۲.۲ توابع پله‌ای و ساده

ابتدا به خواص توابع مشخصه نیاز داریم. برای این منظور، این خواص را در زیر لیست کرده‌ایم و به سادگی می‌توان درستی آنها را بررسی کرد. اگر A زیرمجموعه‌ای از مجموعه X باشد، تابع مشخصه χ_A برای A تابع با مقادیر حقیقی تعریف شده روی X با ضابطه

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 0 & x\notin A \\ 1 & x\in A \end{cases}$$

است. برای زیرمجموعه‌های A و B از مجموعه X داریم

۱. $\chi_X = 1$ و $\chi_\emptyset = 0$

۲. اگر $A\subseteq B$ آنگاه $\chi_A \le \chi_B$

۳. $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A\wedge\chi_B$

۴. $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=\chi_A\vee\chi_B$

۵. $\chi_{A\setminus B}=\chi_A-\chi_{A\cap B}$

۶. اگر $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و $\{A_n\}$ دنباله‌ای دوبه‌دو متمایز از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه

$$\chi_A=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}$$

۷. $\chi_{A\times B}=\chi_A\cdot\chi_B$ (در اینجا می‌توان B را زیرمجموعهٔ مجموعه دیگری مانند Y گرفت).

در تمام این بخش، (X, S, μ) نشان دهندهٔ یک فضای اندازه ثابت است.

تعریف ۸. تابع اندازه‌پذیر $\varphi: X\longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع ساده نامیم هرگاه φ تنها تعدادی متناهی مقدار بپذیرد.

توضیح: مجموع متناهی، حاصل ضرب تعداد متناهی و سوپریمم و اینفیمم تعدادی متناهی از توابع ساده، همه آنها توابعی ساده‌اند. به عبارت دیگر خانواده تمام توابع ساده تشکیل یک فضای توابع می‌دهند که علاوه بر آن یک جبر است.

فرض کنید تابع ساده φ مقادیر ناصفر متمایز $a_1,\dots,a_n$ را بپذیرد، در این صورت مجموعه‌های $A_i=\{x\in X : \varphi(x)=a_i\}$ اندازه‌پذیرند و دوبه‌دو متمایز می‌باشند و $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$.
این عبارت را نمایش استاندارد φ نامیم. نمایش استاندارد تابع ثابت صفر برای $\chi_\emptyset$ را در نظر می‌گیریم.

در حالت کلی یک تابع ساده φ را می‌توان با بیش از یک طریق به فرم استاندارد نوشت.

تعریف ۹. تابع ساده φ را یک تابع پله‌ای نامیم هرگاه φ دارای نمایش استانداردی به صورت $\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ باشد که در آن A_i ها مجموعه‌هایی اندازه‌پذیر با اندازه متناهی اند (یعنی $\mu^*(A_i) < \infty$).

بوضوح یک تابع ساده، تابعی پله‌ای است اگر و تنها اگر خارج از یک مجموعه با اندازه متناهی صفر باشد. خانواده تمام توابع پله‌ای یک فضای توابع است که علاوه بر آن یک جبر از توابع نیز می‌باشد. توابع پله‌ای دارای ساختاری ملموس برای نظریه انتگرال می‌باشند.

تعریف ۱۰. فرض کنید φ یک تابع پله‌ای با نمایش استاندارد $\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ است یعنی $a_1,\dots,a_n$ مقادیر متمایز ناصفر φ بوده و $A_i=\{x\in X;\ \varphi(x)=a_i\}$. در این صورت انتگرال لبگ تابع φ (یا بطور ساده‌تر انتگرال تابع φ) توسط

$$I(\varphi)=\sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i)$$

تعریف می‌شود. معمولاً انتگرال φ را با نماد $\int_X \varphi d\mu$ یا $\int \varphi d\mu$ نمایش می‌دهیم. در اینجا از نماد $I(\varphi)$ برای نمایش انتگرال φ استفاده کرده‌ایم که مناسبت این نماد بعداً مشخص می‌شود.

اولین قضیه در رابطه با خاصیت خطی بودن انتگرال توابع پله‌ای است. سختی اثبات قضیه در این است که نمایش استاندارد جمع دو تابع ساده لزوماً جمع نمایش استانداردهای دو تابع نیست.

قضیه ۱۱. اگر φ و ψ توابع پله‌ای باشند آنگاه

$$I(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha I(\varphi)+\beta I(\psi)$$

که در آن α و β اعداد حقیقی ثابت اند.

اثبات. بوضوح برای هر تابع پله‌ای φ و هر $\alpha\in\mathbb{R}$ رابطه $I(\alpha\varphi)=\alpha I(\varphi)$ برقرار است. کافی است نشان دهیم برای توابع پله‌ای φ و ψ، عبارت $I(\varphi+\psi)=I(\varphi)+I(\psi)$ برقرار است.

فرض کنید $\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ و $\psi=\sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ نمایش‌های استاندارد φ و ψ اند. قرار دهید

$$E=\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right)$$

توجه داریم که $\mu^*(E)<\infty$. حال قرار دهید

$$A_0=E\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad B_0=E\setminus\bigcup_{j=1}^{m} B_j$$

و $a_0=b_0=0$. در این صورت A_i ها و B_j ها دو به دو متمایزند و $\bigcup_{i=0}^{n} A_i=\bigcup_{j=0}^{m} B_j=E$
$\varphi+\psi$ را به صورت

$$\varphi+\psi=\sum_{k=1}^{r} c_k \chi_{C_k}$$

می‌نویسیم. چون $\varphi(x)+\psi(x)\neq 0$ پس یا $\varphi(x)\neq 0$ یا $\psi(x)\neq 0$ در نتیجه

$$\bigcup_{k=1}^{r} C_k\subseteq E$$

قرار دهید $C_0=E\setminus\bigcup_{k=1}^{r} C_k$ و $c_0=0$. در این صورت C_k ها دو به دو متمایزند و

$$C_k=\bigcup_{i=0}^{n}\bigcup_{j=0}^{m}\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)$$

برای هر $0\leq k\leq r$ که اجتماعی متمایزند، بنابراین

$$\mu^*(C_k)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\mu^*\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)$$

علاوه بر آن برای هر i، j و k داریم

$$c_k\,\mu^*\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)=(a_i+b_j)\,\mu^*\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)$$

زیرا اگر $C_k\cap A_i\cap B_j=\emptyset$ آنگاه تساوی بوضوح برقرار است و اگر $x\in C_k\cap A_i\cap B_j$ آنگاه با توجه به $c_k=\varphi(x)+\psi(x)=a_i+b_j$ برقرار است.

حال با توجه به رابطهٔ بالا و با استفاده از جمعی بودن μ^* روی Λ داریم

$$\begin{aligned}
I(\varphi+\psi)&=\sum_{k=1}^{r} c_k\,\mu^*(C_k)=\sum_{k=0}^{r} c_k\,\mu^*(C_k)\\
&=\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_k\,\mu^*\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)\\
&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{r}(a_i+b_j)\,\mu^*\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)\\
&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_i+b_j)\,\mu^*(A_i\cap B_j)\\
&=\sum_{i=0}^{n} a_i\sum_{j=0}^{m}\mu^*(A_i\cap B_j)+\sum_{j=0}^{m} b_j\sum_{i=0}^{n}\mu^*(A_i\cap B_j)\\
&=\sum_{i=0}^{n} a_i\,\mu^*(A_i)+\sum_{j=0}^{m} b_j\,\mu^*(B_j)=I(\varphi)+I(\psi).
\end{aligned}$$

توضیح ۱۲. با توجه به قضیه قبل، واضح است که اگر φ تابع پله‌ای با نمایش $\varphi=\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$ است، که در آن b_jها حقیقی اند و مجموعه‌های B_j اندازه‌پذیر با اندازه متناهی می‌باشند آنگاه $I(\varphi)=\sum_{j=1}^{m} b_j\mu^*(B_j)$. به عبارت دیگر انتگرال یک تابع پله‌ای وابسته به نمایش استاندارد خاص نمی‌باشد.

قضیه ۱۳. برای توابع پله‌ای φ و ψ عبارات زیر برقرارند.

(الف) اگر $\varphi\geq 0$ a.e. آنگاه $I(\varphi)\geq 0$. بالاخص اگر $\varphi\geq\psi$ a.e. آنگاه $I(\varphi)\geq I(\psi)$.

(ب) اگر $\varphi=0$ a.e. آنگاه $I(\varphi)=0$. بالاخص اگر $\varphi=\psi$ a.e. آنگاه $I(\varphi)=I(\psi)$.

اثبات. (الف) فرض کنید $\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ نمایش استاندارد φ است. چون $\varphi\geq 0$ a.e.، اگر به ازای iای $a_i<0$ باشد آنگاه لزوماً باید $\mu^*(A_i)=0$. بنابراین برای هر i، $a_i\mu^*(A_i)\geq 0$ پس $I(\varphi)=\sum_{i=1}^{n} a_i\mu^*(A_i)\geq 0$.

(ب) اگر $\varphi=0$ a.e. آنگاه $\varphi\geq 0$ a.e. و $-\varphi\geq 0$ a.e. بنابراین طبق قسمت (الف)، $I(\varphi)\geq 0$ و $I(-\varphi)\geq 0$ در نتیجه $I(\varphi)=0$.

قضیه زیر خاصیت پیوستگی انتگرال را بیان می‌کند.

قضیه ۱۴. فرض کنید (φ_n) دنباله‌ای از توابع پله‌ای است، اگر $\varphi_n\downarrow 0$ a.e. آنگاه $I(\varphi_n)\downarrow 0$. بالاخص، اگر φ تابعی پله‌ای بوده و $\varphi_n\uparrow\varphi$ a.e. آنگاه $I(\varphi_n)\uparrow I(\varphi)$.

اثبات. فرض کنید $\varphi_n\downarrow 0$ a.e. و

$$A_n=\{x\in X:\ \varphi_{n+1}(x)>\varphi_n(x)\}$$

$$A_0=\{x\in X:\ \varphi_n(x)\not\to 0\}$$

طبق فرض، برای $n=0,1,2,\dots$ داریم $\mu^*(A_n)=0$. قرار دهید $A=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ آنگاه $\mu^*(A)=0$ (با توجه به σ-زیرجمعی بودن μ^*) و برای هر $x\in A^c$، $\varphi_n(x)\downarrow 0$. همچنین اگر $\psi_n=\varphi_n\chi_{A^c}$ آنگاه برای هر n، $\psi_n=\varphi_n$ a.e. و برای هر $x\in X$، $\psi_n(x)\downarrow 0$ و در نتیجه طبق قضیه قبل برای هر n، $I(\psi_n)=I(\varphi_n)$. بنابراین با جایگزینی (ψ_n) بجای (φ_n) در صورت لزوم، بدون کم شدن از کلیت بحث می‌توان فرض کرد برای هر $x\in X$، $\varphi_n(x)\downarrow 0$.

حال فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است. قرار دهید $M=\max\{\varphi_1(x): x\in X\}$ و $B=\{x\in X: \varphi_1(x)>0\}$
بوضوح $\mu^*(B)<\infty$. برای هر n تعریف می‌کنیم

$$E_n=\{x\in X:\ \varphi_n(x)\geq \epsilon\}$$

آنگاه $\mu^*(E_1)<\infty$ ، به علاوه E_n ها اندازه‌پذیرند و چون برای هر $x\in X$ داریم $\varphi_n(x)\downarrow 0$ پس $E_n\downarrow\emptyset$. بنابراین $\mu^*(E_n)\downarrow 0$. عدد صحیح k را چنان اختیار می‌کنیم که $\mu^*(E_k)<\epsilon$. اگر $n\geq k$ آنگاه

$$0\le\varphi_n\le\varphi_k=\varphi_k\chi_{E_k}+\varphi_k\chi_{B\setminus E_k}\le M\chi_{E_k}+\epsilon\chi_B$$

درنتیجه برای هر $n\geq k$

$$0\le I(\varphi_n)\le M\mu^*(E_k)+\epsilon\mu^*(B)<\epsilon[M+\mu^*(B)]$$

بنابراین $\lim I(\varphi_n)=0$.

حال اگر φ یک تابع پله‌ای باشد و $\varphi_n\uparrow\varphi$ a.e. آنگاه $\varphi-\varphi_n\downarrow 0$ a.e. و بنابراین $I(\varphi-\varphi_n)\downarrow 0$. درنتیجه $I(\varphi_n)\uparrow I(\varphi)$.

به عنوان کاربردی از قضیه (۱۴)، نتیجه زیر را داریم.

قضیه ۱۵. فرض کنید برای دو دنباله از توابع پله‌ای (φ_n) و (ψ_n) داریم $\varphi_n\uparrow f$ a.e. و $\psi_n\uparrow f$ a.e. که در آن $f: X\to\mathbb{R}^*$ تابعی داده شده‌ای است. آنگاه

$$\lim I(\varphi_n)=\lim I(\psi_n)$$

که در اینجا حدود می‌توانند بینهایت باشند.

اثبات. نخست توجه داریم که برای هر m ثابت

$$\varphi_m\wedge\psi_n\uparrow_n\varphi_m\wedge f=\varphi_m \quad \text{a.e.}$$

و طبق قضیه قبل

$$\lim_n I(\varphi_m\wedge\psi_n)=I(\varphi_m).$$

از طرفی برای هر n داریم $\varphi_m\wedge\psi_n\le\psi_n$ پس برای هر m

$$I(\varphi_m)=\lim_n I(\varphi_m\wedge\psi_n)\le\lim I(\psi_n)$$

بنابراین $\lim I(\varphi_n)\le\lim I(\psi_n)$. بطور مشابه $\lim I(\psi_n)\le\lim I(\varphi_n)$. بنابراین

$$\lim I(\varphi_n)=\lim I(\psi_n)$$

قضیه ۱۶. فرض کنید (φ_n) دنباله‌ای از توابع پله‌ای است. اگر A زیرمجموعه‌ای از X باشد به طوری که $\varphi_n \uparrow \chi_A$ a.e. آن‌گاه A مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است و $\lim I(\varphi_n)=\mu^*(A)$.

اثبات. اندازه‌پذیری A از قضیه ۶ قسمت (۱) بخش قبل نتیجه می‌شود (جزئیات: تمرین) می‌توان فرض کرد که برای هر $x\in X$، $\varphi_n(x)\uparrow\chi_A(x)$. برای هر n قرار دهید

$$A_n=\{x\in X : \varphi_n(x)>0\}$$

A_n ها اندازه‌پذیر با اندازه متناهی اند و $A_n\uparrow A$. پس $\chi_{A_n}\uparrow\chi_A$ و بنابراین طبق قضیه قبل

$$\lim I(\varphi_n)=\lim I(\chi_{A_n})=\lim\mu^*(A_n)=\mu^*(A)$$

و اثبات تمام است.

حال یک قضیه تقریب مهم را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۱۷. فرض کنید $f:X\to\mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر است به طوری که برای هر $x\in X$، $f(x)\geq 0$، آن‌گاه دنباله (φ_n) از توابع ساده وجود دارد به طوری که برای هر $x\in X$،

$$0\leq\varphi_n(x)\uparrow f(x)$$

اثبات. برای هر n قرار دهید $A_n^i=\{x\in X : (i-1)2^{-n}\leq f(x)<i2^{-n}\}$ که در آن $i=1,2,\ldots,n2^n$ و توجه داریم که برای $i\neq j$، $A_n^i\cap A_n^j=\emptyset$. چون f اندازه‌پذیر است، پس هر یک از A_n^i ها مجموعه‌های اندازه‌پذیرند. برای هر n تعریف می‌کنیم

$$\varphi_n=\sum_{i=1}^{n2^n}2^{-n}(i-1)\chi_{A_n^i}$$

(φ_n) دنباله‌ای از توابع ساده است. همچنین برای هر x و هر n داریم

$$0\leq\varphi_n(x)\leq\varphi_{n+1}(x)\leq f(x)$$

علاوه بر آن، اگر x ثابت باشد آن‌گاه برای nهای به اندازه کافی بزرگ داریم

$$0\leq f(x)-\varphi_n(x)\leq 2^{-n}$$

در نتیجه برای هر x، $\varphi_n(x)\uparrow f(x)$ و اثبات تمام است.

نتیجه ۱۸. اگر $f:X\to\mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر باشد به طوری که برای تقریباً همه xها $f(x)\geq 0$ آن‌گاه دنباله (φ_n) از توابع ساده مثبت وجود دارد به طوری که $\varphi_n\uparrow f$ a.e.

زیرا قرار دهید $E=\{x\in X : f(x)\geq 0\}$ و قضیه قبل را برای تابع $f\chi_E$ به کار برید.