فصل دوم . نظریه انتگرال

۱.۲ توابع اندازه پذیر با مقادیر حقیقی

از قوانین مهم در نظریه انتگرال شناخت مفهوم "تقریباً همه جا" است. قبل از ورود به بحث اصلی توابع اندازه پذیر با مقادیر حقیقی، با عبارت "تقریباً همه جا" آشنا می شویم.

اگر μ (یا μ^*) یک اندازه خارجی روی مجموعه X باشد آنگاه یک رابطه یا گزاره برحسب عناصر X را تقریباً همه جا برقرار نامیم درصورتی که اگر A مجموعه تمام نقاطی از X باشد که برای آن نقاط رابطه یا گزاره برقرار نیست آنگاه A یک مجموعه پوچ باشد (یعنی $\mu^*(A)=0$) و در این صورت می نویسیم

a.e. (رابطه یا گزاره برای عناصر X برقرار است)

به عنوان مثال، اگر توابع f و g از X به توی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشند آنگاه گوییم

$f\leq g$ a.e. هرگاه $\mu(\{x\in X:\ f(x)>g(x)\})=0$

به طور مشابه گوییم دنباله (f_n) از توابع روی X تقریباً همه جا به f همگراست و می نویسیم $f_n\to f$ a.e. هرگاه

$$\mu(\{x\in X:\ f_n(x)\not\to f(x)\})=0.$$

اگر $(X,\mathcal{S},\mu)$ یک فضای اندازه باشد، آنگاه گوییم رابطه ای تقریباً همه جا (به اختصار a.e.) برقرار است، درصورتی که رابطه فوق تقریباً همه جا نسبت به اندازه خارجی μ^* تولید شده توسط μ برقرار باشد.

برخی از روابط تقریباً همه جا، مورد استفاده در این درس در زیر خلاصه شده اند.

فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه است و f, f_n و g توابعی با مقادیر حقیقی تعریف شده روی X اند:

۱. $f=g$ a.e. هرگاه $\mu^*(\{x\in X : f(x)\neq g(x)\})=0$.

۲. $f\geq g$ a.e. هرگاه $\mu^*(\{x\in X : f(x)<g(x)\})=0$.

۳. $f_n\to f$ a.e. هرگاه $\mu^*(\{x\in X : f_n(x)\not\to f(x)\})=0$.

۴. $f_n\uparrow f$ a.e. هرگاه $f_n\leq f_{n+1}$ a.e. برای هر n و $f_n\to f$ a.e.

۵. $f_n\downarrow f$ a.e. هرگاه $f_{n+1}\leq f_n$ a.e. برای هر n و $f_n\to f$ a.e.

توضیح. در این فصل ابتدا بحث انتگرال را برای توابع تعریف شده بر فضای اندازه (X,S,μ) مطرح می‌کنیم که در آن X ناتهی، S یک حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X، μ اندازه تعریف شده روی S بوده و توابع با مقادیر حقیقی اند. سپس بحث را به توابع تعریف شده از X بتوی Y به عنوان فضای اندازه توسیع خواهیم داد و نهایتاً توابع با مقادیر مختلط و مقادیر حقیقی گسترش یافته را مورد بررسی قرار خواهیم داد. فرض کنید (X,S,μ) یک فضای اندازه ثابت است.

تعریف ۱. فرض کنید $f: X\to\mathbb{R}$ یک تابع است. اگر برای هر زیرمجموعه باز O در $\mathbb{R}$، $f^{-1}(O)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، گوییم f یک تابع اندازه‌پذیر است.

مثال ۱. هر تابع ثابت $f: X\to\mathbb{R}$ تعریف شده توسط

$$f(x)=c \qquad x\in X$$

اندازه‌پذیر است. زیرا فرض کنید O زیرمجموعه بازی در $\mathbb{R}$ است. در این صورت

$$f^{-1}(O)=\begin{cases}\emptyset & c\notin O\\ X & c\in O\end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که مجموعه‌های برل در یک فضای توپولوژیک، عناصر σ-جبر تولید شده

توسط مجموعه‌های بازند. اولین قضیه در زیربخش‌هایی برای مشخص کردن توابع اندازه‌پذیر با مقادیر حقیقی را بیان می‌کند.

قضیه ۲. برای تابع $f: X \to \mathbb{R}$ عبارات زیر باهم معادل‌اند.

الف) f اندازه‌پذیر است.

ب) برای هر فاصله باز کراندار (a,b) در $\mathbb{R}$، $f^{-1}((a,b))$ اندازه‌پذیر است.

ج) برای هر زیرمجموعه بسته C از $\mathbb{R}$، $f^{-1}(C)$ اندازه‌پذیر است.

د) برای هر $a\in\mathbb{R}$، $f^{-1}([a,\infty))$ اندازه‌پذیر است.

هـ) برای هر $a\in\mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty,a])$ اندازه‌پذیر است.

و) برای هر زیرمجموعه بورل B از $\mathbb{R}$، $f^{-1}(B)$ اندازه‌پذیر است.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب) واضح است.

(ب) $\Leftarrow$ (ج). با توجه به رابطه

$$f^{-1}(C) = (f^{-1}(C^c))^c$$

و این واقعیت که C^c را می‌توان به صورت اجتماعی شمارش‌پذیر از فواصل باز کراندار نوشت، حکم حاصل می‌شود.

(ج) $\Leftarrow$ (د). واضح است.

(د) $\Leftarrow$ (هـ) برای $a\in\mathbb{R}$ داریم

$$f^{-1}((-\infty,a)) = [f^{-1}([a,\infty))]^c$$

بنابراین برای هر $a\in\mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty,a))$ اندازه‌پذیر است. چون

$$f^{-1}((-\infty,a]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, a+\tfrac{1}{n}))$$

پس برای هر $a\in\mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty,a])$ اندازه‌پذیر است.

(هـ) $\Leftarrow$ (و). فرض کنید $\mathcal{Q}=\{A\subseteq\mathbb{R};\ $ اندازه‌پذیر است $f^{-1}(A)\}$، در این صورت $\mathcal{Q}$ یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ است و برای هر $a\in\mathbb{R}$، مجموعه $(-\infty,a]$ متعلق به $\mathcal{Q}$

است (طبق فرض). در نتیجه $\mathcal{A}$ شامل زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{R}$ است و بنابراین شامل مجموعه‌های بُرل می‌باشد. بنابراین $f^{-1}(B)$ برای هر زیرمجموعه بُرل B از $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است.

(۴) $\Leftarrow$ (۱) واضح است.

دو تابع که تقریباً همه جا مساوی‌اند، دارای رفتار اندازه‌پذیری یکسانی می‌باشند یعنی یا هر دو تابع اندازه‌پذیرند یا هر دو تابع اندازه‌ناپذیرند

قضیه ۳. اگر f تابعی اندازه‌پذیر بوده و $g: X \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که $f=g$ a.e. آن‌گاه g یک تابع اندازه‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید $A=\{x\in X : f(x)\neq g(x)\}$ طبق فرض $\mu^*(A)=0$ در نتیجه A اندازه‌پذیر است. حال فرض کنید O زیرمجموعه بازی در $\mathbb{R}$ است. چون f تابعی اندازه‌پذیر است پس $f^{-1}(O)$ اندازه‌پذیر است و بنابراین $A^c\cap g^{-1}(O)=A^c\cap f^{-1}(O)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر می‌باشد. از طرفی $A\cap g^{-1}(O)$ دارای اندازه خارجی صفر است، بنابراین اندازه‌پذیر می‌باشد. در نتیجه

$$g^{-1}(O)=(A\cap g^{-1}(O))\cup(A^c\cap g^{-1}(O))$$

مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است، یعنی g تابعی اندازه‌پذیر است.

قضیه ۴. اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر باشند آن‌گاه سه مجموعه زیر

الف) $\{x\in X : f(x)>g(x)\}$

ب) $\{x\in X : f(x)\geq g(x)\}$

ج) $\{x\in X : f(x)=g(x)\}$

اندازه‌پذیرند.

اثبات. الف) اگر $r_1, r_2, \dots$ دنباله‌ای شمارا از اعداد گویا باشد آن‌گاه

$$\{x\in X : f(x)>g(x)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\{x\in X : f(x)>r_n\}\cap\{x\in X : g(x)<r_n\}\right]$$

اندازه‌پذیر است، زیرا اجتماع شمارایی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است.

ب) با توجه به $\{x\in X : f(x)\geq g(x)\}=\{x\in X : g(x)>f(x)\}^c$ حکم حاصل می‌شود.

ج) با توجه به $\{x\in X : f(x)=g(x)\}=\{x\in X : f(x)\geq g(x)\}\cap\{x\in X : g(x)\geq f(x)\}$، حکم از (ب) نتیجه می‌شود.

قضیه بعد بیان می‌کند که ترکیبات جبری معمولی توابع اندازه‌پذیر، توابعی اندازه‌پذیر پدید می‌آورند.

قضیه ۵. برای توابع اندازه‌پذیر f و g عبارات زیر برقرارند:

الف) $f+g$ یک تابع اندازه‌پذیر است.

ب) fg یک تابع اندازه‌پذیر است.

ج) $|f|$ ، f^+ و f^- توابع اندازه‌پذیرند.

د) $f\vee g$ و $f\wedge g$ توابع اندازه‌پذیرند.

اثبات. الف) نخست توجه داریم که اگر c عددی ثابت باشد، آن‌گاه $c-g$ تابعی اندازه‌پذیر است. زیرا مجموعهٔ $\{x\in X : c-g(x)\geq a\}=\{x\in X : g(x)\leq c-a\}$ اندازه‌پذیر است.
حال اگر $a\in\mathbb{R}$، آن‌گاه مجموعهٔ

$$(f+g)^{-1}([a,\infty))=\{x\in X: f(x)+g(x)\geq a\}=\{x\in X: f(x)\geq a-g(x)\}$$

با توجه به قضیه (۴) اندازه‌پذیر است. طبق قضیه (۲)، $f+g$ تابعی اندازه‌پذیر است.

ب) ابتدا نشان می‌دهیم f^2 اندازه‌پذیر است. اگر $a\in\mathbb{R}$ آن‌گاه

$$\{x\in X: f^2(x)\leq a\}=\begin{cases}\emptyset & a<0\\ f^{-1}([-\sqrt{a},\sqrt{a}]) & a\geq 0\end{cases}$$

بنابراین f^2 تابعی اندازه‌پذیر است، علاوه بر آن اگر c یک عدد ثابت باشد آن‌گاه cf اندازه‌پذیر است. زیرا

$$A=\{x\in X: cf(x)\geq a\}=\begin{cases}\{x\in X: f(x)\geq \frac{a}{c}\} & c>0\\ \{x\in X: f(x)\leq \frac{a}{c}\} & c<0\end{cases}$$

حال حکم از اتحاد $fg=\frac{1}{2}[(f+g)^2-f^2-g^2]$ حاصل می‌شود.

ج). اندازه‌پذیری $|f|$ از روابط زیر نتیجه می‌شود

$$\{x\in X: |f(x)|\leq a\}=\begin{cases}\emptyset & a<0\\ \{x\in X: f(x)\leq a\}\cap\{x\in X: f(x)\geq -a\} & a\geq 0\end{cases}$$

برای اندازه‌پذیری f^+ و f^- از اتحادهای زیر استفاده می‌کنیم

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f|+f) \quad , \quad f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$$

د) اتحادهای

$$f\vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \quad , \quad f\wedge g = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

نشان می‌دهند که $f\vee g$ و $f\wedge g$ توابع اندازه‌پذیرند.

قضیه زیر بیان می‌کند که حد تقریباً همه جایی یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر، تابعی اندازه‌پذیر است.

قضیه ۶. برای دنباله (f_n) از توابع اندازه‌پذیر عبارات زیر برقرار است:

الف) اگر $f_n \to f$ a.e. آنگاه f تابعی اندازه‌پذیر است.

ب) اگر $\{f_n(x)\}$ دنباله‌ای کراندار به ازای هر x باشد آنگاه $\limsup f_n$ و $\liminf f_n$ توابعی اندازه‌پذیرند.

اثبات. الف) فرض کنید $A=\{x\in X : \lim f_n(x)=f(x)\}$. چون $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ پس $\mu^*(A^c)=0$. بنابراین A^c اندازه‌پذیر است، پس A نیز مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. حال فرض کنید $a\in\mathbb{R}$. از اتحاد

$$A\cap f^{-1}((a,\infty)) = A\cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}((a+\tfrac{1}{n},\infty))\right]$$

و اندازه‌پذیری هر f_i نتیجه می‌شود که $A\cap f^{-1}((a,\infty))$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. علاوه بر آن $A^c\cap f^{-1}((a,\infty))$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است زیرا زیرمجموعهٔ یک مجموعه با اندازهٔ صفر می‌باشد. بنابراین

$$f^{-1}((a,\infty)) = [A\cap f^{-1}((a,\infty))]\cup[A^c\cap f^{-1}((a,\infty))]$$

مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. پس f تابعی اندازه‌پذیر می‌باشد.

ب) فرض کنید برای هر x دنباله $\{f_n(x)\}$ کراندار باشد. نشان می‌دهیم $\limsup f_n$ یک تابع اندازه‌پذیر است. اندازه‌پذیری $\liminf f_n$ با توجه به رابطهٔ $\liminf f_n = -\limsup(-f_n)$ نتیجه می‌شود.

توجه داریم که $\limsup f_n = \bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{m=n}^{\infty} f_m$ (چرا؟). عدد طبیعی m را ثابت اختیار می‌کنیم. تابع $h_n = f_{m+1}\vee\cdots\vee f_{m+n}$ برای هر n اندازه‌پذیر است. چون

$$h_n \uparrow \bigvee_{i=m}^{\infty} f_i = g_m \quad (\text{همه‌جا})$$

از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که هر g_m یک تابع اندازه‌پذیر است. حال چون $g_m \downarrow \limsup f_n$ (همه‌جا)، مجدداً از (الف) نتیجه می‌شود $\limsup f_n$ تابعی اندازه‌پذیر است.

در قضیه قبل نشان می‌دهند که خانواده تمام توابع اندازه‌پذیر تشکیل یک فضای توابع شامل حدود تقریباً همه جای همگرایی دنباله‌هایش را می‌دهند. علاوه بر این، خانواده فوق تحت ضرب نقطه‌وار یک جبر است. به عبارت دیگر عملهای معمولی روی توابع اندازه‌پذیر، منجر به تابعی اندازه‌پذیر می‌شود.

طبیعی است که سؤال شود چه زمانی تابعی غیراندازه‌پذیر وجود دارد. بوضوح، اگر هر زیرمجموعه از X اندازه‌پذیر باشد (یعنی $\Lambda = P(X)$) آنگاه هر تابع با مقدار حقیقی روی X اندازه‌پذیر است. از طرف دیگر، اگر مجموعه‌های اندازه‌ناپذیری وجود داشته باشند آنگاه توابع اندازه‌ناپذیری نیز وجود دارند، زیرا اگر E یک مجموعه اندازه‌ناپذیر باشد، آنگاه تابع f تعریف شده توسط

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\notin E \\ 1 & x\in E \end{cases}$$

اندازه‌پذیر نیست، زیرا $f^{-1}(1)=E$ اندازه‌پذیر نیست.

بحث حاضر را با بیان قضیه‌ای بنیادی در ارتباط با همگرایی تقریباً همه‌جا و همگرایی یکنواخت که منسوب به اگوروف (Egoroff) است، به پایان می‌بریم.

قضیه ۷. Egoroff. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر است به طوری که $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ و فرض کنید E یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر از X باشد به طوری که $\mu^*(E)<\infty$. آنگاه برای هر $\varepsilon>0$، زیرمجموعه اندازه‌پذیر F از E با $\mu^*(F)<\varepsilon$ وجود دارد که روی $E\setminus F$ دنباله (f_n) به f همگرای یکنواخت است.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که با حذف یک مجموعه پوچ از X، می‌توان فرض کرد که برای هر $x\in X$

$$\lim f_n(x)=f(x)$$

حال برای هر زوج اعداد صحیح مثبت n و k قرار می‌دهیم

$$E_{n,k}=\{x\in E : |f_m(x)-f(x)|<2^{-n} \quad \forall m\geq k\}$$

بوضوح $E_{n,k}$ها زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر X اند. علاوه بر آن برای هر n, k،

$$E_{n,k}\subseteq E_{n,k+1}$$

چون $\lim f_n(x) = f(x)$ برای هر $x \in X$ ، به سادگی نتیجه می‌شود که برای هر n ثابت

$$E_{n,k} \uparrow_k E$$

و در نتیجه برای هر n ثابت

$$\mu^*(E_{n,k}) \uparrow_k \mu^*(E).$$

حال فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. چون برای هر n ، $\mu^*(E) < \infty$ یک عدد صحیح k_n وجود دارد به طوری که

$$\mu^*(E \setminus E_{n,k_n}) = \mu^*(E) - \mu^*(E_{n,k_n}) < 2^{-n}\varepsilon$$

قرار دهید

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus E_{n,k_n}),$$

آن گاه F اندازه‌پذیر است و $F \subseteq E$ ؛

$$\mu^*(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \setminus E_{n,k_n}) < \varepsilon$$

همچنین اگر $x \in E \setminus F = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k_n}$ آن گاه برای هر $m \geq k_n$ داریم

$$|f_m(x) - f(x)| < 2^{-n}$$

یعنی $\{f_n\}$ به f روی $E \setminus F$ همگرای یکنواخت است.