارای رشد بالایی نباشد نیاز داریم که عددی مانند K وجود داشته باشد که تمام توابع f_n به آن ختم شود بعبارت دیگر برای هر n ، $|f_n| \le K$.

۲.۳ . تعریف همگرایی کراندار . دنباله (f_n) از توابع حقیقی که روی مجموعه S همگرای نقطه‌وار است را همگرای کراندار روی S گوییم ، هرگاه عدد K وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n و هر نقطه $x \in S$ داشته باشیم $|f_n(x)| \le K$.

اگر (f_n) بطور کراندار روی S همگرا و f تابع حدی آن باشد ، گوییم $f_n \xrightarrow{b.} f$

۳.۴ . قضیه همگرایی کراندار . فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال پذیر ریمان روی فاصله $[a,b]$ است و (f_n) بطور کراندار همگرا روی $[a,b]$ به تابع انتگرال پذیر ریمان f باشد ، آنگاه

$$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f \, .$$

برای اثبات قضیه ۲.۴ ، نخست قضیه زیر را مورد بررسی قرار میدهیم :

۲.۴ . قضیه دنباله‌های منقبض شده . فرض کنید (A_n) یک دنباله منقبض شده از مجموعه‌ی کراندار است و $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. برای هر n ، تعریف می‌کنیم

$$\alpha_n = \sup\{ m(E) \mid E \text{ زیرمجموعه مقدماتی } A_n \text{ است} \}$$

آنگاه وقتی که $n \to \infty$ داریم $\alpha_n \to 0$.

<u>اثبات</u>: به وضوح دنباله $\{\alpha_n\}$ نزولی است. برای به دست آوردن یک تناقض، فرض کنید که این دنباله همگرا به صفر نباشد. پس عدد $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر n، $\alpha_n > \delta$.
برای هر n، زیرمجموعه مقدماتی E_n از A_n را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$m(E_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n}$$

حال برای هر n، با توجه به قضیه ۴.۵.۶، زیرمجموعه بسته مقدماتی F_n از E_n وجود دارد به طوری که

$$m(F_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n}$$

تعریف می‌کنیم

$$H_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

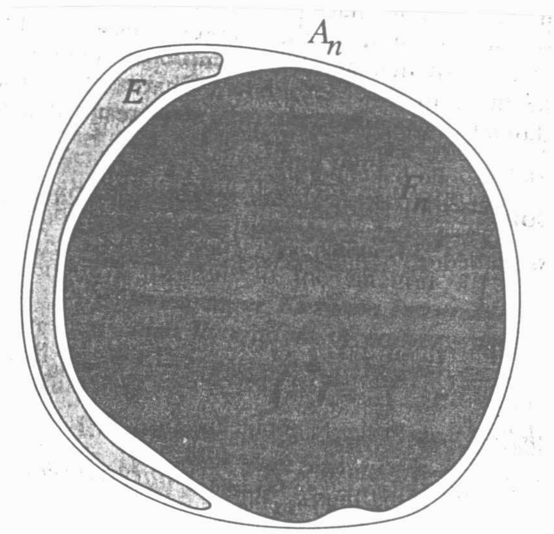
برای هر n، مجموعه H_n بسته کراندار (مقدماتی) است و $H_{n+1} \subseteq H_n$. حال طرح اثبات قضیه این است که نشان دهیم هر یک از مجموعه‌های H_n ناتهی است و از قضیه اشتراک کانتور نتیجه بگیریم که اشتراک تمام مجموعه‌های H_n ناتهی است، درحالی که طبق فرض قضیه داریم که مجموعه‌های بزرگتر A_n دارای اشتراک تهی هستند و این تناقض مورد نیاز ما است. برای نشان دادن اینکه هر یک از مجموعه‌های H_n ناتهی است دو نکته زیر را داریم:

<u>اول</u>: برای هر عدد طبیعی n داده شده و هر زیرمجموعه مقدماتی E از $A_n \setminus F_n$ داریم

$$m(E) + m(F_n) = m(E \cup F_n) \leq \alpha_n$$

و بنابراین با توجه به $m(F_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n}$ داریم $m(E) < \delta/2^n$. این نشان دهنده می‌تواند بیان شود زیرا F_n بسیار به A_n نزدیک است و در نتیجه مجموعه مقدماتی $E \subseteq A_n \setminus F_n$ کوچک است. شکل زیر را ببینید. (پشت صفحه)

<u>دوم</u>: برای هر عدد طبیعی n داده شده، و هر زیرمجموعه مقدماتی E از $A_n \setminus H_n$


A_n
E
F_n

با توجه به اینکه

$$E = (E \setminus F_1) \cup (E \setminus F_2) \cup \dots \cup (E \setminus F_n)$$

و $E \setminus F_i$ زیرمجموعه مقدماتی از $A_i \setminus F_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ است ، داریم

$$m(E) \leq \sum_{i=1}^{n} m(E \setminus F_i) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{2^i} = \delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \delta$$

حال به دو مجموعه A_n و $A_n \setminus H_n$ توجه می‌کنیم. مجموعه A_n باید دارای یک زیرمجموعه مقدماتی باشد که اندازه آن بزرگتر از δ است ، درحالیکه مجموعه $A_n \setminus H_n$ چنین نیست.
پس برای هر n ، مجموعه‌های A_n و $A_n \setminus H_n$ نمی‌توانند یکسان باشند و در نتیجه H_n باید ناتهی باشد.

اثبات قضیه ۳.۴ . عدد مثبت K را چنان انتخاب می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n و هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $|f_n(x)| \leq K$. چون برای $x \in [a,b]$ داریم $f_n(x) \to f(x)$ پس $|f(x)| \leq K$ و بنابراین برای هر n و x داریم

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2K$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. برای هر n ، مجموعه A_n را شامل تمام نقاط $x \in [a,b]$ تعریف می‌کنیم که نامساوی زیر

$$|f_i(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

برای حداقل یک عدد طبیعی $i \geq n$ برقرار باشد. به سادگی دیده می‌شود که برای هر n داریم $A_{n+1} \subseteq A_n$. به عبارت دیگر دنباله (A_n) یک دنباله منقبض شده است. بعلاوه برای هر $x \in [a,b]$ ، چون $f_i(x) \to f(x)$ وقتی $i \to \infty$ ، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad i \geq n$$

به عبارت دیگر، $x \notin A_n$، در نتیجه

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

بنابراین با استفاده از قضیه (دنباله‌های منقبض شده) (۳.۴) عدد N طبیعی وجود دارد بطوری‌که اگر $n \geq N$ و E زیرمجموعه مقدماتی A_n باشد، داریم $m(E)<\epsilon/4K$.

حال برای تکمیل اثبات، وقتی $n \geq N$، نشان می‌دهیم:

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \epsilon$$

فرض کنید $n \geq N$. چون

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f|$$

کافی است نشان دهیم عبارت آخر از ϵ بزرگتر نیست. چون انتگرال یک تابع انتگرال‌پذیر برابر با انتگرال پایینی است، پس برای اثبات اینکه رابطه $\int_a^b |f_n - f| \leq \epsilon$ برقرار باشد نشان می‌دهیم که اگر s یک تابع پله‌ای بوده و $0 \leq s \leq |f_n - f|$ آنگاه $\int_a^b s \leq \epsilon$.

فرض کنید s تابعی پله‌ای بوده و $0 \leq s \leq |f_n - f|$، قرار می‌دهیم

$$E = \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; s(x) \geq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \right\}$$

و

$$F = [a,b] \setminus E$$

در نتیجه E و F زیرمجموعه‌های مقدماتی از $[a,b]$ اند و چون $E \subseteq A_n$ داریم

$$m(E) < \epsilon/4k$$

بنابراین

$$\int_a^b s = \int_E s + \int_F s \leq \int_E 2k + \int_F \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$
$$= 2k\, m(E) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} m(F)$$
$$< 2k \frac{\epsilon}{4k} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) = \epsilon$$

و حکم تمام است.

۵.۴ . قضیه همگرایی کراندار برای مشتقات . فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع مشتق‌پذیر روی فاصله $[a,b]$ است که f_n' ها روی $[a,b]$ برای هر n پیوسته‌اند و (f_n') روی $[a,b]$ به تابع پیوسته‌ای مانند g همگرای کراندار است و به ازای عددی مانند c در $[a,b]$ دنباله $f_n(c)$ همگرا باشد. آنگاه دنباله (f_n) همگرای نقطه‌وار روی $[a,b]$ است. بعلاوه اگر $f_n \xrightarrow{P} f$ آنگاه f روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر است و $f' = g$.

اثبات . فرض کنید وقتی $n \to \infty$ داریم $f_n(c) \to \alpha$. برای هر عدد طبیعی n و هر نقطه $x \in [a,b]$ داریم

$$\int_c^x f_n' = f_n(x) - f_n(c)$$

چون $f_n(x) = \int_c^x f_n' + f_n(c)$ از قضیه همگرایی کراندار (۴.۴) نتیجه می‌شود که برای هر $x \in [a,b]$ ، $f_n(x) \longrightarrow \alpha + \int_c^x g$. پس اگر برای هر $x \in [a,b]$ قرار دهیم

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

از قضیه ۳.۱۴.۶ نتیجه می‌شود $f' = g$.

قضیه ۵.۴ بدون شرط پیوستگی f_n' ها نیز مطرح می‌گردد، اما نیاز به نوع دیگری از همگرایی دنباله (f_n') است که در بخشهای بعد مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد.

۴. همگرایی یکنواخت

۱.۴. نیاز به نوعی قوی‌تر از همگرایی.

همان گونه که در بخش ۳ دیده شد، همگرایی کرانداز نقش مهم و اساسی در آنالیز را به عهده دارد. اما حتی همگرایی کراندار از نقطه‌نظرهایی قابل استفاده نیست. برای مثال، دنباله‌ای از توابع پیوسته روی مجموعه S می‌توان داشت که بطور کراندار به تابعی همگرا است ولی این تابع روی S پیوسته نمی‌باشد و دنباله‌ای از توابع می‌توان مثال زد که بطور کراندار همگرا اند و توابع فوق انتگرال‌پذیرند ولی حد همگرایی آن انتگرال‌پذیر نیست. اکنون نوعی قوی‌تر از مفهوم همگرایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که تحت آن بسیاری از خواص توابع به حد همگرایی آنها قابل انتقال است.

۲.۴. تعریف. همگرایی یکنواخت: بطور کلی توابع تعریف شده روی یک فضای متریک X می‌باشند که بر مجموعه‌ای مانند S تعریف شده اند. به عنوان مثال اگر از دنباله توابع حقیقی یا مختلط روی مجموعه S بحث شود در این صورت X به ترتیب $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است.

دنباله (f_n) تعریف شده بر روی S بطور یکنواخت به تابع f همگرا است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، عددی مانند N وابسته به ε در اعداد طبیعی وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq N$ و هر $x \in S$ داشته باشیم

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

در این صورت از نماد $f_n \xrightarrow{u} f$ استفاده می‌شود.

۳.۴ مثال. (الف) دنباله (f_n) از توابع تعریف شده بر $\mathbb{R}$ را که در آن

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx+n) \qquad x \in \mathbb{R}$$

می‌باشد را در نظر بگیرید. چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $|\sin(nx+n)| \leq 1$ پس

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(nx+n) = 0$$

$$\left|\frac{1}{n}\sin(nx+n)-0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|\left|\sin(nx+n)\right|$$
$$\le \frac{1}{n} < \varepsilon$$

پس $\frac{1}{n}<\varepsilon$ درنتیجه $n>\frac{1}{\varepsilon}$. بنابراین اگر برای $\varepsilon>0$ داده شده قرار دهیم

$$N=[\![\tfrac{1}{\varepsilon}]\!]+1$$

آنگاه برای هر $n\geq N$ داریم $\left|\frac{1}{n}\sin(nx+n)\right|<\varepsilon$. پس (f_n) بطور یکنواخت همگرا به صفر است . $f_n \xrightarrow{u} 0$

(ب) فرض کنید

$$f_n(x)=\frac{x}{n}\qquad x\in\mathbb{R}$$

در این صورت $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$. حال اگر داشته باشیم

$$\left|\frac{x}{n}-0\right|<\varepsilon$$

آنگاه $\left|\frac{x}{n}\right|=\frac{|x|}{n}<\varepsilon$ پس $\frac{n}{|x|}>\frac{1}{\varepsilon}$ یعنی $n>\frac{|x|}{\varepsilon}$. پس $N=[\![\frac{|x|}{\varepsilon}]\!]+1$
حال برای هر $n\geq N$ نتیجه می‌شود $\left|\frac{x}{n}-0\right|<\varepsilon$ ، بنابراین (f_n) بر روی $\mathbb{R}$ بطور نقطه‌وار به صفر همگرا است ولی همگرای یکنواخت نیست . زیرا N وابسته به ε و x است .

۴.۲ . قضیه : تعریف معادلی برای همگرایی یکنواخت . اگر دنباله (f_n) بر روی S بطور نقطه‌وار به تابع f همگرا باشد، و برای هر n

$$M_n=\|f_n-f\|_\infty=\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x\in S\}$$

آنگاه $f_n\xrightarrow{u} f$ اگر و تنها اگر $M_n\to 0$.

اثبات . فرض کنید $f_n\xrightarrow{u} f$ و $\varepsilon>0$ داده شده است . پس $N=N(\varepsilon)$ در $\mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که برای هر $n\geq N(\varepsilon)$ و هر $x\in S$ داریم

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

بنابراین ε یک کران بالای مجموعه $\{|f_n(x)-f(x)| : x\in S\}$ برای هر n است. پس به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $M_n<\varepsilon$. یعنی

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n\geq N(\varepsilon) \quad |M_n-0|<\varepsilon$$

پس $\lim_{n\to\infty} M_n=0$.

برعکس، فرض کنید $M_n\to 0$ و $\varepsilon>0$ داده شده است. در این صورت

$$\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad s.t \quad \forall n\geq N(\varepsilon) \quad M_n-0<\varepsilon$$

پس برای هر $x\in S$ داریم

$$|f_n(x)-f(x)|\leq M_n<\varepsilon$$

یعنی $f_n \xrightarrow{u} f$.

۵.۴ قضیه. <u>آزمون کوشی برای همگرایی یکنواخت.</u> دنباله (f_n) روی S بطور یکنواخت به تابع f همگراست اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad s.t \quad \forall m,n\geq N, \quad \forall x\in S, \quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

<u>اثبات.</u> فرض کنید $f_n \xrightarrow{u} f$. بنابراین برای هر $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n\geq N$ و هر $x\in S$ داریم

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$$

و برای هر $m\geq N$ و هر $x\in S$ داریم

$$|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon/2$$

حال

$$|f_n(x)-f_m(x)|=|f_n(x)-f(x)+f(x)-f_m(x)|$$

$$\leq |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

پس ثابت کردیم :

$\forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n\geq N,\ \forall x\in S,\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

برعکس، فرض کنید شرط کشی برقرار است. به ازای هر $x\in S$ دنباله $(f_n(x))$ که دنباله از اعداد حقیقی است که در شرط کشی صدق می‌کند. از آنجا که فضای متری اعداد حقیقی کامل (هر دنباله کشی در $\mathbb{R}$ همگرا است) نتیجه می‌شود که دنباله $\{f_n(x)\}$ به تابعی مانند $f(x)$ همگرا است. یعنی

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad x\in E$$

حال اگر در شرط کشی m را ثابت نگه داریم و n را به سمت بینهایت میل دهیم، داریم

$$\forall m\geq N,\ \forall x\in E,\ |f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

یعنی دنباله (f_n) روی S به طور یکنواخت به f میل می‌کند. زیرا از تعریف حد با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$، برای هر همسایگی از $f(x)$ به ازای n های به اندازه کافی بزرگ، $f_n(x)$ در آن همسایگی قرار می‌گیرد. حال مجموعه

$$E=\{y\in\mathbb{R} : |y-f_m(x)|>\varepsilon\}$$

را برای $m\geq N$ و هر $x\in S$ در نظر بگیرید. آنگاه $f(x)\notin V$. زیرا اگر $f(x)\in V$ آنگاه V همسایگی از $f(x)$ است و باید برای n های بزرگ داشته باشیم $f_n(x)\in V$ یعنی $|f_n(x)-f_m(x)|>\varepsilon$ و این خلاف فرض کشی است.

پس $f(x)\notin V$. یعنی

$$\forall m\geq N=N(\varepsilon)\quad \forall x\in E,\ |f(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon$$

۴.۴. مقایسه تعاریف <u>همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت</u>. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع تعریف شده روی مجموعه S است و $f:S\to\mathbb{R}$. شرط $f_n \xrightarrow{P} f$ روی S بیان می‌کند که

برای هر نقطه $x \in S$ وقتی $n \to \infty$ داریم $f_n(x) \to f(x)$. واین مطلب به صورت زیر بیان می‌شود:

برای هر نقطه $x \in S$ و هر عدد $\epsilon > 0$ عدد N وجود دارد به طوری که وقتی $n \geq N$

داریم $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

برای روشنتر شدن تعریف بالا آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

برای هر عدد $\epsilon > 0$ و هر نقطه $x \in S$ ، عدد N وجود دارد به طوری که وقتی $n \geq N$

داریم $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

تعریف فوق تا حدودی مشابه با تعریف همگرایی یکنواخت در ۲.٤ است. به هر حال باید توجه کرد که در تعریف همگرایی نقطه‌وار قبل از آنکه بتوانیم در مورد عدد N صحبت کنیم هر دوی ϵ و x مشخص اند و سپس در مورد وجود عدد N به طوری که برای $n \geq N$ داشته باشیم $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ صحبت می‌کنیم. از طرف دیگر در تعریف همگرایی یکنواخت ، هیچ نقطه x یی تعبیر از آنکه مقدار N مشخص شود مد نظر نیست و بنابراین مقدار N تنها با دانستن ϵ معلوم می‌گردد. بنابراین شرائط همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت متفاوتند. گرچه هر دنباله (f_n) که همگرای یکنواخت به تابع f باشد حتماً همگرای نقطه‌وار به f خواهد بود، ولی عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال، دنباله توابع در مثال ۱ از ۲.۲ را در نظر بگیرید، اما فاصله را به $[0,1)$ محدود کنید. یعنی

$$f_n(x) = x^n \qquad 0 \leq x < 1$$

دنباله (f_n) همگرای نقطه‌وار (در واقع به طور کراندار همگرا) به تابع ثابت 0 روی $[0,1)$ است، اما همگرای یکنواخت به تابع 0 روی $[0,1)$ نیست ، زیرا برای هر n داریم

$$\sup\{|f_n(x) - 0| : x \in [0,1)\} = 1.$$

نهایتاً ، باید دقت کرد که شرط همگرایی یکنواخت قوی‌تر از همگرایی به طور کراندار است. زیرا فرض کنید دنباله (f_n) همگرای یکنواخت به تابع کراندار f روی مجموعه S است ، و فرض کنید

$$|f(x)| \leq K \qquad x \in S$$

با توجه به اینکه روی S، f و f_n ، عدد طبیعی N را انتخاب می‌کنیم به طوری که وقتی $n \geq N$ و $x \in S$ داشته باشیم $|f_n(x) - f(x)| < 1$. بنابراین وقتی که $n \geq N$ و $x \in S$ داریم

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x)|$$
$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$$
$$< 1 + k$$

بنابراین (با شروع در $n = N$)، دنباله (f_n) بطور کراندار همگرا به f است.

۷.۴. مثال.

۱) مجدداً به مثال ۵ از ۲.۲ نگاه می‌کنیم. برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ و هر نقطه $x \in [0,1]$ تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$$

واضح است که دنباله (f_n) همگرای نقطه‌وار به تابع ثابت 0 می‌باشد؛ اما چون برای هر n

$$f_n(1/n) = n/2$$

پس (f_n) بطور کراندار همگرا به 0 نمی‌باشد. همچنین می‌توان از قضیه همگرائی کراندار نیز نتیجه گرفت که دنباله (f_n) بطور کراندار همگرا به 0 نیست. وقتی $n \to \infty$

$$\int_0^1 f_n \longrightarrow 1$$

۲) برای هر $x \in [0,1]$ و هر $n \in \mathbb{Z}^+$ تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \frac{2nx}{(1+n^2x^2)^2}$$

این توابع تناظراً از توابع در مثال (۱) کوچکترند و همچنین روی $[0,1]$ ، $f_n \xrightarrow{P} 0$. در این مثال دنباله (f_n) بطور کراندار همگرا است. زیرا برای هر n

$$f_n'(x) = \frac{2n(1-3n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^3}$$

به سادگی دیده می‌شود که ماکزیمم مقدار $f_n(x)$ در $x = 1/n\sqrt{3}$ اتفاق می‌افتد و مقدار ماکزیمم برابر است با $3\sqrt{3}/8$ که مستقل از n است. پس روی $[۰,۱]$، $f_n \xrightarrow{b} ۰$ این همگرایی یکنواخت نیست، زیرا برای هر n داریم

$$\sup f_n = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

۴) برای هر $x \in [۰,۱)$ و هر $n \in \mathbb{Z}^+$ تعریف می‌کنیم $f_n(x) = x^n$. گرچه $f_n \xrightarrow{b} ۰$ روی $[۰,۱)$، ولی این همگرایی یکنواخت نیست، اما اگر $\alpha \in [۰,۱)$ باشد آنگاه روی $[۰,\alpha]$ $f_n \xrightarrow{u} ۰$، زیرا، فرض کنید $۱ > \alpha \geq ۰$ و $\varepsilon > ۰$ داده شده است. عدد N را اختیار می‌کنیم بطوری که وقتی $N \leq n$ داشته باشیم $\alpha^n < \varepsilon$. حال برای هر $N \leq n$ و $x \in [۰,\alpha]$ داریم $|f_n(x)| < \varepsilon$.

۸.۴. همگرای یکنواخت نبودن. دنباله (f_n) تعریف شده بر مجموعه S را در نظر بگیرید. دو شرط زیر معادل هستند:

الف) دنباله (f_n) به تابع f همگرای یکنواخت نیست

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \{f_{n_k}\} \quad \exists (x_k) \subset S \quad \text{s.t.} \ \forall k \in \mathbb{N}, \ |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0$$

اثبات. تمرین

۹.۴. مثال.

فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x \in \mathbb{R}$،

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

در این صورت برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

زیرا از $\epsilon > 0$ داده شده و $x \in \mathbb{R}$ برای $\epsilon > 0$ پس برای $n > \frac{|x|}{\epsilon}$ داریم $\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n} < \epsilon$

قرار می‌دهیم $N = [\![\frac{|x|}{\epsilon}]\!] + 1$ ، به ازای هر $n \geq N$ داریم

$$|f_n(x) - 0| < \epsilon$$

پس $f_n \xrightarrow{P.} 0$. حال اگر $n_k = k$ و $x_k = k$ آنگاه

$$f_{n_k}(x_k) = f_k(k) = \frac{k}{k} = 1 \quad , \quad f(x_k) = 0$$

پس

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = |1 - 0| = 1$$

حال با فرض $\epsilon_0 = 1$ داریم $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \epsilon_0$. در نتیجه (f_n) بر روی $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت نیست.

۲) مثال ۱ از ۲.۲ را برای $S = [0, 1)$ و $f_n(x) = x^n$ بررسی می‌کنیم. فرض کنید $n_k = k$ و $x_k = (1/2)^{1/k}$ آنگاه

$$f_{n_k}(x_k) = f_k((1/2)^{1/k}) = ((1/2)^{1/k})^k = 1/2$$

و

$$f(x_k) = 0 = f((1/2)^{1/k})$$

بنابراین

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$$

حال اگر قرار دهیم $\epsilon_0 = 1/2$ داریم

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \frac{1}{2} = \epsilon_0$$

بنابراین (f_n) روی $S = [0, 1)$ همگرای یکنواخت نیست.

۵. خواص همگرایی یکنواخت

۱.۵. همگرایی یکنواخت و پیوستگی

۱.۱.۵ دنباله توابع (f_n) روی مجموعه $S=[0,1]$ تعریف شده توسط $f_n(x)=x^n$ را در نظر بگیرید. اگر $x=0$ آنگاه $f_n(0)=0$ و وقتی $n\to\infty$ داریم $f_n(0)\to 0$. اگر $x=1$، آنگاه $f_n(1)=1$ و وقتی $n\to\infty$ داریم $f_n(1)\to 1$. برای $0<x<1$، $f_n(x)=x^n$ و $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$. پس اگر قرار دهیم

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

آنگاه $f_n \xrightarrow{P.} f$ روی $[0,1]$. در بخش قبل دیدیم که این دنباله همگرایی یکنواخت نیست. بنابراین دنباله‌ای از توابع پیوسته روی S داریم که حد همگرایی آن روی $S=[0,1]$ پیوسته نیست.

حال مثال دیگری را مورد بررسی قرار میدهیم. فرض کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f_n(x)=\frac{x^2+nx}{n}.$$

پس

$$f_n(x)=\frac{x^2}{n}+\frac{nx}{n}=\frac{x^2}{n}+x$$

و برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{n}+x\right)=x$$

پس اگر قرار دهیم $f(x)=x$، آنگاه برای هر $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

حال فرض کنید $n_k=k$ و $x_k=k$ آنگاه

$$f_{n_k}(x_k)=f_k(k)=\frac{k^2+k^2}{k}=2k$$

و

$$f(x_k) = f(k) = k$$

پس

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = 2k - k = k$$

درنتیجه دنباله (f_n) روی $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت به تابع f نیست. در اینجا f_nها و f روی $\mathbb{R}$ پیوسته اند و $f_n \xrightarrow{P.} f$ اما همگرای یکنواخت نیست.

بنابراین دو سؤال مطرح می گردد:

1) اگر دنباله (f_n) از توابع پیوسته روی S به تابع f به طور یکنواخت همگرا باشد آیا f الزاماً روی S پیوسته است؟

2) فرض کنید (f_n) دنباله ای از توابع پیوسته روی S باشد که به تابع پیوسته f همگراست. فرض کنید در نقطه $x \in S$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \qquad t \in S$$

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = f_n(x)$$

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

و

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{t\to x} f(t) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = f(x) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

آیا بدون شرط پیوستگی حکم بالا درست است؟ تحت چه شرایطی می توان جای حدود را عوض کرد؟

۲.۱.۵ قضیه. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع بر روی S باشد و x یک نقطهٔ حدی S باشد و دنباله (A_n) از اعداد حقیقی باشد که

$$\lim_{t\to x} f_n(t)=A_n \qquad n=1,2,\dots$$

اگر (f_n) به طور یکنواخت بر روی S به تابع f همگرا باشد آنگاه دنباله (A_n) همگرا بوده و

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{t\to x} f(t)$$

یعنی:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)=\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

اثبات. نشان خواهیم داد که دنباله (A_n) یک دنباله کُشی است. چون (f_n) بر روی S یک دنباله به طور یکنواخت است بنا به شرط کُشی (قضیه ۵.۴) برای $\varepsilon>0$ داده شده عدد $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $m,n\geq N$ و هر $t\in S$ داریم

$$|f_m(t)-f_n(t)|<\varepsilon/3$$

با توجه به $\lim_{t\to x} f_n(t)=A_n$، عدد $\delta>0$ وجود دارد به طوری که برای هر $t\in S$ در صورتی که $0<|t-x|<\delta$ داریم

$$|f_n(t)-A_n|<\varepsilon/3 \qquad n=1,2,\dots$$

پس

$$\begin{aligned}|A_m-A_n|&=|A_m-f_m(t)+f_m(t)-f_n(t)+f_n(t)-A_n|\\&\leq|A_m-f_m(t)|+|f_m(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-A_n|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

پس ثابت کردیم که

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t}\ \forall m,n\geq N \qquad |A_m-A_n|<\varepsilon$$

یعنی $\{A_n\}$ یک دنباله کُشی از اعداد حقیقی است و در نتیجه همگرا می‌باشد. فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

باید نشان دهیم $\lim_{t\to x} f(t)=A$ ، چون

$$|f(t)-A| = |f(t)-f_n(t)+f_n(t)-A_n+A_n-A|$$
$$\leq |f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-A_n|+|A_n-A|$$

چون $f_n \xrightarrow{u.} f$ داریم

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N_1\in\mathbb{N} \quad s.t \quad \forall n\geq N_1 ,\ \forall t\in S, \ |f_n(t)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

از آنجاکه $\lim_{t\to x} f_n(t)=A_n$ داریم

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad s.t \quad \forall t\in S, 0<|t-x|<\delta \Rightarrow |f_n(t)-A_n|<\frac{\varepsilon}{3} \quad n=1,2,\ldots$$

از رابطه $\lim_{n\to\infty} A_n=A$ داریم

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N_2\in\mathbb{N} \quad s.t \quad \forall n\geq N_2 \ , \ |A_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}$$

فرض کنید $N=\max\{N_1,N_2\}$. آنگاه برای برای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $\delta>0$ وجود دارد به طوری که برای هر $t\in S$، اگر داشته باشیم $0<|t-x|<\delta$، آنگاه

$$|f(t)-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

پس $\lim_{t\to x} f(t)=A$ یعنی

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)=\lim_{n\to\infty} A_n$$
$$=A = \lim_{t\to x} f(t)=\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

<u>۳.۱.۵ نتیجه</u>. اگر (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته روی S باشد که به طور یکنواخت به تابع f همگرا باشد، آنگاه f روی S پیوسته است.

<u>اثبات</u>. چون f_n روی S پیوسته است پس

$$A_n=\lim_{t\to x} f_n(t)=f_n(x)$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

از طرفی

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = f_n(x)$$

پس

$$\begin{aligned} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) \\ &= \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) \\ &= \lim_{t\to x} f(t) \end{aligned}$$

یعنی f در $x\in S$ پیوسته است.

۴.۱.۵ مثال.

۱) فرض کنید

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ -n^2\left(x-\frac{2}{n}\right) & \frac{1}{n}\le x\le \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

می‌توان نشان داد که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. بنابراین (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته است که به طور نقطه‌وار همگرا به تابع پیوسته صفر می‌باشد، ولی همگرایی یکنواخت نیست. (چرا؟)

۲) فرض کنید

$$f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n \qquad x\in[0,1]\ ,\ n\in\mathbb{N}$$

$f_n \xrightarrow{P.} f$ ، $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ و f_nها و f بر روی $[0,1]$ پیوسته‌اند ولی همگرایی یکنواخت نیست. (چرا؟)

۵.۱.۵ قضیه دنی (Dini's Theorem).

فرض کنید K یک فضای فشرده است و شرایط زیر برقرار باشد:

۱) دنباله (f_n) از توابع پیوسته روی K به تابع f به طور نقطه ای همگرا است.

۲) دنباله (f_n) یک دنباله نزولی است. یعنی برای $n=1,2,\ldots$ ، $f_n \geqslant f_{n+1}$

۳) تابع f بر روی K پیوسته است.

آنگاه دنباله (f_n) برروی K به تابع f بطور یکنواخت همگرا است.

اثبات. قرار می دهیم $g_n = f_n - f$. دنباله (g_n) یک دنباله از توابع پیوسته روی K است که به طور نقطه ای به تابع صفر همگرا است و دنباله (g_n) نزولی است. زیرا

$$f_n \geqslant f_{n+1} \Rightarrow f_n - f \geqslant f_{n+1} - f \Rightarrow g_n \geqslant g_{n+1}$$

حال، فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. مجموعه های K_n را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$K_n = \{x \in K : g_n(x) \geqslant \varepsilon\} \qquad n=1,2,\ldots$$

چون g_n برروی K به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ پیوسته است، اگر قرار دهیم

$$E = \{y \in \mathbb{R} : y \geqslant \varepsilon\}$$

آنگاه E در $\mathbb{R}$ بسته است و در نتیجه $g_n^{-1}(E)$ بسته است. اما

$$g_n^{-1}(E) = \{x \in K : g_n(x) \in E\} = \{x \in K : g_n(x) \geqslant \varepsilon\} = K_n$$

پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، مجموعه های K_n زیرمجموعه بسته در فضای فشرده K می باشند پس K_n ها فشرده اند. چون برای هر $x \in K$ داریم

$$g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x)$$

بنابراین $K_n \supset K_{n+1}$. در نتیجه $\{K_n\}$ دنباله ای از فضا های فشرده است که دارای خاصیت FIP (خاصیت اشتراک متناهی) است. در نتیجه

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

از طرفی (g_n) به طور نقطه‌وار بر روی K به تابع صفر همگرا است. پس

$$\forall \varepsilon>0 \quad \forall x\in K \quad \exists N\in \mathbb{N} \ \text{s.t} \ \forall n\geq N \ , \ |g_n(x)|<\varepsilon$$

اگر $x\in K$ ثابت فرض شود آنگاه با استفاده از تعریف حد، برای n های به اندازه کافی بزرگ، x نمی‌تواند در K_n برای $N\leq n$ باشد. یعنی $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ پس $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=\emptyset$ و این با قسمت اول اثبات در تناقض است. پس عدد مشخصی مانند N وجود دارد به طوری که $K_N=\emptyset$ ، در نتیجه برای هر $x\in K$ ، $g_N(x)<\varepsilon$. پس

$$n\geq N \Rightarrow g_n\leq g_N \Rightarrow g_n(x)\leq g_N(x)<\varepsilon$$

بنابراین برای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای $N\leq n$ و هر $x\in K$ داریم $g_n(x)<\varepsilon$. پس $g_n \xrightarrow{\text{ی.ن}} 0$ یعنی $f_n-f \xrightarrow{\text{ی.ن}} 0$ پس $f_n \xrightarrow{\text{ی.ن}} f$.

<u>تمرین</u>. اثبات کنید: اگر (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته و صعودی بر بازه بسته $[a,b]$ باشد که به طور نقطه‌وار به تابع f همگرا است آنگاه همگرایی یکنواخت است.

۴.۱.۵. <u>فضای متریک توابع پیوسته</u>: فرض کنید X فضای متریک دلخواهی است. مجموعه تمام توابع پیوسته و کراندار تعریف شده بر X با مقادیر حقیقی یا مختلط را با $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ یا $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ نمایش می‌دهند. برای سادگی $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ را با $\mathcal{C}(X)$ نمایش می‌دهیم.

$$\mathcal{C}(X)=\{f \mid f:X\to\mathbb{C} \ \text{پیوسته و کراندار}\}$$

اگر X فشرده باشد آنگاه هر تابع پیوسته‌ای بر X کراندار است. بنابراین در حالتی که X فشرده است بطور ساده $\mathcal{C}(X)$ را فضای توابع پیوسته تعریف شده بر X نامیم.

اعمال جمع و ضرب اسکالر در مجموعه $\mathcal{C}(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

اگر $f,g\in\mathcal{C}(X)$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ ، آنگاه

$$f(x)+g(x)=(f+g)(x) \qquad x\in X$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \qquad x\in X$$

چون مجموع و ضرب اسکالری توابع پیوسته و کراندار، تابعی پیوسته و کراندار است پس $\mathcal{C}(X)$ تحت اعمال بالا بسته می‌باشد، بنابراین $\mathcal{C}(X)$ یک فضای خطی یا یک فضای برداری است. (به عنوان تمرین خواص فضای برداری را برای $\mathcal{C}(X)$ بررسی کنید.)

تابع نُرم را به صورت زیر بر روی $\mathcal{C}(X)$ تعریف می‌کنیم: برای $f\in\mathcal{C}(X)$

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)| : x\in[a,b]\}$$

چون توابع در $\mathcal{C}(X)$ کراندارند پس $\|f\|_\infty<\infty$. به سادگی دیده می‌شود که نُرم تعریف شده دارای خواص زیر است:

i) $\|f\|_\infty\geqslant 0$

ii) $f\equiv 0 \iff \|f\|_\infty=0$

iii) $\forall\alpha\in\mathbb{R},\ f\in\mathcal{C}(X),\quad \|\alpha f\|_\infty=|\alpha|\,\|f\|_\infty$

iv) $\forall f,g\in\mathcal{C}(X),\quad \|f+g\|_\infty\leq\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$

فضای برداری $\mathcal{C}(X)$ با نرم فوق یک فضای نرم‌دار است. نرم فوق را نرم یکنواخت گویند.

متریک d را بر روی $\mathcal{C}(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(f,g)=\|f-g\|_\infty \qquad f,g\in\mathcal{C}(X)$$

به سادگی دیده می‌شود که:

i) $d(f,g)\geqslant 0$

ii) $d(f,g)=0\iff f=g$

iii) $d(f,g)=d(g,f)$

iv) $d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g) \qquad \forall f,g,h\in\mathcal{C}(X)$

بنابراین $\mathcal{C}(X)$ یک فضای متریک است.

دنباله (f_n) از اعضای $\mathcal{C}(X)$ نسبت به متریک تعریف شده به تابع f در $\mathcal{C}(X)$ همگرا است اگر و تنها اگر دنباله (f_n) به تابع f روی X همگرای یکنواخت باشد:

$$f_n \xrightarrow[\text{متریک } d]{\text{نسبت به}} f \iff \forall \epsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \text{s.t} \ \forall n\geq N, \ d(f_n,f)<\epsilon$$

$$\iff d(f_n,f)=\|f_n-f\|_\infty<\epsilon$$

$$\iff \|f_n-f\|_\infty<\epsilon$$

$$\iff f_n \xrightarrow{u} f$$

<u>تعریف</u> ۷.۱.۵. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{C}(X)$ است. $\bar{A}$ <u>بستار یکنواخت</u> A در $\mathcal{C}(X)$ نامیده می‌شود. اگر $\bar{A}=A$ آنگاه A را <u>بطور یکنواخت بسته</u> نامند (Uniformly closed).

اکنون آماده‌ایم که نشان دهیم فضای متریک $\mathcal{C}(X)$ نسبت به d یک فضای متریک کامل است. یعنی هر دنباله کشی در $\mathcal{C}(X)$ نسبت به d همگرا است.

<u>قضیه</u> ۸.۱.۵. $\mathcal{C}(X)$ یک فضای متریک کامل است.

<u>اثبات</u>. نشان می‌دهیم هر دنباله کشی (f_n) نسبت به متریک d همگرا در $\mathcal{C}(X)$ است.
فرض کنید (f_n) یک دنباله کشی در $\mathcal{C}(X)$ باشد، بنابراین

$$\forall \epsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \text{s.t} \ \forall m,n\geq N, \ d(f_n,f_m)<\epsilon$$

پس

$$\|f_n-f_m\|_\infty=d(f_n,f_m)<\epsilon$$

اما $\|f_n-f_m\|_\infty=\sup\{|f_n(x)-f_m(x)|: x\in X\}$ بنابراین به ازای هر $x\in X$

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$$

در نتیجه ثابت کردیم

$$\forall \epsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \text{s.t} \ \forall m,n\geq N, \ \forall x\in X, \ |f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$$

بنابراین $\{f_n(x)\}$ از اعداد مختلط کشی است. چون فضای متریک اعداد مختلط کامل است پس

دنباله $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x\in X$ همگرا است. مثلاً همگرا به $f(x)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
پس (f_n) روی X به تابع f همگرای یکنواخت است. چون $f_n \in \mathcal{C}(X)$ پس پیوسته و کراندارند. طبق نتیجه ۲.۱.۵ تابع f روی X پیوسته است. کافی است نشان دهیم f بر روی X کراندار است.

$$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ s.t\ \forall n\geq N,\ \forall x\in X,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

پس

$$\big||f_n(x)|-|f(x)|\big| \leq |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

در نتیجه

$$|f(x)|<|f_n(x)|+\varepsilon \qquad \forall\varepsilon>0,\forall x\in X$$

قرار می‌دهیم $\varepsilon=1$، داریم

$$|f(x)| < |f_n(x)|+1$$

حال چون f_nها کراندارند، پس f بر روی X کراندار است. در نتیجه $f\in\mathcal{C}(X)$. یعنی (f_n) در $\mathcal{C}(X)$ همگرا است. پس $\mathcal{C}(X)$ یک فضای متریک کامل است.

۲.۵ همگرایی یکنواخت و انتگرال

۱.۲.۵. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر بر بازه $[a,b]$ باشد که بطور نقطه‌ای به تابع f همگرا است. سؤالی که مطرح می‌گردد این است که:

آیا تابع f بر بازه $[a,b]$ الزاماً انتگرال‌پذیر است؟ یعنی آیا

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

به عبارت دیگر آیا می‌توان حد را داخل انتگرال برد؟

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \int_a^b \lim f_n(x)\,dx$$

به مثالهای زیر توجه کنید.

۲.۲.۵ مثال. فرض کنید

$$f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n \qquad 0\le x\le 1$$

داریم $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$. چون f_nها در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته‌اند بنابراین انتگرال‌پذیر می‌باشند و

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 n^2x(1-x^2)^n\,dx$$
$$=\frac{n^2(1-x^2)^{n+1}}{-2(n+1)}\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{n^2}{n+1}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{n^2}{n+1}=\infty$$

درصورتی که با $f(x)=0$ داریم

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0$$

پس

$$\infty=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=0$$

۳.۲.۵ مثال. فرض کنید

$$f_n(x)=nx(1-x^2)^n \qquad 0\le x\le 1$$

داریم $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$. چون f_nها در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته‌اند بنابراین انتگرال‌پذیر می‌باشند و

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx$$
$$=\frac{n(1-x^2)^{n+1}}{-2(n+1)}\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{n}{n+1}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}$$

درصورتی که با $f(x)=0$ داریم $\int_0^1 f(x)\,dx=0$. پس

$$\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=0$$

در مثالهای فوق همگرایی یکنواخت نمی باشد. در قضیه بعد نشان می دهیم که اگر همگرایی یکنواخت باشد آنگاه تابع f انتگرال پذیر بوده و

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

۴.۲.۵ قضیه. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال پذیر ریمان استیلیس بر بازه $[a,b]$ نسبت به تابع صعودی α است. اگر دنباله (f_n) بر $[a,b]$ به تابع f بطور یکنواخت همگرا باشد آنگاه $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ و

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha$$

اثبات. قرار می دهیم

$$M_n = \sup\{|f_n(x)-f(x)| \ : \ x\in[a,b]\}$$

چون $f_n \xrightarrow{u} f$ بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0$$

از طرفی داریم

$$|f_n(x)-f(x)| \le M_n \qquad \forall x\in[a,b],\ \forall n$$

پس

$$-M_n \le f_n(x)-f(x) \le M_n$$

$$f_n(x)-M_n \le f(x) \le M_n+f_n(x)$$

چون $f_n\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ بنابراین $f_n(x)+M_n\in R(\alpha)$ و $f_n(x)-M_n$ روی $[a,b]$ و

$$\underline{\int_a^b}(M_n+f_n)\,d\alpha = \int_a^b(M_n+f_n)\,d\alpha = \overline{\int_a^b}(M_n+f_n)\,d\alpha$$

پس

$$\int_a^b (f_n-M_n)\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \int_a^b (M_n+f_n)\,d\alpha$$

و

$$\int_a^b (f_n-M_n)\,d\alpha \le \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \int_a^b (M_n+f_n)\,d\alpha$$

بنابراین

$$\int_a^b (f_n - M_n)\, d\alpha \le \underline{\int_a^b} f\, d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\, d\alpha \le \int_a^b (f_n + M_n)\, d\alpha$$

پس

$$0 \le \overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha \le \int_a^b (f_n + M_n) d\alpha - \int_a^b (f_n - M_n) d\alpha$$
$$= \int_a^b f_n d\alpha + \int_a^b M_n d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha + \int_a^b M_n d\alpha$$
$$= 2\int_a^b M_n d\alpha = 2M_n(\alpha(b) - \alpha(a))$$

حال از آنجا که $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ ، برای هر $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t } \forall n \ge N,\ M_n < \varepsilon / 2(\alpha(b) - \alpha(a))$$

یعنی به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد N در $\mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که

$$0 \le \overline{\int_a^b} f\, d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2(\alpha(b) - \alpha(a))} \times [2(\alpha(b) - \alpha(a))] = \varepsilon$$

پس

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha$$

یعنی $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ روی $[a,b]$ و

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha$$

حال از رابطه

$$\int_a^b (f_n - M_n) d\alpha \le \int_a^b f\, d\alpha \le \int_a^b (f_n + M_n)\, d\alpha$$

داریم

$$\int_a^b f_n d\alpha - \int_a^b M_n d\alpha \le \int_a^b f\, d\alpha \le \int_a^b f_n d\alpha + \int_a^b M_n d\alpha$$

پس

$$-\int_a^b M_n d\alpha \le \int_a^b f\, d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \le \int_a^b M_n d\alpha$$

در نتیجه

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| \le \int_a^b M_n d\alpha = M_n (\alpha(b) - \alpha(a))$$

بنابراین

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t } \forall n \ge N,\ \left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| < \varepsilon$$

یعنی $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, d\alpha = \int_a^b f d\alpha = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n\, d\alpha$.

۵.۲.۵ قضیه. فرض کنید دنباله‌ی (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ باشند که بطور یکنواخت به تابع f همگرا باشند. فرض کنید $g(x)$ تابعی با تغییر کراندار بر $[a,b]$ است آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

اثبات. باید دقت کرد که با توجه به خاصیت جمع پذیری انتگرال و تجزیه تابع با تغییر کراندار بصورت دو تابع صعودی، حکم از قضیه ۴.۲.۵ حاصل می‌شود. اما به سادگی دیده می‌شود که:

فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است. چون $f_n \xrightarrow{u} f$، عدد $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که به ازای $n\geq N$ و هر $x\in[a,b]$ داریم

$$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

طبق قضیه ۳.۴ فصل انتگرال ریمان استیلیس

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dg(x)-\int_a^b f(x)\,dg(x)\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dg(x)\right|$$
$$\leq \epsilon\, V(g;a,b)$$

چون ϵ دلخواه است پس حکم نتیجه می‌شود.

۶.۲.۵ قضیه. فرض کنید f تابعی پیوسته در بازه‌ی $[a,b]$ است و دنباله (g_n) در بازه‌ی $[a,b]$ دنباله‌ای از توابع با تغییر کراندار باشند. اگر مجموعه‌ی تغییرات کل هر یک از توابع g_n کراندار باشد یعنی

$$\exists V,\quad V(g_n;a,b)\leq V \qquad n=1,2,\dots$$

و دنباله (g_n) همگرا به تابع حدی g بر $[a,b]$ باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dg_n(x)=\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که تابع g نیز بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است. فرض کنید $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ افرازی دلخواه از $[a,b]$ است که در آن $x_0=a$ و $x_n=b$. در این صورت برای n دلخواه داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} |g_n(x_i)-g(x_{i-1})| \le V(g_n;a,b) \le V$$

حال وقتی $n\to\infty$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i)-g(x_{i-1})| \le V$$

پس $V(g;a,b)\le V$. درنتیجه g بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است.

حال مجموعهای استیلجس را تشکیل می‌دهیم

$$S(P,f,g) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta g(x_i)$$
$$S(P,f,g_n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta g_n(x_i)$$

حال اگر فرض کنیم بازه $[a,b]$ چنان افراز شده است که در هر زیربازه $[x_{i-1},x_i]$

$$\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon$$

که در آن $\varepsilon>0$ عدد مفروض داده شده است، آنگاه با توجه به قضیه ۴.۴ فصل انتگرال ریمان استیلجس، به ازای هر n داریم

$$\left|S(P,f,g_n) - \int_a^b f(x)\,dg_n(x)\right| \le \varepsilon V$$

و

$$\left|S(P,f,g) - \int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \le \varepsilon V$$

وقتی $n\to\infty$ داریم $S(P,f,g_n)\to S(P,f,g)$ پس

$$\exists N\in\mathbb{N} \text{ s.t } \forall n\ge N,\quad |S(P,f,g_n)-S(P,f,g)|<\varepsilon$$

پس

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\,dg_n - \int_a^b f\,dg\right| &\le \left|\int_a^b f\,dg_n - S(P,f,g_n)\right| + |S(P,f,g_n)-S(P,f,g)| \\ &\quad + \left|S(P,f,g)-\int_a^b f\,dg\right| \\ &< (2V+1)\varepsilon\end{aligned}$$

چون $\varepsilon>0$ دلخواه است پس $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f\,dg_n = \int_a^b f\,dg$.

تمرین. تحت چه شرایطی قضیه ۵.۲.۵ با فرض همگرایی کراندار برقرار است. شرایط لازم را اعمال کرده و قضیه ۵.۲.۵ را در این حالت ثابت کنید. (راهنمایی. از ۶.۲ فصل انتگرال R.S. استفاده کنید)

۳.۵ همگرایی یکنواخت و مشتق

۱.۳.۵ . فرض کنید (f_n) دنباله ای از توابع مشتق پذیر بر بازهٔ $[a,b]$ است که بطور یکنواخت به تابع f روی $[a,b]$ همگرا است. آیا تابع f لزوماً بر $[a,b]$ مشتق پذیر است. در بحث پیوستگی و انتگرال پذیری دیدیم که اگر همگرایی دنباله یکنواخت باشد خواص پیوستگی و انتگرال پذیری به تابع f حد همگرایی یکنواخت دنباله (f_n) منتقل می گردد. حال سؤال این است که مشتق پذیری نیز چنین است؟ به مثال زیر توجه می کنیم.

۲.۳.۵ مثال . فرض کنید

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad n=1,2,\dots \ , \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

داریم $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ و این همگرایی یکنواخت است، زیرا

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}-0\right|=\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

پس $\frac{1}{n}<\varepsilon^2$ یعنی $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$. اگر برای $\varepsilon>0$ داده شده، قرار دهیم $N=[\![\frac{1}{\varepsilon^2}]\!]+1$ آنگاه برای هر $n\geq N$ و هر $x\in\mathbb{R}$

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}-0\right|<\varepsilon$$

پس $f_n \xrightarrow{u} 0$.

حال $f_n'(x)=\frac{n\cos nx}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\cos nx$ اما وقتی $n\to\infty$ داریم $f_n'(0)=\sqrt{n}\to\infty$

ولی $f(x)=0$ پس $f'(0)=0$. در نتیجه $f_n'\not\to f'$.

در این مثال دیده شد که حتی با وجود همگرایی یکنواخت دنباله مشتق پذیر (f_n) نمی توان انتظار داشت که $f_n'\to f'$ ، بنابراین به فرضیات بیشتری نیاز است.

۳.۳.۵ قضیه . فرض کنید (f_n) دنباله ای از توابع مشتق پذیر بر بازهٔ $[a,b]$ است و به ازای x_0 ای در $[a,b]$ دنبالهٔ $(f_n(x_0))$ یک دنباله عددی همگرا باشد. اگر دنباله (f_n') بر $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه دنباله (f_n) بر $[a,b]$ همگرای یکنواخت

به تابعی مانند f روی $[a,b]$ است و

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

<u>اثبات</u>. ابتدا نشان می‌دهیم دنباله (f_n) یک دنباله کشی است. فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است. چون دنباله‌های $(f_n(x_0))$ و (f_n') همگرا می‌باشند پس هر دو کشی بوده، بنابراین

$$\exists N_1\in\mathbb{N} \quad s.t\ \forall m,n\geq N_1 ,\ |f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2\in\mathbb{N} \quad s.t\ \forall m,n\geq N_2 , \forall x\in[a,b] ,\ |f_n'(x)-f_m'(x)|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

قرار می‌دهیم $N=\max\{N_1,N_2\}$. دو رابطه بالا برای هر $m,n\geq N$ برقرار است.

تابع $g=f_n-f_m$ بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر است. بنابراین برای هر $t<x$ در بازه $[a,b]$، تابع g در شرایط قضیه مقدار میانگین برای $[t,x]$ صدق می‌کند. پس

$$\exists c\in(t,x) \quad s.t.\quad g(x)-g(t)=g'(c)(x-t)$$

پس

$$f_n(x)-f_m(x)-f_n(t)+f_m(t)=(f_n'(c)-f_m'(c))(x-t)$$

در نتیجه برای هر $m,n\geq N$ و هر $x,t\in[a,b]$ داریم

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)-f_n(t)+f_m(t)| &\leq |f_n'(c)-f_m'(c)|\,|x-t| \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)}|x-t| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

بنابراین ثابت کردیم

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}\ s.t\ \forall x,t\in[a,b], \forall n,m\geq N,\ |f_n(x)-f_m(x)-f_n(t)+f_m(t)|<\frac{\epsilon}{2}$$

قرار می‌دهیم $t=x_0$، داریم

$$|f_n(x)-f_m(x)-f_n(x_0)+f_m(x_0)|<\frac{\epsilon}{2} \qquad \forall x\in[a,b]$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)| &\leq |f_n(x)-f_m(x)-f_n(x_0)+f_m(x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

پس ثابت کردیم که

$$\forall \epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t}\ \forall m,n\geq N,\ \forall x\in[a,b],\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$$

یعنی دنباله (f_n) روی $[a,b]$ یک دنباله کشی است. درنتیجه همگرای یکنواخت است.
حد همگرایی دنباله (f_n) را f نامیم.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

حال توابع φ_n و φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $t\in[a,b]$

$$\varphi_n(t)=\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x} \qquad t\neq x$$

$$\varphi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \qquad t\neq x$$

درنتیجه برای $t\neq x$

$$\varphi_m(t)-\varphi_n(t)=\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}-\frac{f_m(t)-f_m(x)}{t-x}$$
$$=\frac{f_n(t)-f_m(t)+f_m(x)-f_n(x)}{t-x}$$

پس برای $t\neq x$

$$|\varphi_m(t)-\varphi_n(t)|<\frac{\epsilon\ |t-x|}{2(b-a)}\cdot\frac{1}{|t-x|}=\frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

درنتیجه دنباله (φ_n) یک دنباله کشی است. بنابراین (φ_n) روی $[a,b]$ همگرای یکنواخت است و داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$ چون $f_n\xrightarrow{u} f$، طبق تعریف φ_n داریم

$$\lim_{t\to x}\varphi_n(t)=\lim_{t\to x}[f_n(t)-f_n(x)]/(t-x)$$
$$=f_n'(x)$$

پس $\forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{t\to x}\varphi_n(t)=f_n'(x)$. درنتیجه

$$\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

پس $\lim\limits_{t\to x}\varphi(t)$ وجود دارد. درنتیجه f مشتق‌پذیر بوده و داریم

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

و حکم تمام است.

<u>۴.۲.۵ نتیجه</u>. اگر در قضیه ۳.۲.۵، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع f_n' بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه قضیه با استفاده از قضیه اساسی انتگرال به سادگی قابل اثبات است.

<u>اثبات</u>. چون f_n' پیوسته است پس انتگرال پذیر می‌باشد. بنابراین انتگرال

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt$$

برای هر $a \le x \le b$ با معنی است و

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a)$$

چون (f_n') طبق فرض حد دارند. فرض کنید

$$f_n' \xrightarrow{u.} g$$

طبق نتیجه ۳.۱.۵ تابع g بر $[a,b]$ پیوسته است در نتیجه انتگرال پذیر می‌باشد و داریم

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt \longrightarrow \int_a^x g(t)\,dt$$

در نتیجه برای هر $x \in [a,b]$

$$f_n \xrightarrow{u.} f_n(a) + \int_a^x g$$

بنابراین (f_n) روی $[a,b]$ بطور یکنواخت به تابعی مانند f همگرا است $f_n \xrightarrow{u.} f$. طبق قضیه اساسی $f' = g$ پس $f_n' \xrightarrow{u.} f'$.

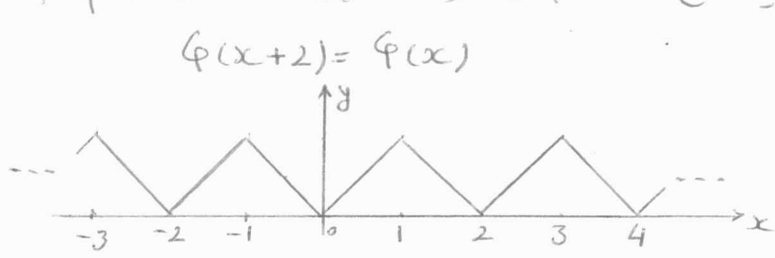
<u>۵.۳.۵ قضیه</u>. تابع حقیقی پیوسته ای روی خط حقیقی وجود دارد که هیچ کجا مشتق پذیر است.

<u>اثبات</u>. تابع φ بر فاصله $[-1,1]$ را با

$$\varphi(x) = |x|$$

در نظر بگیرید. تابع فوق را برای هر x حقیقی متناوب می‌کنیم. برای این منظور قرار می‌دهیم

$$\varphi(x+2) = \varphi(x)$$



به ازای هر $s, t \in \mathbb{R}$ داریم (چرا؟)

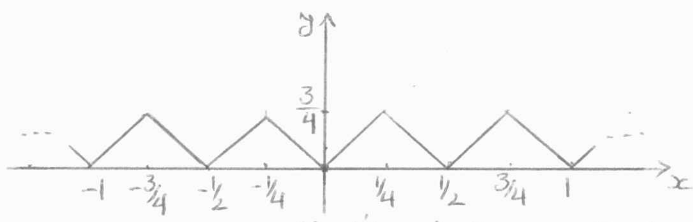
$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \le |s - t|$$

با توجه به تعریف φ ، برای $-\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4}$

$$\frac{3}{4}\varphi(4x) = 3|x| \qquad -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4}$$

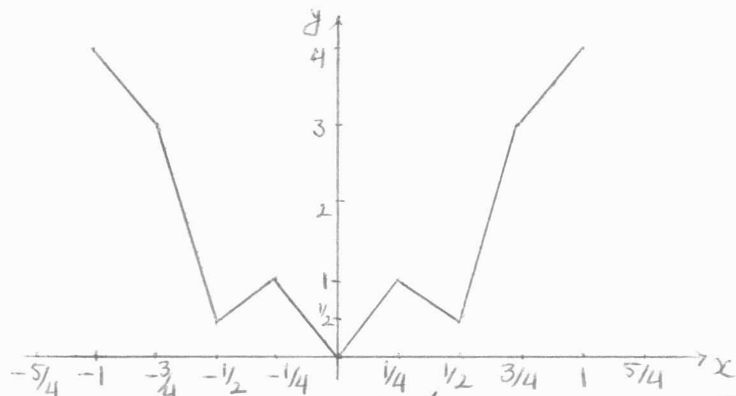
و

$$\varphi\left(4\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) = \varphi(4x)$$



حال تابع $\varphi(x)+\frac{3}{4}\varphi(4x)$ را در نظر می‌گیریم.

$$\varphi(x)+\frac{3}{4}\varphi(4x) = 4|x| \qquad -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4}$$



به همین ترتیب اگر ادامه دهیم، نقاط شکستگی تابع حاصل زیاد می‌شود یعنی نقاط مشتق ناپذیری تابع افزایش می‌یابد. قرار می‌دهیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (3/4)^n \varphi(4^n x)$$

اگر به جملات سری فوق نگاه کنیم، دیده می‌شود که

$$\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

و $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ یک سری هندسی است پس سری $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ یک سری همگرای یکنواخت به تابع f است. چون جملات سری توابعی پیوسته اند پس حد همگرایی آن پیوسته می‌باشد.

بنابراین $f(x)$ تعریف شده در بالا تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم تابع f در هیچ عدد حقیقی مشتق‌پذیر نیست. فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ عدد حقیقی دلخواه ثابت بوده و m عددی صحیح مثبت باشد. قرار می‌دهیم:

$$\delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$$

حال علامت δ_m را چنان انتخاب می‌کنیم که بین $4^m x$ و $4^m(x+\delta_m)$ عددی صحیح قرار نداشته باشد. یعنی $\delta_m = \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$ هرگاه در فاصله $[4^m x, 4^m x + \frac{1}{2}]$ عدد صحیح نباشد و $\delta_m = -\frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$ در نظر می‌گیریم هرگاه در فاصله $[4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x]$ عدد صحیح نباشد. این نوع انتخاب امکان پذیر است زیرا

$$4^m |\delta_m| = 4^m (\tfrac{1}{2} \cdot 4^{-m}) = 1/2$$

اگر $n > m$ آنگاه

$$\begin{aligned} 4^n(x+\delta_m) - 4^n x &= 4^n \delta_m \\ &= \pm \tfrac{1}{2} (4^n)(4^{-m}) \\ &= \pm \tfrac{1}{2} (4^{n-m}) \end{aligned}$$

چون $4^{n-m} > 0$، بنابراین حاصل بالا زوج است. یعنی $4^n \delta_m$ زوج می‌باشد، پس

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m} = 0$$

زیرا نقاط $4^n(x+\delta_m)$ و $4^n x$ در یک دوره تناوب تابع φ قرار دارند، در نتیجه با توجه به تعریف تابع φ مقدار γ_n در این حالت صفر است.

اگر $n = m$، آنگاه

$$4^m(x+\delta_m) - 4^m x = 4^m \delta_m = \pm 1/2$$

پس

$$|\varphi(4^m(x+\delta_m)) - \varphi(4^m x)| = 1/2$$

بنابراین

$$|\gamma_m| = \left| \frac{\varphi(4^m(x+\delta_m)) - \varphi(4^m x)}{\delta} \right| = \frac{1/2}{\frac{1}{2}(4^{-m})} = 4^m$$

اگر $0 \le n < m$، آنگاه با توجه به رابطه $|\varphi(s) - \varphi(t)| \le |s-t|$ داریم

$$|\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)| \le |4^n x + 4^n \delta_m - 4^n x| = \tfrac{1}{2}(4^{n-m})$$

پس

$$\left|\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m))-\varphi(4^n x)}{\delta}\right| \leq \frac{|4^n\delta_m|}{|\delta_m|}=4^n$$

حال برای تابع f تعریف شده داریم

$$\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\varphi(4^n(x+\delta_m))-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\varphi(4^n x)}{\delta_m}\right|$$

$$=\left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\left(\varphi(4^n(x+\delta_m))-\varphi(4^n x)\right)}{\delta_m}\right|$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{m}(\frac{3}{4})^n\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m))-\varphi(4^n x)}{\delta_m}\right.$$

$$\left.+\sum_{n=m+1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m))-\varphi(4^n x)}{\delta_m}\right|$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{m}(\frac{3}{4})^n\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m))-\varphi(4^n x)}{\delta_m}\right|$$

$$\geq\left|(\frac{3}{4})^m\frac{\varphi(4^m(x+\delta_m))-\varphi(4^m x)}{\delta_m}\right|$$

$$-\left|\sum_{n=0}^{m-1}(\frac{3}{4})^n\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m))-\varphi(4^n x)}{\delta_m}\right|$$

$$\geq 3^m-\sum_{n=0}^{m-1}(\frac{3}{4})^n|\gamma_n|$$

$$\geq 3^m-\sum_{n=0}^{m-1}(\frac{3}{4})^n(4^n)$$

$$=3^m-\sum_{n=0}^{m}3^n=3^m-\frac{3^m-1}{2}$$

$$=3^m-\frac{3^m}{2}+\frac{1}{2}=3^m(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(3^m+1)$$

پس ثابت شد که

$$\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right|\geq\frac{1}{2}(3^m+1)$$

حال وقتی $m\to\infty$ داریم $\frac{1}{2}(3^m+1)\to\infty$. در نتیجه حد چپ عبارت بالا به بینهایت میل می‌کند

پس مشتق تابع f در $x\in\mathbb{R}$ دلخواه وجود ندارد. یعنی f تابعی همواره پیوسته و هیچگاه مشتق پذیر است.

۶.۲.۵ <u>قضیه</u>. فرض کنید a یک عدد صحیح فرد و b عددی حقیقی است بطوری که $1 > b > 0$. همچنین فرض کنید $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. تابع f تعریف شده روی $\mathbb{R}$ توسط

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos[a^k \pi x]$$

را درنظر بگیرید. آنگاه f تابعی پیوسته و کراندار روی $\mathbb{R}$ است که دارای هیچ مشتقی در $\mathbb{R}$ نیست.

<u>اثبات</u>. برای هر k داریم

$$|b^k \cos[a^k \pi x]| \le b^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

چون $\sum_{k=0}^{\infty} b^k$ همگرا است پس سری تعریف کننده تابع f همگرای مطلق است و

$$|f(x)| \le \sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

همچنین اگر قرار دهیم

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b^k \cos[a^k \pi x]$$

داریم

$$\|f - f_n\|_\infty \le \sum_{k=n}^{\infty} b^k = \frac{b^n}{1-b} \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty \text{ وقتی که}$$

چون $\mathcal{C}(X)$ کامل است، پس f حد همگرای یکنواخت دنباله $\{f_n\}$ از توابع پیوسته است پس f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

حال نشان می‌دهیم f در هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر نیست. فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ نقطه‌ای ثابت است. برای $n \in \mathbb{N}$ و $h > 0$ عبارت زیر را درنظر می‌گیریم

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} b^k \frac{\cos[a^k \pi (x+h)] - \cos[a^k \pi x]}{h}$$
$$+ \sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{\cos[a^k \pi (x+h)] - \cos[a^k \pi x]}{h} = S_n + R_n$$

با توجه به قضیه مقدار میانگین، عدد $h' \in (0, h)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{\cos[a^k \pi (x+h)] - \cos[a^k \pi x]}{h} = -a^k \pi \sin[a^k \pi (x + h')] \qquad (1)$$

قدر مطلق طرف راست (1) کوچکتر یا مساوی $a^k \pi$ است، پس

$$(۲)\qquad |S'_n| \le \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k \pi = \pi \frac{a^n b^n - 1}{ab-1} < \frac{\pi a^n b^n}{ab-1}$$

قرار می‌دهیم

$$a^n x = \alpha_n + \beta_n$$

که در آن α_n یک عدد صحیح است و $-\frac{1}{2} \le \beta_n < \frac{1}{2}$. فرض کنید

$$h_n = \frac{1-\beta_n}{a^n}$$

چون $\frac{1}{2} < 1-\beta_n \le \frac{3}{2}$ داریم $\frac{3}{2a^n} \geqslant \frac{1-\beta_n}{a^n} > \frac{1}{2a^n}$ و بنابراین

$$\frac{2a^n}{3} \le \frac{1}{h_n} < 2a^n$$

حال $|R_n|$ را تخمین می‌زنیم. برای $k \geqslant n$ ،

$$a^k \pi (x+h_n) = a^{k-n} a^n \pi (x+h_n)$$

$$= a^{k-n} \pi (a^n x + 1 - \beta_n) = a^{k-n} \pi (1+\alpha_n)$$

چون a فرد است، تساویهای زیر برقرار می‌باشد:

$$\cos[a^k \pi (x+h_n)] = \cos[a^{k-n} \pi (1+\alpha_n)] = (-1)^{1+\alpha_n}$$

همچنین داریم

$$-\cos[\pi a^k x] = -\cos[\pi a^{k-n} a^n x] = -\cos[\pi a^{k-n} (\alpha_n + \beta_n)]$$

$$= -\cos[\pi a^{k-n} \alpha_n] \cos[\pi a^{k-n} \beta_n]$$

$$= (-1)^{1+\alpha_n} \cos[\pi a^{k-n} \beta_n]$$

با قرار دادن $h = h_n$ ، $|R_n|$ عبارت است از

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{(-1)^{1+\alpha_n} + (-1)^{1+\alpha_n} \cos[\pi a^{k-n} \beta_n]}{h_n} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^{1+\alpha_n}}{h_n} \right| \sum_{k=n}^{\infty} b^k (1 + \cos[\pi a^{k-n} \beta_n]) \geqslant \frac{b^n}{h_n} \geqslant \frac{2a^n b^n}{3}$$

(زیرا $\cos \pi \beta_n \geqslant 0$). تخمین فوق برای $|R_n|$ را با (۲) ترکیب می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| \geqslant |R_n| - |S'_n|$$

$$> \frac{2a^n b^n}{3} - \frac{\pi a^n b^n}{ab-1} = (ab)^n \left[\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right]$$

چون $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ بنابراین $\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)$ یک عدد ثابت مثبت است و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| = \infty$$

چون $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ ، در نتیجه طرف چپ رابطه فوق مشتق راست f در x است که بینهایت شده است. پس f در هیچ عدد حقیقی x ای مشتق پذیر نیست.

۶. خانواده های هم‌پیوسته توابع

می‌دانیم که هر دنباله کراندار از اعداد مختلط شامل زیر دنباله ای همگرا است (آنالیز I) حال طبیعی است که سؤال فوق را برای دنباله‌های توابع نیز مطرح کنیم یعنی آیا هر دنباله کراندار از توابع دارای زیر دنباله‌ای همگرا است؟

برای دنباله‌های توابع دو نوع کرانداری می‌توان مطرح کرد.

۱.۶ تعریف. فرض کنید (f_n) دنباله ای از توابع تعریف شده بر مجموعه E است. گوئیم (f_n) روی E کراندار نقطه وار است هرگاه برای هر $x\in E$ دنباله $\{f_n(x)\}$ کراندار باشد، یعنی تابع با مقدار متناهی φ روی E وجود داشته باشد بطوری که

$$|f_n(x)| < \varphi(x) \qquad x\in E\,,\ n=1,2,\dots$$

گوئیم (f_n) روی E بطور یکنواخت کراندار است هرگاه عددی مانند M وجود داشته باشد بطوری که برای هر $n=1,2,\dots$ و هر $x\in E$

$$|f_n(x)| < M$$

حال اگر (f_n) روی E کراندار نقطه وار باشد و E_1 زیر مجموعه شمارش‌پذیری از E، همواره می‌توان زیر دنباله ای مانند (f_{n_k}) از دنباله (f_n) یافت بطوری که $\{f_{n_k}(x)\}$ روی E_1 همگرا است. این حکم با کمک فرایند قطری که در قضایای بعد مطرح می‌شود ثابت می‌گردد.

بهر حال، حتی اگر (f_n) دنباله ای بطور یکنواخت کراندار از توابع پیوسته روی مجموعه

فشرده E باشد لزومی ندارد که دارای زیردنباله ای باشد که همگرای نقطه وار روی E است.

۲.۶ مثال. فرض کنید

$$f_n(x) = \sin nx \qquad 0 \leq x \leq 2\pi \ , \ n=1,2,\dots$$

نشان می دهیم دنباله $(\sin nx)$ دارای هیچ زیردنباله همگرایی روی $[0,2\pi]$ نیست.

فرض کنید دنباله $\{n_k\}$ وجود دارد به طوری که $\{\sin n_k x\}$ برای هر $x \in [0,2\pi]$ همگرا است (فرض خلف). بنابراین $\lim_{k\to\infty} \sin n_k x$ و $\lim_{k\to\infty} \sin n_{k+1} x$ یکسان است. پس

$$\lim_{k\to\infty}(\sin n_{k+1}x - \sin n_k x) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$

در نتیجه

$$\lim_{k\to\infty}(\sin n_{k+1}x - \sin n_k x)^2 = 0$$

طبق قضیه همگرایی کراندار لبگ (۳.۳)

$$(1) \qquad \lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}(\sin n_{k+1}x - \sin n_k x)^2 = 0$$

(توضیح: قضیه همگرایی کراندار لبگ بیان می کند که: اگر (f_n) دنباله ای کراندار نقطه وار روی مجموعه E بوده و $f_n \xrightarrow{P.} f$ و f_n ها و f انتگرال پذیر روی E باشند آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f$$

حالتی که $E=[a,b]$ در قضیه ۳.۳ مطرح و اثبات گردیده است). اما با محاسبه ساده ای داریم

$$\int_0^{2\pi}(\sin n_{k+1}x - \sin n_k x)^2 dx = \int_0^{2\pi}\sin^2 n_{k+1}x\,dx + \int_0^{2\pi}\sin^2 n_k x\,dx - 2\int_0^{2\pi}\sin n_k x \sin n_{k+1}x\,dx$$

$$= 2\pi$$

که با نتیجه بدست آمده در (۱) متناقض است. پس دنباله $(\sin nx)$ بر $[0,2\pi]$ دارای هیچ زیردنباله همگرایی نیست گرچه دنباله فوق کراندار نقطه وار است. حتی دنباله فوق بطور یکنواخت کراندار است زیرا

$$|\sin nx| \leq 1 \qquad x \in [0,2\pi] \ , \ n=1,2,\dots$$

سؤال دیگری که مطرح می شود این است که: آیا هر دنباله همگرایی دارای یک زیر دنباله همگرای یکنواخت است؟

در مثال زیر نشان می دهیم که حتی اگر دنباله (f_n) بطور یکنواخت کراندار و همگرای نقطه‌وار روی یک مجموعه فشرده E باشد، لزومی ندارد که دارای زیردنباله‌ای روی E همگرای یکنواخت باشد.

در مثال ۲ از ۴.۱.۵ دنباله‌ای مطرح گردیده است که عناصر دنباله توابعی کراندارند و دنباله همگرای نقطه‌وار است اما می توان به سادگی دید که این دنباله بطور یکنواخت کراندار نیست.

اما به سادگی می توان بررسی نمود که یک دنباله همگرای یکنواخت از توابع کراندار حتماً بطور یکنواخت کراندار است.

۳.۶ مثال. فرض کنید

$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2} \qquad 0\le x\le 1,\quad n=1,2,\dots$$

واضح است که برای $0\le x\le 1$،

$$|f_n(x)|\le 1$$

پس (f_n) روی $[0,1]$ بطور یکنواخت کراندار است. همچنین

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \qquad 0\le x\le 1$$

پس (f_n) بطور نقطه‌وار همگرا به صفر است. اما به ازای هر n داریم $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1/n^2}{1/n^2+0}=1$ پس

$$M_{n_k}=\sup|f_{n_k}(x)-\overset{0}{\cancel{f(x)}}|\ge 1$$

پس $M_{n_k}\not\to 0$ بنابراین هیچ زیر دنباله همگرای یکنواخت روی $[0,1]$ ندارد.

مفهومی که برای ارتباط فوق مورد نیاز است، مفهوم هم‌پیوستگی است.

۴.۶ **تعریف**. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از توابع مختلط f تعریف شده روی مجموعهٔ E در فضای متریک X هم پیوسته روی E نامیده می شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ موجود باشد بطوری که وقتی $d(x, y) < \delta$ برای $x \in E$ و $y \in E$ داشته باشیم

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad f \in \mathcal{F}$$

که در آن d متریک فضای متری X است.

واضح است که هر عضو یک خانوادهٔ هم پیوسته، پیوسته یکنواخت است. مثال ۳.۶ دنباله ای از توابع را نشان می دهد که هم پیوسته نیستند (تمرین).

۵.۶ **قضیه**. اگر (f_n) دنباله ای نقطه وار کراندار از توابع مختلط تعریف شده بر مجموعهٔ شمارش پذیر E باشد آنگاه (f_n) دارای زیر دنباله ای مانند (f_{n_k}) است بطوری که $\{f_n(x)\}$ برای هر $x \in E$ همگرا می باشد.

اثبات. مجموعهٔ E را می توان به صورت $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ نمایش داد. چون دنبالهٔ $\{f_n(x_1)\}$ کراندار است پس دارای زیر دنباله ای همگرا است که آن را با $(f_{1,k})$ نمایش می دهیم. پس $\{f_{1,k}(x_1)\}$ وقتی $k \to \infty$ همگرا است. حال دنبالهٔ $\{f_{1n}(x_2)\}$ کراندار است بنابراین دارای یک زیر دنباله همگرا مانند $(f_{2,k})$ است که $\{f_{2,k}(x_2)\}$ وقتی $k \to \infty$ همگرا است. به همین ترتیب الی آخر.

حال دنباله های $S_1, S_2, S_3, \ldots$ که توسط آرایه زیر نمایش می دهیم وجود دارد که دارای خواص زیر می باشد:

$$\begin{array}{lccccc}
S_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots \\
S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots \\
S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots \\
\multicolumn{6}{c}{- - - - - - - - - - - - - - -}
\end{array}$$

الف) S_n زیر دنباله S_{n-1} برای $n = 2, 3, 4, \ldots$ است.

ب) وقتی $k\to\infty$، $\{f_{n,k}(x_n)\}$ همگرا است (کراندار بودن $\{f_n(x_n)\}$ امکان انتخاب S_n را به روش فوق می دهد.)

ج) ترتیبی که توابع در هر دنباله مشاهده شده است یکسان می باشد یعنی اگر یکی از توابع در S_1 پیشتر از دیگری باشد، آنگاه همان رابطه در هر S_n برقرار است بجز اینکه یکی از آنها یا دیگری حذف شود. بنابراین وقتی در آرایه فوق از یک سطر به سطر زیرآن می رویم توابع بسمت چپ می توانند حرکت کنند اما هرگز به راست نمی روند.

حال دنباله

$$S:\ f_{1,1}\quad f_{2,2}\quad f_{3,3}\quad f_{4,4}\ \dots$$

را درنظر می گیریم. طبق (ج) دنباله S (بجز احتمالاً $n-1$ جمله اول آن) زیردنباله‌ای از S_n برای $n=1,2,3,\dots$ است. شرط (ب) نتیجه می دهد که $\{f_{n,n}(x_i)\}$ وقتی $n\to\infty$ برای هر $x_i\in E$ همگرا است.

۶.۶ قضیه. فرض کنید K یک فضای متریک فشرده بوده و $f_n\in\mathcal{C}(K)$ برای $n=1,2,\dots$. اگر (f_n) روی K همگرای یکنواخت باشد، آنگاه (f_n) روی K هم پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. چون (f_n) همگرای یکنواخت است پس

$$\exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ \forall n>N\ \forall x\in K,\ \|f_n-f_N\|_\infty\le\varepsilon$$

ازطرفی چون توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده، پیوسته یکنواخت می باشند، پس

$$\exists\delta>0\ \text{s.t.}\ \forall 1\le i\le N,\ \forall x,y\in K,\ d(x,y)<\delta\Rightarrow|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon$$

حال اگر $n>N$ و $d(x,y)<\delta$ درنتیجه

$$|f_n(x)-f_n(y)|\le|f_n(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_n(y)|<3\varepsilon$$

پس (f_n) یک خانواده هم پیوسته از توابع روی K هستند.

۷.۶ قضیه. فرض کنید K فشرده و برای $n=1,2,\dots$، $f_n\in\mathcal{C}(K)$. اگر (f_n) بطور نقطه‌ای کراندار و روی K هم پیوسته باشد، آنگاه

الف) (f_n) روی k بطور یکنواخت کراندار است.

ب) (f_n) شامل یک زیردنبالهٔ همگرای یکنواخت است.

اثبات. الف) فرض کنید $\epsilon=1$،

$$\exists\, \delta>0 \ \text{s.t}\ \forall n,\ \forall x,y\in k\ ,\ d(x,y)<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|<1$$

چون k فشرده است، بنابراین تعداد متناهی نقطهٔ $p_1,\dots,p_r$ در k وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\in k$ حداقل یک p_i می‌توان داشت که $d(x,p_i)<\delta$، از طرفی

$$k\subset V(p_1,\delta)\cup V(p_2,\delta)\cup\dots\cup V(p_r,\delta)$$

حال با توجه به کراندار نقطه‌ای بودن دنبالهٔ (f_n) داریم

$$\exists M_i<\infty \quad \text{s.t}\quad |f_n(p_i)|<M_i \qquad \forall n$$

قرار می‌دهیم $M=\max\{M_1,\dots,M_r\}$ پس

$$\forall x\in k\ \ \exists p_i\in k \quad \text{s.t}\quad x\in V(p_i,\delta)$$

در نتیجه $d(x,p_i)<\delta$ پس

$$|f_n(x)-f_n(x_i)|<1$$

$$\Rightarrow \quad |f_n(x)|<|f_n(p_i)|+1$$

$$<M_i+1\le M+1$$

بنابراین (f_n) روی k بطور یکنواخت کراندار است.

ب) می‌دانیم که هر فضای متریک فشرده دارای یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر چگال است. چون k فشرده است بنابراین زیرمجموعهٔ E از k وجود دارد به طوری که E شمارش‌پذیر و چگال در k است. چون دنبالهٔ (f_n) بر E نقطه به نقطه کراندار است پس از قضیه ۵.۶ نتیجه می‌شود که دنبالهٔ (f_n) دارای یک زیردنبالهٔ (f_{n_i}) است که روی E همگرا است.

نشان می‌دهیم زیردنبالهٔ (f_{n_i}) بر k بطور یکنواخت همگرا است. برای این منظور قرار می‌دهیم $g_i=f_{n_i}$ و ثابت می‌کنیم (g_i) روی k همگرای یکنواخت است.

فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است:

$$\exists\, \delta>0 \ \text{s.t}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x,y\in k\ ,\ d(x,y)<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|<\epsilon$$

قرار می‌دهیم

$$V(x,\delta)=\{y\in K \mid d(x,y)<\delta\}$$

چون E در K چگال است و K فشرده، تعداد متناهی نقطه $x_1,\dots,x_m$ در E وجود دارد بطوری که

$$K\subset V(x_1,\delta)\cup V(x_2,\delta)\cup\dots\cup V(x_m,\delta)$$

زیرا E را می‌توان به صورت $\{a_1,a_2,\dots\}$ نوشت. داریم

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}V(x_i,\delta)$$

بنابراین

$$\exists l\in\mathbb{N},\quad K\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}V(x_i,\delta)$$

حال چون دنباله $\{g_i\}$ به ازای x_1 همگراست پس

$$\exists N_1\quad \forall i,j\geq N_2,\ |g_i(x_1)-g_j(x_1)|<\varepsilon$$

و به همین ترتیب برای x_2 و بطور کلی

$$\exists N_p\quad \forall i,j>N_p,\ |g_i(x_p)-g_j(x_p)|\leq\varepsilon$$

قرار می‌دهیم

$$N=\max\{N_1,N_2,\dots,N_p\}$$

هرگاه $x=x_1,x_2,\dots,x_p$ و $i,j\geq N$ داریم

$$|g_i(x)-g_j(x)|\leq\varepsilon$$

حال اگر x یک نقطه دلخواه از K باشد داریم (فرض $x\in V(x_3,\delta)$)

$$|g_i(x)-g_j(x)|\leq|g_i(x)-g_i(x_3)|+|g_i(x_3)-g_j(x_3)|$$
$$+|g_j(x)-g_j(x)|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

بنابراین نشان دادیم که

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t}\ \forall n\geq N,\ \forall x\in P,\ |g_i(x)-g_j(x)|<3\varepsilon$$

پس $\{g_i\}$ یک دنباله همگرای یکنواخت است.

۷. قضیه استون - وایراشتراوس

۱.۷ قضیه وایراشتراوس. اگر f تابع مختلط پیوسته‌ای روی $[a,b]$ باشد آنگاه دنباله P_n از چندجمله‌ایها وجود دارد بطوری که

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x)$$

و حد همگرایی روی $[a,b]$ یکنواخت است. اگر f تابعی حقیقی باشد می‌توان P_nها را حقیقی در نظر گرفت.

اثبات. بدون کم شدن از کلیت حکم می‌توان فرض کرد $[a,b]=[0,1]$ و همچنین فرض کرد $f(0)=f(1)=0$، زیرا اگر قضیه در این حالت ثابت شود، تعریف می‌کنیم

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)] \qquad 0\leq x\leq 1$$

داریم $g(0)=g(1)=0$ و اگر g حد همگرایی دنباله‌ای از چندجمله‌ایها بطور یکنواخت باشد. $P_n \xrightarrow{u} g$ در این صورت

$$P_n-\{-f(0)-x[f(1)-f(0)]\}\to g-\{-f(0)-x[f(1)-f(0)]\}$$

و داریم

$$f(x)=g(x)-\{-f(0)-x[f(1)-f(0)]\}$$

و چندجمله‌ایهای مورد نظر عبارتند از $P_n-\{-f(0)-x[f(1)-f(0)]\}$.

از طرفی $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ پیوسته است. قرار می‌دهیم $x=a+(b-a)t$ و $g(t)=f(a+(b-a)t)$. اگر $x=a$ داریم $t=0$ و اگر $x=b$ داریم $t=1$ پس $g:[0,1]\to \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ و همچنین $f(a)=g(0)$ و $f(b)=g(1)$. پس اگر قضیه را برای g در این حالت ثابت کنیم آنگاه حکم برای f نیز برقرار است زیرا $f-g$ یک چندجمله‌ای است.

با توجه به توضیحات فوق فرض می‌کنیم $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته است و خارج از فاصله $[0,1]$ مقدار f صفر باشد. بنابراین f روی خط حقیقی پیوسته یکنواخت است.

برای هر $n\in\mathbb{N}$ چندجمله‌ای $Q_n(x)$ تعریف شده بر $[-1,1]$ توسط

$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n$$

را در نظر می‌گیریم که در آن ضرایب c_n به قسمی اختیار شده اند که

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1$$

پس $c_n = \dfrac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx}$. حال ادعا می‌کنیم که

$$c_n < \sqrt{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

زیرا

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx$$
$$= 2\left\{\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx + \int_{1/\sqrt{n}}^{1}(1-x^2)^n dx\right\}$$
$$> 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx$$

از طرفی اگر تابع $h(x) = (1-x^2)^n - 1 + nx^2$ را در نظر بگیریم داریم

$$h'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1} + 2nx$$
$$= 2nx\left(1-(1-x^2)^{n-1}\right)$$

وقتی $0 < x < 1$ داریم $h'(x) > 0$ پس h بر $(0,1)$ صعودی است و داریم

$$x > 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) = 0$$
$$\Rightarrow (1-x^2)^n - 1 + nx^2 \geq 0 \qquad 0 < x < 1$$
$$\Rightarrow (1-x^2)^n \geq 1 - nx^2 \qquad 0 < x < 1$$

حال از رابطه اخیر در $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx > 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx$$
$$\geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)dx$$
$$= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

پس

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

پس $c_n < \sqrt{n}$.

ادعا: به ازای هر $\delta > 0$ و هر x در رابطه $\delta \leq |x| \leq 1$ داریم

$$Q_n(x) \xrightarrow{u} 0$$

$$\delta \le |x| \le 1 \Rightarrow \delta^2 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le 1-x^2 \le 1-\delta^2$$

از طرفی طبق (۱)، $c_n < \sqrt{n}$ پس

$$c_n (1-x^2)^n \le \sqrt{n} (1-\delta^2)^n \qquad (۲)$$

بنابراین

$$Q_n(x) \le \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \qquad \forall x, \quad \delta \le |x| \le 1$$

از طرفی

$$\sqrt{n}(1-\delta^2)^n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{1-\delta^2}\right)^n}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\delta^2}{1-\delta^2}\right)^n}\right)$$

$$= \frac{n^{1/2}}{(1+p)^n} \longrightarrow 0$$

زیرا $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$ برای هر $\alpha > 0$ و هر $p > 0$. پس در عبارت بالا داریم

$$\alpha = \frac{1}{2} > 0, \qquad p = \frac{\delta^2}{1-\delta^2} > 0$$

و بنابراین $\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \xrightarrow{n} 0$. در نتیجه از (۲) داریم: وقتی $\delta \le |x| \le 1$

$$Q_n = c_n (1-x^2)^n \xrightarrow{u} 0$$

حال برای هر $n = 1, 2, \ldots$ و هر $0 \le x \le 1$ قرار می‌دهیم

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t)\, dt$$

نشان می‌دهیم $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای برحسب x است:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t)\, dt \\ &= \int_{-1}^{-x} f(x+t) Q_n(t)\, dt + \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t)\, dt + \int_{1-x}^{1} f(x+t) Q_n(t)\, dt \\ &= 0 + \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\, Q_n(t)\, dt + 0 \qquad (f(t)=0,\ t \notin [0,1]) \\ &= \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t)\, dt \\ &= \int_{0}^{1} f(t)\, Q_n(t-x)\, dt \end{aligned}$$

پس P_n یک چند جمله‌ای از x است.

همچنین

$$
\begin{aligned}
P_n(x)-f(x) &= \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt - f(x)\\
&= \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt - f(x)\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt\\
&= \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt - \int_{-1}^{1} f(x)Q_n(t)\,dt\\
&= \int_{-1}^{1} \{f(x+t)-f(x)\}Q_n(t)\,dt
\end{aligned}
$$

چون $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته است پس روی $[0,1]$ پیوسته یکنواخت می‌باشد و در نتیجه کراندار است. پس

$$M=\sup\{|f(t)| \ : \ t\in[0,1]\}$$

و

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta'>0 \text{ s.t } \forall x,y\in[0,1],\quad |x-y|<\delta' \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

قرار می‌دهیم $\delta=\min(1,\delta')$ داریم

$$
\begin{aligned}
|P_n(x)-f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}[f(x+t)-f(x)]Q_n(t)\,dt\right|\\
&\le \int_{-1}^{-\delta}|f(x+t)-f(x)||Q_n(t)|\,dt\\
&\quad+\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)||Q_n(t)|\,dt+\int_{\delta}^{1}|f(x+t)-f(x)||Q_n(t)|\,dt
\end{aligned}
$$

اما

$$\int_{-1}^{-\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\,dt \le 2M\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)\,dt$$

با توجه به:

$$-1<t<-\delta \Rightarrow |t|>\delta \Rightarrow \delta<|t|=|x+t-x|<1$$

$$\Rightarrow Q_n(t)\le\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$$

پس

$$\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)\,dt \le \int_{-1}^{-\delta}\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n\,dt \le \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$$

بنابراین

$$(۴)\qquad \int_{-1}^{-\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\,dt < 2M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$$

و

$$\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\,dt \le \int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}Q_n(t)\,dt$$

با توجه به پیوستگی تابع f داریم

$$x+t-x=t \quad , \quad -\delta \leq t \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |t| \leq \delta \, ,$$

و

$$\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt + \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt = 1$$
$$\Rightarrow \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt \leq 1 \qquad (Q_n(t) \geq 0)$$

پس

$$(۴) \qquad \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t)-f(x)|\, Q_n(t)\,dt \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt \leq \frac{\epsilon}{2}$$

بعلاوه

$$\int_{\delta}^{1} |f(x+t)-f(x)|\, Q_n(t)\,dt \leq 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt$$

چون $1 > t > \delta$ پس $Q_n(t) \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$ و بنابراین

$$\int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$$

پس

$$(۵) \qquad \int_{\delta}^{1} |f(x+t)-f(x)|\, Q_n(t)\,dt \leq 2M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$$

حال با توجه به (۳)، (۴)، و (۵)

$$|P_n(x)-f(x)| \leq 4M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2}$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ثابت کردیم که

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; s.t. \;\; \forall n \geq N, \quad |P_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

یعنی $P_n \xrightarrow{u} f$ روی $[0,1]$ و حکم تمام است.

تمرین. با استفاده از نرم افزارهای مناسب نمودار Q_n را برای چند مقدار n رسم کنید.

تمرین. شرط پیوستگی یکنواخت f برای نتیجه همگرایی یکنواخت (P_n) الزامی است. چرا؟

۲.۷ نتیجه. برای هر فاصله به صورت $[-a,a]$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای حقیقی مانند (P_n) وجود دارد بطوری که $P_n(0)=0$ و $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$ بطور یکنواخت روی $[-a,a]$.

اثبات. طبق قضیه ۱.۷، دنباله (P_n^*) از چندجمله‌ایهای حقیقی وجود دارد بطوری که روی $[-a,a]$ بطور یکنواخت به تابع $|x|$ همگرا است. بعلاوه

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(0)=0$$

حال چندجمله‌ایهای

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0) \qquad n=1,2,3,\ldots$$

چندجمله‌ایهای مطلوب است.

در بخش فوریه کاربردهای فراوانی از قضیه وایرشتراوس را خواهیم دید. برای اتمام بحث حاضر، اثبات تعمیم قضیه ۱.۷ که توسط استون ارائه گردیده است، نخست جبر توابع مختلط را در نظر می‌گیریم.

۳.۷ تعریف. خانواده $\mathcal{A}$ از توابع مختلط تعریف شده بر مجموعه E که جبر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $f\in\mathcal{A}$، $g\in\mathcal{A}$ و هر عدد ثابت مختلط c

i) $f+g\in\mathcal{A}$

ii) $fg\in\mathcal{A}$

iii) $cf\in\mathcal{A}$

یعنی $\mathcal{A}$ تحت جمع، ضرب و ضرب اسکالر بسته باشد. همچنین می‌توان جبر توابع حقیقی را در نظر گرفت. در این وضعیت شرط (iii) برای هر عدد حقیقی c بیان می‌شود.

اگر $\mathcal{A}$ دارای این خاصیت باشد که حد همگرایی یکنواخت دنباله‌های (f_n) از عناصر $\mathcal{A}$ عضوی از $\mathcal{A}$ باشد یعنی وقتی $f_n\in\mathcal{A}$ و $f_n \xrightarrow{u} f$ روی E آنگاه $f\in\mathcal{A}$. گوییم $\mathcal{A}$ بطور یکنواخت بسته است.

فرض کنید $\mathcal{B}$ مجموعهٔ تمام توابع باشد که حد همگرای یکنواخت دنباله‌هایی از عناصر $\mathcal{A}$ باشند، آنگاه $\mathcal{B}$ را بستار یکنواخت $\mathcal{A}$ نامند. واضح است که همواره $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

به عنوان مثال، مجموعه تمام چندجمله‌ایها یک جبر است و قضیه ۱.۷ بیان می‌کند که مجموعه تمام توابع پیوسته روی $[a,b]$ بستار یکنواخت مجموعهٔ چندجمله‌ایها روی $[a,b]$ است.

<u>۴.۷ قضیه</u>. فرض کنید $\mathcal{B}$ بستار یکنواخت جبر $\mathcal{A}$ از توابع کراندار است. آنگاه $\mathcal{B}$ یک جبر بسته یکنواخت است.

<u>اثبات</u>. اگر $f \in \mathcal{B}$ و $g \in \mathcal{B}$، آنگاه

$$\exists (f_n) \subseteq \mathcal{A} \quad s.t. \quad f_n \xrightarrow{u} f$$

$$\exists (g_n) \subseteq \mathcal{A} \quad s.t. \quad g_n \xrightarrow{u} g$$

فرض $\epsilon > 0$ داده شده است، پس

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \ s.t. \ \ \forall m,n \geq N_1 \ , \forall x \in E \ , \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \ s.t. \ \ \forall m,n \geq N_2 \ , \forall x \in E \ , \ \ |g_n(x) - g_m(x)| < \epsilon/2$$

قرار می‌دهیم $N = \max\{N_1, N_2\}$. برای هر $m,n \geq N$ و هر $x \in E$

$$\begin{aligned}|(f_n+g_n)(x) - (f_m+g_m)(x)| &= |f_n(x) + g_n(x) - f_m(x) - g_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |g_n(x) - g_m(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

پس $f_n + g_n$ در شرط کشی صدق می‌کند. در نتیجه $f_n + g_n \xrightarrow{u} f+g$ یعنی $f+g \in \mathcal{B}$.
با توجه به کراندار بودن توابع در $\mathcal{A}$ بطور مشابه می‌توان ثابت کرد $fg \in \mathcal{B}$ و $cf \in \mathcal{B}$ (تمرین).
بنابراین $\mathcal{B}$ یک جبر است. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{B}$ همگرای یکنواخت به تابع f روی E باشد. بطور مستقیم می‌توان نتیجه گرفت که $f \in \mathcal{B}$. بنابراین $\mathcal{B}$ بطور یکنواخت بسته است.

<u>۵.۷ تعریف</u>. فرض کنید $\mathcal{A}$ خانواده توابع روی مجموعه E است. گوییم $\mathcal{A}$ نقاط مجموعه E

را جدا می‌کند هرگاه برای نقاط متمایز $x_1, x_2 \in E$ تابعی در $\mathcal{A}$ مانند f وجود داشته باشد بطوری که $f(x_1) \neq f(x_2)$.

اگر برای هر $x \in E$ تابعی مانند $g \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد بطوری که $g(x) \neq 0$ گوئیم $\mathcal{A}$ در هیچ نقطه E صفر نیست.

جبر تمام چندجمله‌ایها از یک متغیر دارای خاصیت فوق روی $\mathbb{R}$ است. جبر تمام چندجمله‌ایهای زوج بر $[-1,1]$ نقاط را جدا نمی‌کند زیرا برای هر تابع زوج f داریم $f(-x) = f(x)$.

۶.۷ <u>قضیه</u>. فرض کنید $\mathcal{A}$ جبر توابع روی مجموعه E است که نقاط E را جدا می‌کند و $\mathcal{A}$ در هیچ نقطه E صفر نیست. فرض کنید x_1، x_2 نقاط متمایزی در E است و c_1 و c_2 ثابت باشند (اگر $\mathcal{A}$ جبر حقیقی باشد c_1، c_2 حقیقی‌اند). آنگاه $\mathcal{A}$ دارای تابعی چون f است که

$$f(x_1) = c_1 \quad , \quad f(x_2) = c_2$$

<u>اثبات</u>. با توجه به فرضیات داده شده، $\mathcal{A}$ شامل توابعی مانند g، h و k است بطوری که

$$g(x_1) \neq g(x_2) \quad , \quad h(x_1) \neq 0 \quad , \quad k(x_2) \neq 0$$

قرار می‌دهیم

$$u = gk - g(x_1)k \quad , \quad v = gh - g(x_2)h$$

$u \in \mathcal{A}$ و $v \in \mathcal{A}$ و

$$u(x_1) = g(x_1)k(x_1) - g(x_1)k(x_1) = 0$$

$$v(x_2) = g(x_2)h(x_2) - g(x_2)h(x_2) = 0$$

$$u(x_2) = g(x_2)k(x_2) - g(x_1)k(x_2) = (g(x_2) - g(x_1))k(x_2) \neq 0$$

$$v(x_1) = g(x_1)h(x_1) - g(x_2)h(x_1) = (g(x_1) - g(x_2))h(x_1) \neq 0$$

قرار می‌دهیم

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$$

و $f \in \mathcal{A}$

$$f(x_1) = \frac{c_1 v(x_1)}{v(x_1)} + \frac{c_2 u(x_1)}{u(x_2)} = \frac{c_1 v(x_1)}{v(x_1)} = c_1$$

و

$$f(x_2) = \frac{c_1 v(x_2)}{v(x_1)} + \frac{c_2 u(x_2)}{u(x_2)} = \frac{c_2 u(x_2)}{u(x_2)} = c_2$$

۷.۷ قضیه : تعمیم استون از قضیه وایرشتراوس : فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر از توابع پیوسته حقیقی روی مجموعه فشرده K است. اگر $\mathcal{A}$ نقاط K را جدا کند و اگر $\mathcal{A}$ در هیچ نقطه‌ای از K صفر نشود، آنگاه بستار یکنواخت $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ شامل تمام توابع پیوسته حقیقی روی K است.

اثبات. اثبات در چهار مرحله انجام می‌پذیرد.

مرحله ۱ : اگر $f \in \mathcal{B}$ آنگاه $|f| \in \mathcal{B}$.

اثبات. قرار می‌دهیم

$$a = \sup |f(x)| \qquad x \in K$$

برای $\epsilon > 0$ داده شده، طبق نتیجه ۲.۷ اعداد حقیقی $c_1, \ldots, c_n$ وجود دارند بطوری که

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \epsilon \qquad -a \le y \le a$$

تابع $g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$ را در نظر بگیرید. چون $\mathcal{B}$ یک جبر است تابع g عضوی از $\mathcal{B}$ است. پس

$$\big| g(x) - |f(x)| \big| < \epsilon \qquad x \in K$$

چون $\mathcal{B}$ بطور یکنواخت بسته است، پس $|f| \in \mathcal{B}$.

مرحله ۲ : اگر $f \in \mathcal{B}$ و $g \in \mathcal{B}$ آنگاه $\max(f,g) \in \mathcal{B}$ و $\min(f,g) \in \mathcal{B}$.

اثبات. چون $\mathcal{B}$ جبر است پس $f-g \in \mathcal{B}$ و طبق مرحله اول $|f-g| \in \mathcal{B}$. پس

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in \mathcal{B} \quad , \quad \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2} \in \mathcal{B}$$

با تکرار مرحله فوق، نتیجه به هر مجموعهٔ متناهی از توابع تعمیم می‌یابد. اگر $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{B}$ آنگاه $\max(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{B}$ و $\min(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{B}$.

<u>مرحله ۳</u>. به ازای تابع حقیقی f پیوسته روی K داده شده و نقطه $x \in K$ و $\epsilon > 0$،
تابع $g_x \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که $g_x(x) = f(x)$ و

$$g_x(t) > f(t) - \epsilon \qquad t \in K$$

<u>اثبات</u>. به ازای هر $y \in K$ تابع $h_y \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که

$$h_y(y) = f(y)$$
$$h_y(x) = f(x)$$

زیرا $\mathcal{A}$ جبری است که نقاط K را جدا می‌کند و چون $\mathcal{B}$ شامل $\mathcal{A}$ است پس $\mathcal{B}$ نیز نقاط را از هم جدا می‌کند (پس اگر x و y نقاط K باشند و c_1 و c_2 اعداد ثابت، آنگاه تابعی مانند f وجود دارد که $f(x) = c_1$ و $f(y) = c_2$ و $f(x)$ و $f(y)$ مقادیر معلومی است) پس تابعی در $\mathcal{A}$ و در نتیجه در $\mathcal{B}$ مانند h_y با شرایط بالا وجود دارد. چون h_y پیوسته است پس از پیوستگی f نتیجه می‌شود $h_y - f$ پیوسته است. از طرفی $h_y(y) - f(y) = 0$. پس همسایگی $V(y, \delta)$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in V(y, \delta)$

$$|h_y(t) - f(t) - 0| < \epsilon$$

پس برای $t \in V(y, \delta)$ داریم

$$h_y(t) > f(t) - \epsilon$$

از طرفی $K \subset \bigcup_{y \in K} V(y, \delta_y)$. چون K فشرده است پس

$$\exists y_1, y_2, \dots, y_N \quad s.t \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{N} V(y_i, \delta_{y_i})$$

متناظر به هر y_i تابع h_{y_i} با خواص بالا وجود دارد. قرار می‌دهیم

$$g_x = \max\{h_{y_1}, h_{y_2}, \dots, h_{y_N}\}$$

با توجه به مرحله ۲، $g_x \in \mathcal{B}$. و

$$g_x(x) = \max\{h_{y_1}(x), \dots, h_{y_N}(x)\}$$
$$= \max\{f(x), \dots, f(x)\} = f(x)$$

و اگر $t \in K$ آنگاه

$$\exists j \in \{1, \dots, N\} \quad s.t \quad t \in V(y_j, \delta_{y_j})$$

پس $h_{y_j}(t) > f(t) - \varepsilon$ بنابراین

$$\max\{h_{y_1}(t), \dots, h_{y_N}(t)\} = g_x(t) > f(t) - \varepsilon$$

مرحله ۴. اگر f تابعی پیوسته بر مجموعهٔ فشردهٔ K باشد و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، آنگاه تابعی چون $h \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad x \in K$$

چون $\mathcal{B}$ بطور یکنواخت بسته است، نتیجهٔ بالا معادل حکم داده شده در قضیه است.

اثبات. به ازای هر $x \in K$ تابع g_x وجود دارد به طوری که

$$g_x(x) = f(x) \quad , \quad g_x(t) > f(t) - \varepsilon \quad t \in K$$

با توجه به مرحله ۳ داریم:

$$(g_x - f)(x) = 0 \Rightarrow \exists V(x, \delta) \ \text{s.t.}\ t \in V(x, \delta) \Rightarrow |g_x(t) - f(t) - 0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < g_x(t) - f(t) < \varepsilon$$

بنابراین همسایگی $V(x, \delta)$ وجود دارد به طوری که

$$(*) \qquad t \in V(x, \delta_x) \Rightarrow g_x(t) < f(t) + \varepsilon$$

از $K \subset \bigcup_{x \in K} V(x, \delta_x)$ وجود دارد $x_1, x_2, \dots, x_p$ به طوری که

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} V(x_i, \delta_i)$$

قرار می‌دهیم

$$g_x = \min\{g_{x_1}, g_{x_2}, \dots, g_{x_p}\}$$

زیرا

$$\left.\begin{array}{l} g_{x_1}(t) > f(t) - \varepsilon \\ \vdots \\ g_{x_p}(t) > f(t) - \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow g_x(t) = \min\{g_{x_1}, \dots, g_{x_p}\} > f(t) - \varepsilon$$

پس

$$(**) \qquad g_x(t) > f(t) - \varepsilon$$

از $(*)$ و $(**)$ داریم $-\varepsilon < g_x(t) - f(t) < \varepsilon$. قرار می‌دهیم $h = g_x$ و حکم تمام است.

۸.۷ توضیح. درحالتی که $\mathcal{A}$ جبر مختلط باشد قضیه ۷.۷ لزوماً برقرار نیست ولی تحت شرط اضافی خود الحاق بودن $\mathcal{A}$ برقرار می‌شود که در قضیه ۹.۸ بررسی گردیده است.
جبر $\mathcal{A}$ را خود الحاق نامیم هرگاه برای هر $f \in \mathcal{A}$ مزدوج مختلط آن که با $\bar{f}$ نمایش می‌دهیم و توسط $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ تعریف می‌شود متعلق به $\mathcal{A}$ باشد.

۹.۷ قضیه. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر از توابع پیوسته روی مجموعهٔ فشردهٔ K است که خود الحاق است و $\mathcal{A}$ نقاط K را جدا می‌کند و در هیچ نقطه‌ای از K صفر نیست. آنگاه بستار یکنواخت $\mathcal{A}$ که با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم شامل تمام توابع مختلط پیوسته روی K است. به عبارت دیگر $\mathcal{A}$ در $\mathcal{C}(K)$ چگال است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ مجموعهٔ توابع حقیقی متعلق به $\mathcal{A}$ تعریف شده روی K است.
اگر $f \in \mathcal{A}$ آنگاه $\bar{f} \in \mathcal{A}$ پس $f + \bar{f} \in \mathcal{A}$ درنتیجه $2\,\mathrm{Re}(f) \in \mathcal{A}$. پس

$$\mathrm{Re}(f) \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$$

حال اگر $f_1 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ و $f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ و $c \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$f_1, f_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow f_1 f_2 \in \mathcal{A} \quad \& \quad f_1 + c f_2 \in \mathcal{A}$$

از طرفی $f_1 f_2$ حقیقی است پس $f_1 f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. همچنین $f_1 + c f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. پس $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ یک جبر است. $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ یک جبر از توابع حقیقی پیوسته بر K است.

فرض کنید $x_1 \in K$ ، $x_2 \in K$ و $x_1 \neq x_2$. چون $\mathcal{A}$ نقاط K را جدا می‌کند

$$\exists f \in \mathcal{A} \ \text{ s.t. } \ f(x_1) = 1, \ f(x_2) = 0$$

قرار می‌دهیم $u = \mathrm{Re}(f)$ ، داریم $u \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ و

$$u(x_1) = \mathrm{Re}(f(x_1)) = 1$$

$$u(x_2) = \mathrm{Re}(f(x_2)) = 0$$

پس $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ نقاط K را جدا می‌کند.

فرض کنید $x^* \in K$ نقطهٔ دلخواهی است. چون $\mathcal{A}$ در هیچ نقطهٔ K صفر نمی‌شود پس

$$\exists g \in \mathcal{A} \ \text{ s.t. } \ g(x^*) \neq 0$$

فرض کنید $g(x)=u(x)+iv(x)$. قرار می‌دهیم

$$f^*(x)=\operatorname{Re}[g(x^*)\,(u(x)-iv(x))]$$
$$=u(x^*)u(x)+v(x^*)v(x)\in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$$

و

$$f^*(x^*)=u^2(x^*)+v^2(x^*)\neq 0$$

پس $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ در هیچ نقطه‌ای از K صفر نمی‌شود. بنابراین $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ در شرایط قضیه ۷.۷ صدق می‌کند حال اگر f یک تابع پیوستهٔ مختلط بر K باشد و $f=u+iv$. آنگاه u و v توابع پیوسته حقیقی اند پس دنباله‌های (u_n) و (v_n) از توابع در $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ وجود دارند بطوریکه

$$u_n \xrightarrow{u.} u \quad , \quad v_n \xrightarrow{u.} v$$

پس

$$f_n=u_n+iv_n \xrightarrow{u.} u+iv=f$$

در نتیجه دنباله (f_n) از توابع در $\mathcal{A}$ حاصل شد که همگرای یکنواخت به تابع f گردیدند و حکم تمام است.