۷.۱ . اندازه‌ها روی نیم حلقه‌ها

مفهوم یک اندازه تعمیمی از مفاهیم طول، مساحت و حجم است، که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۷۳. فرض کنید S یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی X است. تابع مجموعه‌ای $\mu : S \to [0, \infty]$ را یک اندازه روی S نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

الف) $\mu(\emptyset) = 0$.

ب) اگر $\{A_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای متناهی از عناصر S باشد به طوری که $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in S$ آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

یعنی μ، جمعی شمارا باشد (σ-additive)

سه‌تایی (X, S, μ) که در آن X مجموعه‌ای ناتهی، S نیم حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X و μ یک اندازه روی S است را یک فضای اندازه نامیم.

قضیه ۷۴. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه است. در این صورت

الف) اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$ دو به دو متمایز بوده و $\bigcup_{i=1}^n A_i \in S$ آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

یعنی μ جمعی متناهی است (finitely additive)

ب) اگر $A, B \in S$ و $A \subseteq B$ آن‌گاه $\mu(A) \le \mu(B)$. یعنی μ یکنوا است.

اثبات. الف) فرض کنید $A_1, \ldots, A_n \in S$ دو به دو متمایزند و $\bigcup_{i=1}^n A_i \in S$. برای $i > n$ قرار می‌دهیم $A_i = \emptyset$. در این صورت $\{A_i\}_1^\infty$ دنباله‌ای از عناصر دو به دو متمایز S است و $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$. از خاصیت σ-جمعی بودن μ داریم

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i),$$

که در آن از $\mu(\emptyset)=0$ استفاده کرده‌ایم.

ب) فرض کنید $A,B\in S$ و $A\subseteq B$. مجموعه‌های متمایز $C_1,\dots,C_n$ در S وجود دارند به طوری که $B\setminus A=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$. در نتیجه $B=A\cup C_1\cup\dots\cup C_n$ یک اجتماع متناهی از مجموعه‌های متمایز در S است. بنابراین

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(C_1)+\dots+\mu(C_n)\geqslant\mu(A).$$

مثال ۶. (The counting measure) فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است و $S=P(X)$. تابع مجموعه‌ای $\mu:S\to[0,\infty]$ به صورت زیر تعریف کنید

$$\mu(A)=\begin{cases} n(A), & A\subset X \text{ مجموعه‌ای متناهی باشد} \\ \infty & A\subset X \text{ مجموعه‌ای نامتناهی باشد} \end{cases}$$

(X,S,μ) یک فضای اندازه است.

بوضوح $\mu(\emptyset)=0$. فرض کنید $\{A_i\}_1^\infty$ دنباله‌ای متمایز از زیرمجموعه‌های X است و A_iها متناهی است. در نتیجه $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\in S$. اگر $n(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)=|\bigcup_{i=1}^\infty A_i|<\infty$ آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)=n(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)=\sum_{i=1}^\infty n(A_i)=\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

اگر $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ زیرمجموعه‌ای نامتناهی از X باشد آنگاه

$$\infty=\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i),$$

همچنین $\sum_{i=1}^\infty n(A_i)=\infty$. بنابراین μ جمعی شمارا است.

مثال ۷. اندازه دیراک (Dirac's measure). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است و $S=P(X)$. عنصر $a\in X$ را ثابت در نظر گرفته و $\mu:S\to[0,\infty]$ را توسط

$$\mu(A)=\begin{cases} 0 & a\notin A \\ 1 & a\in A \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح (X,S,μ) یک فضای اندازه است.

مثال ۸. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی غیرنزولی و پیوسته چپ است (یعنی برای هر $a\in\mathbb{R}$، $\lim_{x\uparrow a} f(x)=f(a)$). نیم حلقه $S=\{[a,b): a,b\in\mathbb{R},\ a\le b\}$ را درنظر بگیرید. تابع مجموعه‌ای $\mu: S\to[0,\infty)$ را توسط

$$\mu([a,b))=f(b)-f(a) \qquad a\le b$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح $\mu(\emptyset)=0$. ادعا می‌کنیم μ روی S یک اندازه است. فرض کنید $\{[a_n,b_n)\}$ دنباله‌ای متمایز است و $[a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$. به وضوح می‌توان $\{[a_n,b_n)\}$ را به فرم $\{[c_n,c_{n+1})\}$ با $c_1=a$ و $c_n\uparrow b$ مرتب کرد. بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mu([a_n,b_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu([c_n,c_{n+1}))\\ &=\lim_{i\to\infty}\sum_{n=1}^{i-1}\mu([c_n,c_{n+1}))\\ &=\lim_{i\to\infty}(f(c_i)-f(a))\\ &=f(b)-f(a)=\mu([a,b))\end{aligned}$$

که در آن از پیوستگی چپ f داریم $\lim_{i\to\infty}f(c_i)=f(b)$.

توضیح ۷۵. یک حالت خاص مهم از مثال (۸) وقتی است که $f(x)=x$ برای هر $x\in\mathbb{R}$. در این حالت اندازه حاصل را اندازه لبگ روی S نامیم و با λ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$\lambda([a,b))=b-a.$$

و سپس دامنه این اندازه به تمام مجموعه‌های باز و بسته توسیع داده می‌شود.

مثال ۹. نیم حلقه مثال (۴) را درنظر بگیرید. یعنی نیم حلقه S شامل تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ به شکل $[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\cdots\times[a_n,b_n)$ با $a_i\le b_i$ برای $1\le i\le n$ همراه با مجموعه تهی است، و $\lambda:S\to[0,\infty)$ را توسط $\lambda(\emptyset)=0$ و

$$\lambda([a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n))=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

تعریف می‌کنیم. در نتیجه λ یک اندازه است که اندازه لبگ روی S نامیده می‌شود.

قضیه ۷۴. فرض کنید S یک نیم‌حلقه و $\mu : S \to [0, \infty]$ یک تابع مجموعه‌ای است. در این صورت μ روی S یک اندازه است اگر و تنها اگر μ در شرایط زیر صدق کند

الف) $\mu(\emptyset) = 0$.

ب) اگر $A \in S$ و $A_1, \dots, A_n \in S$ باشند به طوری که $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$ و برای $i \neq j$ داشته باشیم $A_i \cap A_j = \emptyset$ آن‌گاه $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$.

ج) اگر $A \in S$ و $\{A_n\}_1^\infty \subset S$ باشند به طوری که $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ آن‌گاه

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

یعنی μ جمعی زیرشمارا است.

اثبات. فرض کنید μ یک اندازه روی S است. طبق تعریف $\mu(\emptyset) = 0$. حال فرض کنید $A \in S$ و $A_1, \dots, A_n \in S$ دو به دو متمایز باشند و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$. طبق قضیه (۷۳ ـ (الف)) مجموعه‌های متمایز $B_1, \dots, B_m$ در S وجود دارند به طوری که

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i.$$

قرار می‌دهیم $C_1 = A_1$، ...، $C_n = A_n$ و برای $1 \leq i \leq m$، $C_{n+i} = B_i$. در نتیجه مجموعه‌های C_1، C_2، ...، C_{n+m} متمایزند و $A = \bigcup_{i=1}^{n+m} C_i$. از خاصیت جمعی متناهی بودن μ داریم

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n+m} \mu(C_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

حال برای اثبات زیرجمعی شمارا بودن μ، فرض کنید $A \in S$ و $\{A_n\} \subset S$ و $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. قرار می‌دهیم

$$B_1 = A_1, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad n \geq 1.$$

در نتیجه $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $B_n \subset A_n$ و دنباله $\{B_n\}$ دو به دو متمایزند. طبق قضیه (۷۴ ـ الف) هر B_n یک σ-مجموعه است. برای هر n، دنباله متمایز $\{C_i^n\}$ از S را انتخاب می‌کنیم به طوری $B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^n$.

طبق (ب) و با توجه به اینکه برای هر m، $\bigcup_{i=1}^{m} C_i^n \subset A_n$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i^n) \leq \mu(A_n).$$

حال توضیح

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}(C_i^n\cap A),$$

یک اجتماع از مجموعه‌های دوبدو متمایز است. از خاصیت جمعی شمارا بودن μ داریم

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(C_i^n\cap A)$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(C_i^n)$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

برعکس، اگر تابع مجموعه‌ای $\mu:S\to[0,\infty]$ در شرایط داده شده صدق کند آنگاه μ جمعی شمارا است (طبق (ب) و (ج)). بنابراین μ یک اندازه است.

تعریف ۷۷. تابع مجموعه‌ای $\mu:S\to[0,\infty]$ که در آن S یک نیم حلقه است، را یک اندازه جمعی متناهی روی S نامیم هرگاه

الف) $\mu(\emptyset)=0$.

ب) اگر $A_1,\dots,A_n\in S$ متمایز بوده و $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in S$ آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\mu(A_i).$$

توضیح ۷۸. به سادگی دیده می‌شود که هر اندازه جمعی متناهی مانند μ یکنوا است. یعنی اگر $A,B\in S$ بوده و $A\subset B$ آنگاه $\mu(A)\leq\mu(B)$.

توضیح ۷۹. از قضیه (۷۴) دیده می‌شود که هر اندازه یک اندازه جمعی متناهی است اما عکس آن لزوماً صحیح نیست. برای مثال، نیم حلقه $S=\{A\subset\mathbb{R}:\ A$ حداکثر شمارا$\}$ و $\mu:S\to[0,\infty]$ را توسط $\mu(A)=0$ برای A متناهی و $\mu(A)=\infty$ برای A نامتناهی شمارا تعریف شده باشد آنگاه μ یک اندازه جمعی متناهی است ولی اندازه نیست.

۸.۱ اندازه‌ها روی σ-جبرها

در بخش (۶.۱) مفهوم نیم حلقه شامل زیرمجموعه‌های یک مجموعه ناتهی را دیدیم. در تعریف (۵۰) تنها شرط بسته بودن عمل اشتراک تعداد متناهی عضو نیم حلقه S را داشتیم. با توجه به سیر تکاملی تعاریف و قضایا از نیم حلقه‌ها به جبرها و سپس به σ-جبرها، نهایتاً در بخش (۷.۱) با شروع تعریف یک اندازه روی نیم حلقه S در قسمت (ب) تعریف (۷۳) شرط بسته بودن تحت اجتماع شمارایی از عناصر متمایز S که شرطی لازم برای تعریف بود و آن را به نیم حلقه S اضافه کردیم، خاصیت جمعی شمارا بودن μ را بیان کردیم. باید دقت کرد که لزوماً یک نیم حلقه تحت اجتماع شمارا بسته نیست. با مطرح کردن تعریف (۷۳) در بخش (۷.۱) نتایج مهمی در ارتباط با یک اندازه روی نیم حلقه S را به دست آوردیم. در قضیه (۷۶) شرایطی معادل برای اندازه بودن μ روی نیم حلقه S مطرح شد. با توجه به تعریف (۵۸) مفهوم σ-جبر را دیدیم. در این بخش به بررسی تعاریف و قضایای بیان شده در دو بخش قبل برای σ-جبرها می‌پردازیم. دیده خواهد شد که یک اندازه روی σ-جبر دارای شرایط خلاصه‌تری نسبت به اندازه روی نیم حلقه است.

تعریف ۸۰. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{A}$ یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های X است. یک اندازه روی $\mathcal{A}$ (یا روی $(X,\mathcal{A})$ یا به طور ساده‌تر روی X در صورتی که $\mathcal{A}$ معین باشد) تابع مجموعه‌ای $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ است به طوری که

الف) $\mu(\emptyset)=0$.

ب) اگر $\{A_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از عناصر متمایز در $\mathcal{A}$ باشد آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

(خاصیت (ب) را جمعی شمارا بودن μ نامیم).

نکته ۸۱. به تمایزهای قسمت (ب) تعریف (۸۰) و قسمت (ب) تعریف (۵۰) دقت کنید.

به وضوح اگر μ روی $(X,\mathcal{A})$ یک اندازه باشد آن‌گاه μ جمعی متناهی است یعنی

(ب') اگر $A_1,\dots,A_n$ مجموعه‌های متمایز در $\mathcal{A}$ باشند آن با فرض $A_k=\emptyset$ برای $k>n$ داریم

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k).$$

تابع μ برقرار در شرط (الف) و (ب') نه لزوماً (ب) را یک اندازه جمعی متناهی نامیم. باید دقت کرد که یک اندازه جمعی متناهی، لزوماً یک اندازه نیست.

اگر X یک مجموعه ناتهی، $\mathcal{A}\subset P(X)$ یک σ-جبر و μ یک اندازه روی $\mathcal{A}$ باشد، $(X,\mathcal{A},\mu)$ را فضای اندازه نامیم و در این حالت مجموعه‌ها در $\mathcal{A}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر گوییم و $(X,\mathcal{A})$ را فضای اندازه‌پذیر نامیم.

تعریف ۸۲. فرض کنید $X\neq\emptyset$، $\mathcal{A}$ یک σ-جبر و μ یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است. اگر $\mu(X)<\infty$ گوییم μ متناهی است.

به وضوح اگر $\mu(X)<\infty$ آن‌گاه برای هر $A\in\mathcal{A}$، $\mu(A)<\infty$.

تعریف ۸۳. با شرایط تعریف (۸۲)، اگر $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$ که در آن برای هر i، $X_i\in\mathcal{A}$ و $\mu(X_i)<\infty$، در این صورت μ را یک اندازه σ-متناهی نامیم. به طور موضعی تعریف فوق را می‌توان برای $A\in\mathcal{A}$ بیان کرد. اگر $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ که در آن $A_i\in\mathcal{A}$ و برای هر i، $\mu(A_i)<\infty$، در این صورت مجموعه A را σ-متناهی (نسبت به μ) نامیم. (اگر μ یک اندازه σ-متناهی باشد آن‌گاه $A\in\mathcal{A}$ نسبت به μ نیز σ-متناهی است، ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست مگر اینکه برای هر $A\in\mathcal{A}$ برقرار باشد)

نهایتاً اگر برای هر $A \in \mathcal{A}$ با $\mu(A)=\infty$، عضو $B \in \mathcal{A}$ با $B \subset A$ و شرط $0 < \mu(B) < \infty$ وجود داشته باشد، μ را نیم‌متناهی نامیم.

توضیح ۸۴. هر اندازه σ-متناهی یک اندازه نیم‌متناهی است، اما عکس آن لزوماً برقرار نیست (تمرین). اکثر اندازه‌هایی که در مباحث ما مطرح می‌شوند σ-متناهی اند که خوش رفتار هستند، درحالی که اندازه‌هایی که σ-متناهی نیستند منجر به رفتارهای نامناسب می‌شوند. خواص اندازه‌هایی که σ-متناهی نیستند به تدریج در مباحث بعدی و مسائل مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در بخش‌های بعد مجدداً مفاهیم اندازه متناهی و اندازه σ-متناهی بیان خواهند شد و نتایج مهمی در آن بخش‌ها خواهیم دید. برای σ-جبر $\mathcal{A}$ روی X قضیه زیر را داریم.

قضیه ۸۵. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه است.

الف) (یکنوایی) اگر $A, B \in \mathcal{A}$ و $A \subset B$ آن‌گاه $\mu(A) \leq \mu(B)$.

ب) (زیرجمعی) اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از عناصر $\mathcal{A}$ باشد آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

ج) (پیوستگی از پایین) اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ و $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

د) (پیوستگی از بالا) اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ و $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ و به ازای n یی $\mu(A_n) < \infty$ آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

اثبات. الف) اگر $A, B \in \mathcal{A}$ و $A \subset B$ آن‌گاه

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A).$$

ب) فرض کنید $B_1 = A_1$ و برای $n > 1$،

$$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$

در این صورت B_n ها مجزا هستند و $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ و $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. از قسمت

(ب) تعریف (۸۰) داریم

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

زیرا از تعریف B_n ها داریم

$$\mu(B_n) = \mu\left(A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) \le \mu(A_n).$$

ج) با فرض $A_0 = \emptyset$ داریم

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$$
$$= \lim_{k\to\infty} [\mu(A_1 \setminus A_0) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \mu(A_k \setminus A_{k-1})]$$
$$= \lim_{k\to\infty} [\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \mu(A_k \setminus A_{k-1})]$$
$$= \lim_{k\to\infty} [\mu(A_2) + \mu(A_3 \setminus A_2) + \cdots + \mu(A_k \setminus A_{k-1})]$$
$$= \cdots = \lim_{k\to\infty} (\mu(A_{k-1}) + \mu(A_k \setminus A_{k-1}))$$
$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

د) فرض کنید برای $j>n$،

$$B_j = A_n \setminus A_j,$$

در این صورت

$$B_{n+1} \subset B_{n+2} \subset \cdots$$

و برای $j>n$

$$\mu(A_n) = \mu(B_j) + \mu(A_j)$$

و $\bigcup_{n+1}^{\infty} B_j = A_n \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$. حال از (ج) داریم

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \lim_{j\to\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_j))$$

چون $\mu(A_n)<\infty$ ، از طرفین عبارت بالا $\mu(A_n)$ را کم می‌کنیم و حکم حاصل می‌شود.

توضیح ۸۶. توجه داریم که شرط $\mu(A_n)<\infty$ در (د) الزامی است. به سادگی می‌توان مثالی یافت که دنباله $\{A_j\}$ نزولی است و برای هر j، $\mu(A_j)=\infty$ اما $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j=\phi$.

تعریف ۸۷. فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه است. مجموعه $A\in\mathcal{A}$ را یک مجموعه پوچ نامیم هرگاه $\mu(A)=0$.
با توجه به خاصیت زیرجمعی بودن، اجتماع شمارایی از مجموعه‌های پوچ، پوچ است.

تعریف ۸۸. اگر $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه باشد و عبارت یا گزاره‌ای برای نقاط $x\in X$ درست باشد بجز برای x های متعلق به یک مجموعه پوچ، در این صورت گوییم عبارت یا گزاره تقریباً همه جا درست است و از نماد a.e. استفاده می‌کنیم.

نکته ۸۹. اگر $\mu(E)=0$ و $F\subset E$ آنگاه $\mu(F)=0$ (از خاصیت یکنوایی) مشروط به اینکه $F\in\mathcal{A}$ ، اما در حالت کلی نتیجه نمی‌دهد که $F\in\mathcal{A}$. (به عنوان مثال، اندازه صفر روی σ-جبر $\{\phi,X\}$ را در نظر بگیرید).

تعریف ۹۰. یک اندازه که دامنه تعریفش شامل تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌های پوچ باشد را کامل نامیم.

قضیه ۹۱. فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه است. فرض کنید
$$\mathcal{N}=\{N\in\mathcal{A},\ \mu(N)=0\}$$

و

$$\overline{\mathcal{A}}=\{E\cup F : E\in\mathcal{A},\quad F\subset N \text{ ، به ازای } N \text{ای در } \mathcal{N}\}$$

در این صورت $\overline{\mathcal{A}}$ یک σ-جبر است و توسیع منحصربفرد $\overline{\mu}$ از μ وجود دارد به طوری که روی $\overline{\mathcal{A}}$ کامل است.

اثبات. چون $\mathcal{A}$ و $\mathcal{N}$ تحت اجتماع‌های شمارا بسته است، در این صورت $\overline{\mathcal{A}}$ نیز تحت اجتماع‌های شمارا بسته است. اگر $E\cup F\in\overline{\mathcal{A}}$ که در آن $F\subset N\in\mathcal{N}$ می‌توان فرض کرد $E\cap N=\emptyset$ زیرا در غیر این صورت بجای F، N از $F\setminus E$، $N\setminus F$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$E\cup F=(E\cup N)\cap(N^c\cup F).$$

در نتیجه

$$(E\cup F)^c=(E\cup N)^c\cup(N\setminus F).$$

اما $(E\cup N)^c\in\mathcal{A}$ و $N\setminus F\subset N$ پس $(E\cup F)^c\in\overline{\mathcal{A}}$ یعنی $\overline{\mathcal{A}}$ یک σ-جبر است. اگر $E\cup F\in\overline{\mathcal{A}}$ ، $(F\subset N\in\mathcal{N})$ قرار می‌دهیم $\overline{\mu}(E\cup F)=\mu(E)$. این کار با معنی است زیرا اگر $E_1\cup F_1=E_2\cup F_2$ ، $(F_j\subset N_j\in\mathcal{N})$ آنگاه

$$E_1\subset E_2\cup N_2,$$

و بنابراین

$$\mu(E_1)\le\mu(E_2)+\mu(N_2)=\mu(E_2),$$

و به طور مشابه $\mu(E_2)\le\mu(E_1)$. به سادگی می‌توان دید که $\overline{\mu}$ یک اندازه کامل روی $\overline{\mathcal{A}}$ است و $\overline{\mu}$ تنها اندازه روی $\overline{\mathcal{A}}$ است که توسیع μ می‌باشد (جزئیات: تمرین).

تعریف ۹۲. اندازه $\overline{\mu}$ در قضیه (۹۱) را کامل شده یا تتمیم μ نامیده و $\overline{\mathcal{A}}$ را تتمیم $\mathcal{A}$ نسبت به μ گوییم.

توضیح ۹۳. همان گونه که در این بخش دیده شد بیان مفهوم اندازه روی σ-جبرها نسبت به مفهوم مشابه روی نیم حلقه‌ها منجر به نتایج سرراست‌تری شد. حال برای ساختن یک اندازه، با در نظر گرفتن اندازه روی $P(X)$ تحت شرایط مناسبی به اندازه روی σ-جبرها خواهیم رسید.

۹.۱ اندازه‌های خارجی و مجموعه‌های اندازه‌پذیر

در این بخش نظریه اندازه‌های خارجی را نمایش و شرح می‌دهیم. مفهوم یک اندازه خارجی منسوب به کاراتئودری (C. Carathéodory) ریاضیدان یونانی است. روند به کار رفته برای اندازه‌های خارجی، برگرفته شده از ایده تعریف مساحت یک ناحیه کراندار در صفحه است. می‌دانیم که برای مساحت یک ناحیه کراندار در صفحه، افرازی از ناحیه به مستطیل‌هایی از داخل و خارج ناحیه در نظر می‌گرفتیم و مساحت ناحیه کراندار D را از پایین با مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی در افرازی که زیرمجموعه‌هایی از D هستند و از بالا با مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی در افرازی که D را در بر دارند تقریب می‌زنیم. حد این تقریب‌ها وقتی که افراز ظریف و ظریفتر می‌شود مساحت داخلی و مساحت خارجی D را به دست می‌دهند و اگر این دو مساحت برابر باشند، مقدار مشترک آنها مساحت D است. در این بخش، تمرکز اصلی مساحت خارجی است، زیرا اگر R یک مستطیل بزرگ شامل D باشد، مساحت داخلی D برابر با مساحت R منهای مساحت خارجی $R \setminus D$ است.

تعریف ۹۴. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $P(X)$ مجموعه توانی X است. تابع مجموعه‌ای $\mu^*: P(X) \to [0,\infty]$ را یک اندازه خارجی نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند

الف) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ب) اگر $A \subset B$ آنگاه $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. (μ^* یکنوا است).

ج) برای هر دنباله $\{A_n\}_1^\infty$ از زیرمجموعه‌های X،

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

(یعنی μ^*، σ - زیرجمعی است).

یک اندازه خارجی μ^* لزوماً σ-جمعی روی $P(X)$ نیست. به هر حال خواهیم دید که یک

σ-جبر از زیرمجموعه‌ها (که آنها را مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیم) وجود دارد به طوری که μ روی آن σ-جمعی است. جزئیات در زیر شرح داده شده‌اند. در تمام بخش حاضر μ^* یک اندازه خارجی ثابت است. تعریف بعد مجموعه‌های اندازه‌پذیر را توصیف می‌کند که منسوب به کاراتئودوری است.

تعریف ۹۵. فرض کنید μ^* یک اندازه خارجی روی X است. زیرمجموعه E از X را اندازه‌پذیر (یا μ^*-اندازه‌پذیر) نامیم هرگاه برای هر $A\subset X$،

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c).$$

خانواده تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر را با Λ نمایش می‌دهیم، پس

$$\Lambda=\{E\subset X:\ \mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c),\quad \forall A\subset X\}.$$

درصورتی که بر اندازه خارجی μ^* تاکید داشته باشیم بجای Λ می‌نویسیم Λ_{μ^*}.

البته، نامساوی $\mu^*(A)\leq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$ همواره برای هر A و E برقرار است، پس برای اثبات اندازه‌پذیر بودن E، کافی است عکس نامساوی فوق را نشان دهیم. واین در حالتی که $\mu^*(A)=\infty$ بدیهی است. بنابراین برای اندازه‌پذیر بودن E کافی است ثابت کنیم

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$

برای هر $A\subset X$ که $\mu^*(A)<\infty$.

اولین مجموعه‌های اندازه‌پذیر، مجموعه‌های پوچ هستند.

قضیه ۹۶. هر مجموعه پوچ اندازه‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید $E\subset X$ و $\mu^*(E)=0$. از یکنوایی μ^* داریم

$$\mu(A\cap E)=0,\qquad \forall A\subset X.$$

بنابراین برای هر $A\subset X$،

$$\mu^*(A)\leq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)=\mu^*(A\cap E^c)\leq\mu^*(A)$$

که در آن نامساوی اول از σ-زیرجمعی بودن μ^* نتیجه شده است. پس E اندازه‌پذیر است.

قضیه ۹۷. فرض کنید $X \neq \phi$ و μ^* یک اندازه خارجی روی X است. فرض کنید $E_1, \dots, E_n$ مجزا و اندازه‌پذیرند، در این صورت برای هر زیرمجموعه A از X،

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).$$

اثبات. از استقرا استفاده می‌کنیم. به وضوح نتیجه برای $n=1$ برقرار است. فرض کنید نتیجه برای n برقرار است و مجموعه‌های $E_1, E_2, \dots, E_{n+1}$ مجزا و اندازه‌پذیرند. اگر $A \subset X$ آنگاه

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1},$$
$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1}^c = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

از اندازه‌پذیری E_{n+1} داریم

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right)\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1}\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1}^c\right) \\ &= \mu^*(A \cap E_{n+1}) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(A \cap E_i).\end{aligned}$$

و حکم تمام است.

قضیه ۹۸. فرض کنید μ^* یک اندازه خارجی روی X است. در این صورت Λ خانواده تمام مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر یک σ-جبر است و تحدید μ^* به Λ یک اندازه کامل است.

اثبات. به وضوح از تعریف مجموعه‌های اندازه‌پذیر دیده می‌شود که اگر $E \in \Lambda$ آنگاه $E^c \in \Lambda$، زیرا تعریف فوق نسبت به E متقارن است. پس Λ تحت متمم بسته است. علاوه بر آن، چون $\mu^*(\phi)=0$ داریم $\phi \in \Lambda$ در نتیجه $X \in \Lambda$. حال نشان می‌دهیم که اگر $E_1, E_2 \in \Lambda$ آنگاه $E = E_1 \cup E_2 \in \Lambda$. فرض کنید $A \subset X$ زیرمجموعه‌ای دلخواه است. با توجه به این که

$$E = E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)$$

برای هر زیرمجموعه $A \subset X$ داریم

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$
$$\le[\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*((A\cap E_1^c)\cap E_2)]+\mu^*((A\cap E_1^c)\cap E_2^c)$$
$$=\mu^*(A\cap E_1)+[\mu^*((A\cap E_1^c)\cap E_2)+\mu^*((A\cap E_1^c)\cap E_2^c)]$$
$$=\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap E_1^c)=\mu^*(A)$$

بنابراین $E_1\cup E_2\in\Delta$. بنابر استقراء نتیجه می‌شود که Δ تحت اجتماع‌ها و اشتراک‌های متناهی بسته است. همچنین اگر $E_1, E_2\in\Delta$ آنگاه $E_1\setminus E_2=E_1\cap E_2^c\in\Delta$. پس Δ یک جبر از زیرمجموعه‌ها است. علاوه بر آن، اگر $E_1, E_2\in\Delta$ و $E_1\cap E_2=\phi$ آنگاه

$$\mu^*(E_1\cup E_2)=\mu^*((E_1\cup E_2)\cap E_1)+\mu^*((E_1\cup E_2)\cap E_1^c)$$
$$=\mu^*(E_1\cup(E_2\cap E_1))+\mu^*(\phi\cup(E_2\cap E_1^c))$$
$$=\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2).$$

پس μ^* روی Δ جمعی متناهی است. برای اثبات σ-جبر بودن Δ کافی است نشان دهیم Δ تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر از عناصر دو به دو مجزا بسته است. فرض کنید $\{E_n\}\subset\Delta$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های مجزا است. قرار می‌دهیم $B_n=\bigcup_{j=1}^{n}E_j$ و $B=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$ برای هر $A\subset X$

$$\mu^*(A\cap B_n)=\mu^*(A\cap B_n\cap E_n)+\mu^*(A\cap B_n\cap E_n^c)$$
$$=\mu^*(A\cap E_n)+\mu^*(A\cap B_{n-1}),$$

حال با استقراء روی n دیده می‌شود که

$$\mu^*(A\cap B_n)=\sum_{j=1}^{n}\mu^*(A\cap E_j)$$

که همان قضیه (۹۷) است. بنابراین

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap B_n)+\mu^*(A\cap B_n^c)$$
$$\geq\sum_{j=1}^{n}\mu^*(A\cap E_j)+\mu^*(A\cap B_n^c)$$

حال فرض کنید $n\to\infty$، داریم

$$\mu^*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A\cap E_j) + \mu^*(A\cap B^c)$$
$$\geq \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A\cap E_j)\Big) + \mu^*(A\cap B^c)$$
$$= \mu^*(A\cap B) + \mu^*(A\cap B^c) \geq \mu^*(A).$$

پس $B=\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \Lambda$. علاوه بر آن

$$\mu^*(B)=\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)=\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$$

یعنی μ^* جمعی شمارا روی Λ است.

با توجه به قضیه (۹۶) نتیجه می‌گیریم که تحدید μ^* به Λ یعنی $\mu^*|_{\Lambda}$ یک اندازه کامل است.

تعریف ۹۹. با توجه به فرضیات قضیه (۹۸) تحدید μ^* به Λ را اغلب اندازه حاصل از اندازه خارجی μ^* نامیم.

توضیح و تعریف ۱۰۰. اکنون قضیه کاراتئودوری (۹۸) را برای مسئله توسیع یک اندازه از جبرها به σ-جبرها مورد استفاده قرار می‌دهیم.

اگر $\mathcal{A}\subset P(X)$ یک جبر باشد، تابع مجموعه‌ای $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ را یک پیش اندازه نامیم هرگاه

الف) $\mu(\emptyset)=0$.

ب) اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های متمایز باشد به طوری که $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{A}$ آن‌گاه $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

حال اگر μ یک پیش اندازه روی $\mathcal{A}\subset P(X)$ باشد، با توجه به قضیه (۱۰۱) در زیر، μ به یک اندازه خارجی μ^* روی $P(X)$ توسیع می‌یابد. در قضیه (۱۰۶) خواهیم دید که $\mu^*|_{\mathcal{A}}=\mu$ و هر مجموعه در $\mathcal{A}$، μ^*-اندازه‌پذیر است و در قضیه (۱۰۸) نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$، σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{A}$ باشد آن‌گاه یک اندازه مانند $\bar{\mu}$

روی $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ وجود دارد به طوری که تحدید آن به $\mathcal{A}$ پیش اندازه μ است، یعنی $\bar{\mu}=\mu^*|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ که در آن μ^* در قضیه (۱۰۱) داده شده است.

با توجه به این که هر جبر $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X یک نیم حلقه است، اما لزوماً عکس آن برقرار نیست. در قضیه (۱۰۱) بجای $\mathcal{A}$ از $\mathcal{S}$ (نیم حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X) را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $(X, \mathcal{S}, \mu)$ یک فضای اندازه (تعریف (۷۳)) است. برای هر زیرمجموعه A از X تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) : A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \text{ دنباله‌ای در } \mathcal{S} \text{ است } \{A_n\}\right\} \qquad (1)$$

اگر هیچ دنباله $\{A_n\}$ از $\mathcal{S}$ با شرط $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ وجود نداشته باشد قرار می‌دهیم $\mu^*(A)=\infty$. (در واقع $\inf\emptyset=\infty$).

قضیه ۱۰۱. تابع مجموعه‌ای تعریف شده توسط رابطه (۱) یک اندازه خارجی است. (آن را اندازه خارجی تولید شده توسط μ یا توسیع کاراتئودوری μ نامیم).

اثبات. واضح است که برای هر $A\subset X$، $\mu^*(A)\geq 0$. اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $A_n=\emptyset$ آنگاه

$$0\leq\mu^*(\emptyset)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\emptyset)=0$$

پس $\mu^*(\emptyset)=0$.

برای یکنوایی μ^*، فرض کنید $A\subset B$. اگر $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ که $\{A_n\}\subset\mathcal{S}$ آنگاه $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ پس $\mu^*(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ (اگر دنباله $\{A_n\}$ از عناصر $\mathcal{S}$ وجود نداشته باشد به طوری که B را بپوشاند آنگاه $\mu^*(B)=\infty$ و $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$ واضح است). بنابراین

$$\mu^*(B)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) : B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ \{A_n\}\subset\mathcal{S}\right\}\geq\mu^*(A).$$

پس μ^* یکنوا است.

برای σ- زیرجمعی بودن μ^* ، فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X است. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)=\infty$ آن‌گاه به وضوح داریم

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n).$$

بنابراین، فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)<\infty$ و $\epsilon>0$ داده شده است. برای هر n دنباله $\{A_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ از عناصر S را انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}A_n^k ,$$

و

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_n^k) \leq \mu^*(A_n)+\frac{\epsilon}{2^n}.$$

برای هر k و n مجموعه‌های A_n^k در S اند و

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \subset \bigcup_{=1}^{\infty}\bigcup_{=1}^{\infty}A_n^k$$

بنابراین

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) \leq \sum_{=1}^{\infty}\sum_{=1}^{\infty}\mu(A_n^k) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(\mu^*(A_n)+\frac{\epsilon}{2^n})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)+\epsilon$$

چون رابطه بالا برای هر $\epsilon>0$ برقرار است پس

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n).$$

یعنی μ^* یک اندازه خارجی است.

درحالت کلی μ^* یک اندازه نیست، زیرا ممکن است روی $P(X)$، جمعی‌شمارا نباشد. بهرحال اگر μ^* به σ-جبر تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر، Λ، تحدید شود آن‌گاه از قضیه (۹۸) دیده می‌شود که σ-جمعی است و درنتیجه روی Λ یک اندازه (اندازه کامل) است. در قضیه بعد نشان داده‌ایم که اندازه خارجی μ^* توسیع μ از S به روی $P(X)$ است.

قضیه ۱۰۲. اگر $A \in S$ آن‌گاه $\mu^*(A)=\mu(A)$.

اثبات. فرض کنید $A\in S$. قرار می‌دهیم $A_1=A$ و برای $n\geq 2$، $A_n=\emptyset$. آن‌گاه

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$$

فرض کنید $\{A_n\}\subset S$ و $A\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. از خاصیت σ-زیرجمعی بودن μ (قضیه ۷۴) داریم

$$\mu(A)\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

پس $\mu(A)\leq \mu^*(A)$. یعنی $\mu^*(A)=\mu(A)$.

چون μ^* توسیع μ از S به $\mathcal{P}(X)$ است، گاهی اوقات بجای عبارت "اندازه خارجی A" از "اندازه A" استفاده می‌کنیم. مجموعه‌های اندازه‌پذیر یک اندازه خارجی تولید شده توسط یک اندازه دارای مشخصه‌های جالب و مفیدی هستند که در قضیه بعد، برخی از آنها را آورده‌ایم.

قضیه ۱۰۳. فرض کنید (X,S,μ) یک فضای اندازه است که در آن X ناتهی و $S\subset\mathcal{P}(X)$ نیم‌حلقه و μ در تعریف (۷۳) آمده است. فرض کنید μ^* اندازه خارجی تولید شده توسط μ با رابطه (۱) است. برای زیرمجموعه E از X عبارات زیر با هم معادلند:

الف) E نسبت به μ^* اندازه‌پذیر است.

ب) برای هر $A\in S$ که $\mu(A)<\infty$ داریم $\mu(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$.

ج) برای هر $A\in S$ که $\mu(A)<\infty$ داریم $\mu(A)\geq \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$.

د) برای هر $A\subset X$ داریم $\mu^*(A)\geq \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$.

اثبات. (الف) ⇐ (ب) ⇐ (ج) واضح‌اند.

(ج) ⇐ (د). فرض کنید $A\subset X$. اگر $\mu^*(A)=\infty$ آن‌گاه (د) به وضوح برقرار

است. بنابراین فرض کنید $\mu^*(A)<\infty$ و $\varepsilon>0$ داده شده است. دنباله $\{A_n\}$ از عناصر S با $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\mu^*(A)+\varepsilon$ را انتخاب می‌کنیم.
پس برای هر n، $\mu(A_n)<\infty$ و بنابراین از (ج) برای هر n داریم

$$\mu(A_n)\geq\mu^*(A_n\cap E)+\mu^*(A_n\cap E^c)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)&\leq\mu^*\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\big)\cap E\Big)+\mu\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\big)\cap E^c\Big)\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n\cap E)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n\cap E^c)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\mu^*(A_n\cap E)+\mu^*(A_n\cap E^c)\big)\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)\\&\leq\mu^*(A)+\varepsilon.\end{aligned}$$

پس

$$\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c).$$

(د) $\Leftarrow$ (الف). از خاصیت σ-زیرجمعی بودن μ^* داریم

$$\mu^*(A)\leq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$

بنابراین برای هر $A\subset X$ داریم

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$

یعنی E اندازه‌پذیر نسبت به μ^* است.

تعریف ۱.۰۴. زیرمجموعه E از فضای اندازه (X,S,μ) را اندازه‌پذیر (یا μ-اندازه‌پذیر) نامیم، هرگاه E نسبت به اندازه خارجی μ^* تولید شده توسط μ اندازه‌پذیر باشد.

قضیه ۱.۰۵. هر عضو نیم حلقه S اندازه‌پذیر است، یعنی $S\subset\Lambda$.

اثبات. فرض کنید $E \in \mathcal{S}$. نشان می‌دهیم E یک مجموعه اندازه‌پذیر است، (μ^*-اندازه‌پذیر). اگر $A \in \mathcal{S}$ آن‌گاه تعدادی متناهی مجموعه‌های مجزای $B_1, \dots, B_n$ در $\mathcal{S}$ وجود دارند به طوری که

$$A \setminus E = \bigcup_{i=1}^{n} B_i .$$

خانواده $\{A \cap E, B_1, \dots, B_n\}$ خانواده‌ای مجزا از عناصر $\mathcal{S}$ است به طوری که

$$A = (A \cap E) \cup B_1 \cup \dots \cup B_n .$$

از خاصیت ۵- زیرجمعی بودن μ^* داریم

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) &\le \mu(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i) \\ &= \mu(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \\ &= \mu(A), \end{aligned}$$

که در آن از قضیه (۱.۲) و ۵-جمعی بودن μ روی $\mathcal{S}$ استفاده کرده‌ایم. حال طبق قضیه (۱.۴)، E اندازه‌پذیر است یعنی $\mathcal{S} \subset \Lambda$.

حال مطالب مشابهی برای پیش اندازه‌ها روی جبرها و اندازه خارجی μ^* تولیدشده توسط پیش اندازه μ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۶. اگر μ یک پیش اندازه (تعریف (۱.۰)) روی جبر $\mathcal{A}$ بوده و μ^* توسط

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \qquad (۲)$$

تعریف شده باشد آن‌گاه

الف) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$.

ب) هر مجموعه در $\mathcal{A}$، μ^*-اندازه‌پذیر است.

اثبات. الف) فرض کنید $E \in \mathcal{A}$ و $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ که در آن $A_n \in \mathcal{A}$ برای هر n. قرار دهید

$$B_n = E\cap \left(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$

در این صورت B_n ها عناصر متمایزی از $\mathcal{A}$ بوده و $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = E$ پس

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\end{aligned}$$

در نتیجه $\mu(E)\le\mu^*(E)$. حال چون $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ برای $A_1=E$ و $A_n=\emptyset$ به ازای $n>1$ پس $\mu^*(E)\le\mu(E)$. یعنی $\mu^*(E)=\mu(E)$.

ب) فرض کنید $A\in\mathcal{A}$ و $E\subset X$ و $\epsilon>0$ داده شده است. پس دنباله $\{B_n\}_1^{\infty}$ در $\mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\le\mu^*(E)+\epsilon$$

از طرفی چون μ روی $\mathcal{A}$ جمعی است، بنابراین

$$\begin{aligned}\mu^*(E)+\epsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n\cap A)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n\cap A^c)\\ &\geq \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)\end{aligned}$$

چون $\epsilon>0$ دلخواه است پس

$$\mu^*(E)\geq\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$$

یعنی A در $\mathcal{A}$، μ^*-اندازه‌پذیر است.

توضیح ۱.۷. مشابه قضیه (۱.۶)، قضایای (۱.۲) و (۱.۵) برای نیم‌حلقه $\mathcal{S}$ مورد بررسی قرار گرفتند.

قضیه ۱.۸. فرض کنید $\mathcal{A}\subset P(X)$ یک جبر، μ یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{M}(\mathcal{A})$، σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{A}$ است. در این صورت، اندازه $\bar{\mu}$ روی $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ وجود دارد به طوری که تحدید آن به $\mathcal{A}$ همان μ است یعنی $\bar{\mu}=\mu^*|_{\mathcal{A}}$ که در آن μ^* توسط

رابطهٔ (۲) تعریف شده است. اگر ν یک چنین اندازهٔ دیگری روی $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ باشد آنگاه برای هر $E\in\mathcal{M}(\mathcal{A})$، $\nu(E)\leq\bar{\mu}(E)$ و تساوی رخ می‌دهد هرگاه $\bar{\mu}(E)<\infty$. اگر μ یک پیش اندازهٔ σ-متناهی باشد آنگاه $\bar{\mu}$ توسیع منحصر به فرد μ به یک اندازه روی $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ است.

اثبات. نتیجه خواسته شده در قسمت اول قضیه از قضایای (۹۸) و (۱۰۶) حاصل می‌شود، زیرا σ-جبر مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر شامل $\mathcal{A}$ است و بنابراین شامل $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ است.

اگر $E\in\mathcal{M}(\mathcal{A})$ و $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ که در آن $A_n\in\mathcal{A}$ آنگاه

$$\nu(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

پس $\nu(E)\leq\bar{\mu}(E)$. همچنین، مشاهده می‌شود که اگر $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ داریم

$$\nu(A)=\lim_{n\to\infty}\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)=\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)=\bar{\mu}(A).$$

اگر $\bar{\mu}(E)<\infty$ آنگاه A_nها را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\bar{\mu}(A)<\bar{\mu}(E)+\varepsilon,$$

بنابراین $\bar{\mu}(A\setminus E)<\varepsilon$ و

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(E)\leq\bar{\mu}(A)&=\nu(A)=\nu(E)+\nu(A\setminus E)\\&\leq\nu(E)+\bar{\mu}(A\setminus E)\\&\leq\nu(E)+\varepsilon\end{aligned}$$

چون ε دلخواه است پس $\bar{\mu}(E)=\nu(E)$. نهایتاً اگر $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ که در آن

$$\mu(A_n)<\infty,$$

می‌توان فرض کرد که A_nها مجزاانند. پس برای هر $E\in\mathcal{M}(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(E)&=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}(E\cap A_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E\cap A_n)=\nu(E),\end{aligned}$$

پس $\bar{\mu}=\nu$.

اثبات قضیه (۱۰۸) بیان می‌کند که μ را می‌توان به یک اندازه روی Λ شامل تمام مجموعه‌های μ^*-اندازه پذیر توسیع داد. رابطه بین $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ و Λ در تمرینات آمده است.

تعریف ۱۰۹. فرض کنید $\{A_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X است به طوری که

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad \forall n,$$

و $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. در این صورت می‌نویسیم $A_n \uparrow A$. به طور مشابه $A_n \downarrow A$ به معنای آن است که برای هر n، $A_{n+1} \subset A_n$ و $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$.

قضیه ۱۱۰. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه است و $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر است. در این صورت

الف) اگر $E_n \uparrow E$ آنگاه $\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$، که μ^* توسط (۱) تعریف شده است.

ب) اگر $E_n \downarrow E$ و به ازای k یی $\mu^*(E_k) < \infty$ آنگاه $\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$.

در قضیه (۸۵) این قضیه برای σ-جبرها مطرح و ثابت شده است. در اینجا آن را برای نیم حلقه S در نظر گرفته‌ایم و اثبات آن در جای خود جالب است.

اثبات. الف) قرار می‌دهیم $B_1 = E_1$ و برای $n \geq 2$، $B_n = E_n \setminus E_{n-1}$. در این صورت هر B_n اندازه پذیر است و برای $i \neq j$ داریم $B_i \cap B_j = \phi$. علاوه بر آن، $E_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$ و $E = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$. با توجه به خاصیت σ-زیرجمعی بودن μ^* داریم

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\right)$$
$$\leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(B_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E_i).$$

از طرف دیگر طبق قضیه (۹۷) برای هر k داریم

$$\sum_{n=1}^k \mu^*(B_n) = \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^k B_n\right)\right) \leq \mu^*(E).$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) \le \mu^*(E)$$

پس $\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(B_n)$ ، یعنی

$$\mu^*(E)=\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} \mu^*(B_n)$$

اما $\sum_{n=1}^{k}\mu^*(B_n)=\mu^*(E_k)$ پس

$$\mu^*(E)=\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k),$$

یعنی $\mu^*(E_n)\uparrow\mu^*(E)$.

ب) بدون کم شدن از کلیت بحث، فرض کنید $\mu^*(E_1)<\infty$ ، چون $E_n \downarrow E$

پس $E_1\setminus E_n \uparrow E_1\setminus E$ و از (الف) داریم

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*(E_1\setminus E_n)=\mu^*(E_1\setminus E)$$

از خاصیت یکنوایی اندازه خارجی و فرض $\mu^*(E_1)<\infty$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}(\mu^*(E_1)-\mu^*(E_n)) = \mu^*(E_1)-\mu^*(E)$$

یعنی $\mu^*(E_n)\downarrow\mu^*(E)$.

به عنوان کاربردی از نتایج به دست آمده، اندازه خارجی لبگ روی $\mathbb{R}$ را که تعمیم مفهوم طول است، می‌توان در نظر گرفت. در مثال (۳) از بخش (۴.۱) و توضیح (۷۵) دیدیم که اندازه لبگ λ اندازه تعریف شده روی نیم حلقه $S=\{[a,b) : a,b\in\mathbb{R},\ a\le b\}$ توسط $\lambda([a,b))=b-a$ است. اندازه خارجی تولید شده توسط λ را λ^* می‌نامیم. زیرمجموعه $I\subset\mathbb{R}$ را یک فاصله نامیم، اگر برای هر $x,y\in I$ که $x<y$ داشته باشیم $[x,y]\subset I$. اگر I دارای هر یک از فرم‌های $[a,b)$ ، $(a,b]$ ، $[a,b]$ یا (a,b) با $-\infty<a<b<\infty$ باشد گوییم I کراندار است و طول آن توسط $|I|=b-a$ تعریف می‌شود. اگر I بی‌کران باشد آن‌گاه طول آن را بی‌نهایت نامیم و می‌نویسیم $|I|=\infty$. در زیر نشان می‌دهیم که هر فاصله I از $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر لبگ است و $\lambda^*(I)=|I|$. از قضیه

(۱۰۵) دیده می‌شود که هر مجموعه به شکل $[a,b)$ با $-\infty<a<b<\infty$ اندازه‌پذیر لبگ است، و از قضیه (۱۰۲) نتیجه می‌شود که

$$\lambda^*([a,b)) = \lambda([a,b)) = b-a = |[a,b)|.$$

حال دو حالت کلی را بررسی می‌کنیم، بقیه حالت‌ها مشابه‌اند. فرض کنید فاصله کراندار به شکل $I=[a,b]$ است. قرار می‌دهیم $E_n=[a,b+\frac{1}{n})$ (برای هر n). در نتیجه E_nها اندازه‌پذیر لبگ هستند و $E_n \downarrow I$. بنابراین I اندازه‌پذیر لبگ است و طبق قضیه (۱۱۰) قسمت (ب) داریم

$$\lambda^*(I) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*([a,b+\tfrac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty}(b+\tfrac{1}{n}-a) = b-a = |I|.$$

حالت دوم، فرض کنید فاصله به صورت $I=[a,\infty)$ است، قرار می‌دهیم

$$F_n = [a,a+n), \quad \forall n,$$

و داریم $F_n \uparrow I$. طبق قضیه (۱۱۰) قسمت (الف)، I اندازه‌پذیر لبگ است و

$$\lambda^*(I) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*([a,a+n)) = \lim_{n\to\infty} n = \infty = |I|.$$

در تعریف (۸۲) متناهی بودن اندازه μ روی σ-جبر $\mathcal{A}$ را بیان کردیم و در تعریف (۸۳) مفهوم σ-متناهی بودن اندازه μ روی σ-جبر $\mathcal{A}$ را داشتیم. در رابطه با فضای اندازه (X,S,μ) که در آن S یک سیگما حلقه از زیرمجموعه‌های X است و μ اندازه روی S به مفهوم تعریف (۷۴) است، بنابراین دو کلاس مهم از فضاهای اندازه را در نظر می‌گیریم و خواص مربوط به این فضاهای اندازه را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱۱۱. فضای اندازه (X,S,μ) را

الف) متناهی گوییم، هرگاه $\mu^*(X)<\infty$ و

ب) σ-متناهی نامیم، هرگاه دنباله $\{X_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر موجود باشد به طوری که $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و برای هر n، $\mu^*(X_n)<\infty$.

به وضوح هر فضای اندازه متناهی، σ-متناهی است. فضای اندازه (X, S, μ) σ-متناهی است اگر و تنها اگر دنباله $\{X_n\}$ از زیرمجموعه های X متعلق به S وجود داشته باشد به طوری که $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و برای هر n، $\mu(X_n)<\infty$. زیرا فرض کنید (X, S, μ) یک فضای σ-متناهی است. دنباله $\{X_n\}$ از مجموعه های اندازه پذیر را چنان انتخاب می کنیم که $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و برای هر n، $\mu^*(X_n)<\infty$. برای هر i دنباله $\{A_n^i\}$ از S را انتخاب می کنیم به طوری که $X_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^i) < \mu^*(X_i)+1<\infty$$

پس برای هر n و هر i، $A_n^i\in S$ و $\mu(A_n^i)<\infty$ و $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$ و حکم از قضیه (۵۳) و توضیح (۵۴) حاصل می شود. برعکس آن واضح است.

توضیح ۱۱۲. قضیه (۱۰۵) و قضیه (۵۴) با هم نشان می دهند که در تعریف μ^* با رابطه (۲) می توانیم تنها دنباله های مجزا از عناصر S را در نظر بگیریم، یعنی برای هر زیرمجموعه A از X

(۳) $\mu^*(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) : \{A_n\}\subset S,\ A\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ دنباله دو به دو مجزا $\{A_n\}\}$ و $\inf\emptyset=\infty$.

از این نقطه نظر و با توجه به رابطه (۳) در اثبات قضیه زیر که توسیع منحصر به فرد μ به σ-جبر مجموعه های اندازه پذیر آن است، از استدلالی استفاده می کنیم که شبیه به قضیه (۱۰۸) می باشد با کمی تغییرات و وسعت محدوده مورد مطالعه آن.

قضیه ۱۱۳. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه σ-متناهی است و Σ نیم حلقه ای از مجموعه ها باشد به طوری که $S\subset \Sigma\subset \Lambda$ و ν یک اندازه روی Σ است. اگر روی S داشته باشیم $\nu=\mu$ آنگاه روی Σ داریم $\nu=\mu^*$. بالاخص، در این حالت نتیجه می شود که μ^* تنها توسیع μ به یک اندازه روی Λ است.

اثبات. فرض کنید ν^* اندازه خارجی تولید شده توسط (X, Σ, ν) است. فرض

کنید $A\subset X$ و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از عناصر S است به طوری که $A\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. چون μ و ν روی S برابرند، پس

$$\nu^*(A)\le \sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

و این نشان می‌دهد که برای هر $A\subset X$، $\nu^*(A)\le\mu^*(A)$.

حال فرض کنید $A\in\Sigma$ است و $\mu^*(A)<\infty$. نشان می‌دهیم که $\mu^*(A)\le\nu(A)$ و در نتیجه $\mu^*(A)=\nu(A)$ در این حالت حاصل می‌شود. برای این منظور، فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است. دنباله مجزای $\{A_n\}$ از عناصر S را چنان انتخاب می‌کنیم که $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\mu^*(A)+\epsilon.$$

قرار می‌دهیم $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و توجه داریم که

$$\mu^*(B)<\mu^*(A)+\epsilon.$$

از طرفی داریم

$$\nu^*(B\setminus A)\le\mu^*(B\setminus A)=\mu^*(B)-\mu^*(A)<\epsilon.$$

بنابراین برای هر $\epsilon>0$ داریم

$$\begin{aligned}\mu^*(A)\le\mu^*(B)=\nu^*(B)&=\nu^*(A)+\nu^*(B\setminus A)\\ &<\nu(A)+\epsilon,\end{aligned}$$

پس $\mu^*(A)\le\nu(A)$.

برای حالت کلی، فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای مجزا از عناصر S است که X را می‌پوشاند و برای هر n، $\mu^*(X_n)<\infty$. اگر $A\in\Sigma$ آنگاه طبق قسمت اول اثبات برای هر n داریم

$$\mu^*(X_n\cap A)=\nu(X_n\cap A),$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\mu^*(A)&=\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n\cap A)\Big)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(X_n\cap A)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(X_n\cap A)=\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n\cap A)\Big)=\nu(A).\end{aligned}$$

مجموعه‌های اندازه‌پذیر از یک فضای اندازه متناهی دارای مشخصه ساده‌ای هستند.

قضیه ۱۱۴. فرض کنید $(X,\mathcal{S},\mu)$ یک فضای اندازه متناهی است و E زیرمجموعه‌ای از X باشد. آنگاه E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $\mu^*(E)+\mu^*(E^c)=\mu^*(X)$.

اثبات. به وضوح، اگر E اندازه‌پذیر باشد آنگاه $\mu^*(E)+\mu^*(E^c)=\mu^*(X)$.
برای عکس آن، فرض کنید $\mu^*(E)+\mu^*(E^c)=\mu^*(X)$ و $A\in\mathcal{S}$. اندازه‌پذیری A را برای E و E^c استفاده می‌کنیم، داریم

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c),$$
$$\mu^*(E^c)=\mu^*(E^c\cap A)+\mu^*(E^c\cap A^c).$$

با جمع طرفین نظیر در روابط بالا داریم

$$\begin{aligned}\mu^*(X)&=\mu^*(E)+\mu^*(E^c)\\&=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E^c\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E^c\cap A^c)\\&\geq \mu^*(A)+\mu^*(A^c)=\mu^*(X)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\mu^*(A)+\mu^*(A^c)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E^c\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E^c\cap A^c)$$

حال چون $\mu^*(X)<\infty$ و $\mu^*(A^c)\leq\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E^c\cap A^c)$ پس

$$\begin{aligned}\mu^*(A)-\mu^*(E\cap A)-\mu^*(E^c\cap A)&=\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E^c\cap A^c)-\mu^*(A^c)\\&\geq\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E^c\cap A^c)-\mu^*(E\cap A^c)-\mu^*(E^c\cap A^c)\\&=0\end{aligned}$$

یعنی

$$\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$

پس E اندازه‌پذیر است.

زیرمجموعه A از فضای اندازه (X, S, μ) را σ-متناهی نامیم، هرگاه دنباله $\{A_n\}$ از عناصر S وجود داشته باشد به طوری که $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\mu(A_n) < \infty$. دنباله $\{A_n\}$ را می‌توان دو به دو متمایز در نظر گرفت.

با تکرار اثبات قضیه (۱۱۴) می‌توان حالت کلی زیر را به دست آورد:

فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه و Σ نیم حلقه‌ای از مجموعه‌ها است به طوری که $S \subset \Sigma \subset \Lambda$ و ν اندازه‌ای روی Σ باشد. اگر روی S، $\mu = \nu$ باشد آن‌گاه برای هر مجموعه σ-متناهی A از Σ داریم $\nu(A) = \mu^*(A)$.

باید توجه کرد که فرض σ-متناهی بودن در قضیه (۱۱۴) را نمی‌توان حذف کرد. به عنوان مثال، فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و S نیم حلقه‌ای شامل مجموعه تهی و زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ به شکل $[a, b)$ است و μ توسط $\mu(\emptyset) = 0$ و $\mu([a, b)) = \infty$ تعریف شده باشد. در این صورت (X, S, μ) یک فضای اندازه است که σ-متناهی نیست. علاوه بر آن $\Lambda = P(X)$ و برای هر زیرمجموعه ناتهی A از X داریم $\mu^*(A) = \infty$. به سادگی دیده می‌شود که اندازه گسترشی یک توسیع μ به Λ است که با μ^* متفاوت می‌باشد (تمرین).

یکی دیگر از خواص مهم μ^* در قضیه زیر شرح داده شده است که تعمیم قضیه (۱۰۸) است.

قضیه ۱۱۵. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه و Σ نیم حلقه‌ای است که $S \subset \Sigma \subset \Lambda$. اگر ν تحدید μ^* به Σ باشد آن‌گاه اندازه خارجی ν^* تولید شده توسط فضای اندازه (X, Σ, ν) دقیقاً μ^* است. یعنی برای هر زیرمجموعه A از X داریم $\nu^*(A) = \mu^*(A)$.

اثبات. فرض کنید $A \subset X$. اگر $\{A_n\} \subset \Sigma$ دنباله‌ای باشد به طوری که $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ آن‌گاه از خاصیت σ-زیرجمعی بودن μ^* داریم

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

بنابراین

$$\nu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n) : \{A_n\} \subset \Sigma,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \geq \mu^*(A).$$

از طرف دیگر، اگر $\mu^*(A) < \infty$ آن گاه برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، دنباله $\{A_n\}$ از S (و بنابراین در Σ) وجود دارد به طوری که $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \mu^*(A) + \epsilon.$$

اما چون $\nu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ داریم

$$\nu^*(A) \leq \mu^*(A) + \epsilon, \qquad \forall \epsilon > 0$$

پس $\nu^*(A) \leq \mu^*(A)$. بنابراین $\nu^*(A) = \mu^*(A)$. اگر $\mu^*(A) = \infty$ آن گاه به وضوح

$$\nu^*(A) = \mu^*(A) = \infty.$$

در قضیه بعد زیرمجموعه دلخواه A از X را توسط یک مجموعه اندازه پذیر تقریب می زنیم.

قضیه ۱۱۶. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه است. اگر A زیرمجموعه دلخواهی از X باشد آن گاه مجموعه اندازه پذیر E وجود دارد به طوری که $A \subset E$ و $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

اثبات. فرض کنید $A \subset X$. اگر $\mu^*(A) = \infty$ آن گاه $E = X$ در خاصیت مورد نظر صدق می کند. بنابراین فرض می کنیم $\mu^*(A) < \infty$. برای هر i دنباله $\{A_n^i\}$ از S را انتخاب می کنیم به طوری که $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n^i) < \mu^*(A) + \frac{1}{i}$$

فرض کنید $E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$، در این صورت E_i ها مجموعه های اندازه پذیرند و $A \subset E_i$. قرار می دهیم $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. پس $A \subset E$ و E اندازه پذیر است (البته اگر S یک σ-جبر باشد آن گاه $E \in S$). علاوه بر آن برای هر i

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(E_i) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n^i) < \mu^*(A) + \frac{1}{i}$$

پس $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

در قضیه قبل، اگر S یک σ-جبر باشد آن‌گاه برای هر $A \subset X$، عضو $E \in S$ وجود دارد به طوری که $A \subset E$ و $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

سؤال طبیعی که مطرح می‌شود این است که آیا هر مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. مثال زیر که منسوب به جی. ویتالی است، نشان می‌دهد که پاسخ این سؤال منفی است.

مثال. فرض کنید λ^* اندازه خارجی تولید شده توسط اندازه لبگ λ روی $\mathbb{R}$ است. رابطه $\sim$ روی $[0,1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x \sim y \quad \text{هرگاه } y - x \text{ عددی گویا باشد}$$

به سادگی دیده می‌شود که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $[0,1]$ است. پس رابطه $\sim$ حاصله $[0,1]$ را به کلاس‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از $[0,1]$ است که با هر کلاس هم‌ارزی حاصل تنها یک نقطه مشترک دارد. طبق اصل انتخاب چنین مجموعه‌ای وجود دارد. ادعا می‌کنیم E اندازه‌پذیر لبگ نیست.

فرض کنید چنین نباشد یعنی E اندازه‌پذیر لبگ است. فرض کنید $r_1, r_2, \ldots$ دنباله‌ای شمارا از اعداد گویا در $[-1,1]$ است. برای هر n قرار می‌دهیم $E_n = \{r_n + x : x \in E\}$. هر E_n اندازه‌پذیر لبگ است و به وضوح برای $n \neq m$ داریم $E_n \cap E_m = \phi$ و $\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E)$ (زیرا λ^* تحت انتقال پایا است). علاوه بر آن

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1,2]$$

از خاصیت σ-جمعی بودن λ^* داریم

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n\,\lambda^*(E)\right) \le \lambda^*([-1,2]) = 3$$

پس باید $\lambda^*(E) = 0$ و بنابراین $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$.

از طرف دیگر، $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ نشان می‌دهد که

$$1 \le \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

که تناقض است. بنابراین E اندازه‌پذیر لبگ نیست.

۱۵.۱ اندازه های بُرل روی $\mathbb{R}$

در این بخش، نظریه کلی اندازه ها مطرح شده در بخش های قبل را برای ساختن اندازه های بُرل روی $\mathbb{R}$ یعنی اندازه هایی با دامنهٔ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ به کار می بریم. در این بخش فاصله های چپ-باز و راست-بسته در $\mathbb{R}$ (یعنی مجموعه های به فرم $(a,b]$ یا (a,∞) یا ϕ) را h-فاصله نامیم (h برای نیم باز). به وضوح اشتراک دو h-فاصله یک h-فاصله است و متمم یک h-فاصله یک h-فاصله یا اجتماع دو h-فاصله مجزا است. طبق قضیه (۷۱)، خانواده $\mathcal{A}$ از اجتماع های مجزای تعدادی متناهی h-فاصله یک جبر است و از قضیه (۹۵) نتیجه می شود که σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{A}$، σ-جبر بُرل $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است.

اگر $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد آنگاه F در هر نقطه دارای حد راست و حد چپ است:

$$F(a^+)=\lim_{x\to a^+}F(x)=\inf_{x>a}F(x),$$

$$F(a^-)=\lim_{x\to a^-}F(x)=\sup_{x<a}F(x).$$

علاوه بر آن مقادیر حدی $F(\infty)=\sup_{x\in\mathbb{R}}F(x)$ و $F(-\infty)=\inf_{x\in\mathbb{R}}F(x)$ موجودند (امکان دارد برابر $\pm\infty$ باشند). گوییم F پیوسته از راست است هرگاه

$$F(a)=F(a^+),\quad \forall a\in\mathbb{R}.$$

قضیه ۱۱۷. فرض کنید $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ صعودی و پیوسته از راست است. برای h-فاصله های $(a_j,b_j]$، $j=1,\dots,n$، فرض کنید

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]\Big)=\sum_{j=1}^{n}\left[F(b_j)-F(a_j)\right],$$

و $\mu(\phi)=0$. آنگاه μ یک پیش اندازه روی جبر $\mathcal{A}$ است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم μ خوش تعریف است. چون عناصر جبر $\mathcal{A}$ را می‌توان به بیش از یک طریق به عنوان اجتماع‌های h-فاصله‌های مجزا نمایش داد، اگر $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^{n}$ مجزا بوده و $(a,b] = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$ آنگاه بعد از مرتب کردن مجدد آنها و اندیس گذاری جدید، باید $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots < b_n = b$ شود. پس

$$\sum_{j=1}^{n} [F(b_j) - F(a_j)] = F(b) - F(a).$$

در حالت کلی، اگر $\{I_i\}_1^n$ و $\{J_j\}_1^m$ دنباله‌های متناهی از h-فاصله‌های مجزا باشند به طوری که $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(J_j).$$

پس μ خوش تعریف است و با توجه به تعریف μ جمعی متناهی می‌باشد.

کافی است نشان دهیم اگر $\{I_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از h-فاصله‌های مجزا با $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \in \mathcal{A}$ باشد آنگاه $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j)$. از جمعی متناهی بودن μ، می‌توان فرض کرد $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ یک h-فاصله به صورت $I = (a,b]$ است و داریم

$$\mu(I) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big) + \mu\Big(I \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(I_j)$$

حال با فرض $n \to \infty$ نتیجه می‌شود که

$$\mu(I) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j)$$

برای اثبات عکس نامساوی بالا، فرض کنید که $-\infty < a < b < \infty$ و $\epsilon > 0$ داده شده است. چون F از راست پیوسته است، پس $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$F(a+\delta) - F(a) < \epsilon,$$

و اگر $I_j = (a_j, b_j]$ برای هر j، عدد $\delta_j > 0$ وجود دارد به طوری که

$$F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \epsilon 2^{-j}.$$

فواصل باز $(a_j, b_j + \delta_j)$ مجموعه فشرده $[a+\delta, b]$ را می‌پوشانند پس دارای زیرپوشش متناهی است. با کنار گذاشتن هر $(a_j, b_j + \delta_j)$ که در یکی از بزرگترها مشمول است و با اندیس گذاری مجدد j می‌توان فرض کرد که

الف) فواصل $(a_1, b_1+\delta_1)$، ...، $(a_N, b_N+\delta_N)$ مجموعهٔ $[a+\delta, b]$ را می‌پوشانند،

ب) $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$،

ج) برای $j = 1, 2, \ldots, N-1$، $b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1}+\delta_{j+1})$.

اما در این صورت

$$\begin{aligned}
\mu(I) &\leq F(b) - F(a+\delta) + \epsilon \\
&\leq F(b_N+\delta_N) - F(a_1) + \epsilon \\
&= F(b_N+\delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1}[F(a_{j+1}) - F(a_j)] + \epsilon \\
&\leq F(b_N+\delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1}[F(b_j+\delta_j) - F(a_j)] + \epsilon \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) + 2\epsilon .
\end{aligned}$$

چون $\epsilon > 0$ دلخواه است، وقتی a و b متناهی باشند یعنی $-\infty < a < b < +\infty$ حکم حاصل می‌شود. اگر $a = -\infty$، برای هر $M < \infty$ فاصله‌های $(a_j, b_j+\delta_j)$ مجموعهٔ $[-M, b]$ را می‌پوشانند، با همان استدلال بالا داریم

$$F(b) - F(-M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) + 2\epsilon .$$

درحالی که اگر $b = \infty$ به طریق مشابه به ازای هر $M < \infty$ داریم

$$F(M) - F(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) + 2\epsilon$$

حال با فرض $\epsilon \to 0$ و $M \to \infty$ حکم حاصل می‌شود.

قضیه ۱۱۸. فرض کنید $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی صعودی و پیوسته راست است، اندازه منحصر به فرد μ_F روی $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ وجود دارد به طوری که برای هر $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a).$$

اگر G تابع دیگری از این نوع باشد، $\mu_F = \mu_G$ اگر و تنها اگر $F - G$ ثابت باشد. برعکس اگر μ اندازه‌ای روی $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ بوده که روی تمام مجموعه‌های بُرل کراندار متناهی باشد و تعریف کنیم

$$F(x)=\begin{cases}\mu((0,x]) & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -\mu((x,0]) & x<0,\end{cases}$$

آن‌گاه F صعودی و از راست پیوسته است و $\mu=\mu_F$.

اثبات. طبق قضیه (۱۱۷)، هر تابع F با شرایط بالا یک پیش‌اندازه روی $\mathcal{A}$ القاء می‌کند. واضح است که F و G پیش‌اندازهٔ یکسانی القاء می‌کنند اگر و تنها اگر $F-G$ ثابت باشد و این پیش‌اندازه‌ها σ-متناهی‌اند (زیرا $\mathbb{R}=\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}(j,j+1]$). بنابراین دو حکم نخست از قضیه (۱۰۸) نتیجه می‌شوند. برای حکم آخر، یکنوایی μ، یکنوایی F را ایجاب می‌کند و پیوستگی μ از بالا و پایین، پیوستگی راست F را به ترتیب برای $x\geq 0$ و $x<0$ نتیجه می‌دهند. بدیهی است که روی $\mathcal{A}$ داریم $\mu_F=\mu$ و بنابراین روی $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ داریم $\mu=\mu_F$ (طبق قسمت منحصربفردی در قضیه (۱۰۸)).

توضیح ۱۱۹. الف) این نظریه را می‌توان به طور یکسان با به کارگیری فاصله‌هایی به شکل $[a,b)$ و توابع پیوسته چپ مانند F ایجاد کرد.

ب) اگر μ یک اندازه برل متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد آن‌گاه $\mu=\mu_F$ که در آن $F(x)=\mu((-\infty,x])$ است. این تابع F را تابع توزیع تجمعی μ نامیم. این تابع با تابع F ای که در قضیه (۱۱۸) معرفی شد، با مقدار ثابت $\mu((-\infty,0])$ تفاوت دارد.

ج) نظریه ارائه شده در بخش (۹.۱) برای هر تابع صعودی و از راست پیوسته مانند F، نه فقط اندازه برل μ_F بلکه اندازه کاملی مانند $\overline{\mu}_F$ که دامنه‌اش شامل $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است را نتیجه می‌دهد. در واقع $\overline{\mu}_F$ دقیقاً کامل شده μ_F است (قضیه (۱۰۸) و توضیحات بعد از آن) و می‌توان نشان داد که دامنهٔ $\overline{\mu}_F$ همواره اکیداً بزرگتر از $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است. معمولاً این اندازه کامل را نیز با μ_F نشان می‌دهیم. این اندازه کامل را اندازهٔ لبگ-استیلجس (یا لبگ-استیلتیس) متناظر به F نامند.

اندازه‌های لبگ-استیلجس از برخی خواص قابل توجهی برخوردارند که اکنون به آنها خواهیم پرداخت.

در این بحث اندازه لبگ-استیلجس مانند μ روی $\mathbb{R}$ که به تابع صعودی و پیوسته راست F متناظر است را ثابت گرفته و دامنه μ را با $\mathcal{M}_\mu$ نشان می‌دهیم. بنابراین به ازای هر $E\in\mathcal{M}_\mu$،

$$\mu(E)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}[F(b_j)-F(a_j)]\ :\ E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j]\right\}$$
$$=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j,b_j])\ :\ E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j]\right\}.$$

نخست خواهیم دید که در فرمول دوم برای $\mu(E)$، h-فاصله‌ها با فاصله‌های باز قابل تعویض هستند.

لم ۱۲۰. برای هر $E\in\mathcal{M}_\mu$،

$$\mu(E)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j,b_j))\ :\ E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)\right\}.$$

اثبات. عبارت سمت راست در بالا را $\nu(E)$ می‌نامیم. اگر $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)$، فرض کنید $l_j=b_j-a_j$ و

$$I_{jk}=(a_j-l_j\,2^{1-k},\ b_j-l_j\,2^{-k}]\ ,\qquad k\in\mathbb{N}$$

در این صورت $(a_j,b_j)=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{jk}$ پس

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{jk}$$

و

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j,b_j))=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_{jk})\geq\mu(E).$$

بنابراین $\nu(E)\geq\mu(E)$. از طرف دیگر، برای $\varepsilon>0$ داده شده، $\{(a_j,b_j]\}_1^{\infty}$ وجود دارد که $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j]$ و $\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j,b_j])\leq\mu(E)+\varepsilon$ و برای هر j، عدد $\delta_j>0$ وجود دارد به طوری که $F(b_j+\delta_j)-F(a_j)<\varepsilon 2^{-j}$. بنابراین

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,\ b_j+\delta_j)$$

و

$$\sum\mu((a_j,b_j+\delta_j))\leq\sum\mu((a_j,b_j])+\varepsilon\leq\mu(E)+2\varepsilon$$

پس $\nu(E)\leq\mu(E)$.

قضیه ۱۲۱. اگر $E\in \mathcal{M}_\mu$ آنگاه

$$\mu(E)=\inf\{\mu(U) : U\supset E,\ \text{باز است } U\}$$
$$=\sup\{\mu(K) : K\subset E,\ \text{فشرده است } K\}.$$

اثبات. طبق لم (۱۲۰)، برای هر $\varepsilon>0$، دنباله‌ای چون $\{(a_j,b_j)\}$ وجود دارد به طوری که $E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)$ و

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j,b_j))\le\mu(E)+\varepsilon.$$

اگر $U=\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)$ آنگاه U باز است و $E\subset U$ و $\mu(U)\le\mu(E)+\varepsilon$. چون $\varepsilon>0$ دلخواه است پس $\mu(U)\le\mu(E)$. از طرف دیگر اگر U باز بوده و $E\subset U$ آنگاه $\mu(E)\le\mu(U)$. پس تساوی اول برقرار است.

برای تساوی دوم، ابتدا فرض کنید E کراندار است. اگر E بسته باشد یعنی $\bar{E}=E$ آنگاه E فشرده است و تساوی مورد نظر واضح است. در غیر این صورت، برای $\varepsilon>0$ داده شده، می‌توان مجموعه بازی چون $\bar{E}\setminus E\subset U$ انتخاب کرد به طوری که

$$\mu(U)\le\mu(\bar{E}\setminus E)+\varepsilon.$$

فرض کنید $K=\bar{E}\setminus U$ آنگاه K فشرده است و $K\subset E$ و

$$\begin{aligned}\mu(K)&=\mu(E)-\mu(E\cap U)\\&=\mu(E)-[\mu(U)-\mu(U\setminus E)]\\&\geq\mu(E)-\mu(U)+\mu(\bar{E}\setminus E)\\&\geq\mu(E)-\varepsilon.\end{aligned}$$

در این حالت تساوی دوم برقرار است. حال اگر E کراندار نباشد، قرار می‌دهیم

$$E_j=E\cap(j,j+1].$$

طبق استدلال بالا، برای هر $\varepsilon>0$ مجموعه فشرده $K_j\subset E_j$ با $\mu(K_j)\geq\mu(E_j)-\varepsilon 2^{-|j|}$ وجود دارد. فرض کنید $H_n=\bigcup_{j=-n}^{n}K_j$، در این صورت H_nها فشرده‌اند و $H_n\subset E$ و $\mu(H_n)\geq\mu(\bigcup_{j=-n}^{n}E_j)-\varepsilon$. چون $\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{j=-n}^{n}E_j)$ حکم حاصل می‌شود.

قضیه ۱۲۲. اگر $E\subset \mathbb{R}$، آن‌گاه عبارات زیر با هم معادلند

الف) $E\in \mathcal{M}_\mu$.

ب) $E=V\setminus N_1$، که در آن V یک مجموعه G_δ است و $\mu(N_1)=0$.

ج) $E=H\cup N_2$، که در آن H یک مجموعه F_σ است و $\mu(N_2)=0$.

اثبات. به وضوح (ب) و (ج)، قسمت (الف) را ایجاب می‌کنند زیرا μ روی $\mathcal{M}_\mu$ کامل است. فرض کنید $E\in\mathcal{M}_\mu$ و E کرانداراست ($\mu(E)<\infty$). طبق قضیه (۱۲۱) برای هر $j\in\mathbb{N}$ مجموعه باز $U_j\supset E$ و مجموعه فشرده $K_j\subset E$ را می‌توان انتخاب کرد به طوری که

$$\mu(U_j)-2^{-j}\le \mu(E)\le \mu(K_j)+2^{-j}.$$

فرض کنید $V=\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ و $H=\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. در این صورت $H\subset E\subset V$ و

$$\mu(V)=\mu(H)=\mu(E)<\infty.$$

پس $\mu(V\setminus E)=\mu(E\setminus H)=0$. بنابراین نتیجه برای حالت کراندار بودن E حاصل می‌شود. اثبات در حالتی که E کراندار نیست به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

مضمون قضیه (۱۲۲) این است که همهٔ مجموعه‌های برل (یا به طور کلی‌تر همهٔ مجموعه‌های واقع در $\mathcal{M}_\mu$) به شکلی ساده و منطقی به پیمانه مجموعه‌هایی از اندازه صفر هستند. این مطلب به طور محسوسی با ابزارهای لازم برای تعامل مجموعه‌های برل با مجموعه‌های باز قابل قیاس است به شرط آن که مجموعه‌های لوچ مستثنی شوند. به عنوان تمرین می‌توان نشان داد که اگر $E\in\mathcal{M}_\mu$ و $\mu(E)<\infty$ آن‌گاه به ازای هر $\epsilon>0$ مجموعه‌ای چون A وجود دارد که اجتماعی متناهی از بازه‌های باز است و $\mu(E\Delta A)<\epsilon$.

در حالتی که $F(x)=x$، اندازه روی $\mathbb{R}$ را با λ نمایش داده و آن را اندازه لبگ نامیدیم. این اندازه، اندازه کاملی است که به یک بازه طولش را نسبت می‌دهد. دامنه λ خانواده مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ نامیده می‌شود و آن را با $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم. برای بررسی بیشتر این خانواده به تمرین (۵) در صفحه (۴۹) مراجعه شود.