۱۰.۲ حاصل‌ضرب اندازه‌ها و انتگرال‌های مکرر

در تمام این بخش (X, S, μ) و (Y, Σ, ν) دو فضای اندازه ثابت هستند.

تعریف ۸۱. نیم‌حلقه حاصل‌ضرب $S\times\Sigma$ از زیرمجموعه‌های $X\times Y$ توسط

$$S\times\Sigma=\{A\times B : A\in S,\ B\in\Sigma\}$$

تعریف می‌شود.

خانواده $S\times\Sigma$ لزوماً یک نیم‌حلقه از زیرمجموعه‌های $X\times Y$ است. این نتیجه با توجه به اتحادهای زیر و از نیم‌حلقه بودن S و Σ حاصل می‌شود

۱) $(A\times B)\cap(A_1\times B_1)=(A\cap A_1)\times(B\cap B_1)$

۲) $A\times B\setminus A_1\times B_1=[(A\setminus A_1)\times B]\cup[(A\cap A_1)\times(B\setminus B_1)]$

تعریف ۸۲. تابع مجموعه‌ای $\mu\times\nu: S\times\Sigma\to[0,\infty]$ را با

$$\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\cdot\mu(B)$$

برای هر $A\times B\in S\times\Sigma$ تعریف می‌کنیم (یادآوری می‌کنیم که $0\cdot\infty=0$). این تابع مجموعه‌ای روی نیم‌حلقه حاصل‌ضربی $S\times\Sigma$ یک اندازه است. آن را اندازه حاصل‌ضرب μ و ν نامیم.

قضیه ۸۳. تابع مجموعه‌ای $\mu\times\nu: S\times\Sigma\to[0,\infty]$ تعریف شده توسط

$$\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\cdot\mu(B)$$

برای هر $A\times B\in S\times\Sigma$ یک اندازه است.

اثبات. به وضوح $\mu\times\nu(\emptyset)=0$. برای σ-جمعی بودن $\mu\times\nu$، فرض کنید $A\times B\in S\times\Sigma$ و $\{A_n\times B_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دو به دو مجزا در $S\times\Sigma$ است به طوری که $A\times B=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\times B_n$. باید ثابت کنیم که

$$\mu(A)\cdot\mu(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\cdot\mu(B_n) \qquad (۴)$$

به وضوح، رابطه (۴) برای حالتی که یا A یا B دارای اندازه صفرند برقرار است. پس فرض می‌کنیم $\mu(A)\neq 0$ و $\mu(B)\neq 0$، چون $\chi_{A\times B}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n\times B_n}$ پس

$$\chi_A(x)\cdot\chi_B(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)\cdot\chi_{B_n}(y) \qquad \forall x,\forall y$$

$y\in B$ را ثابت درنظر می‌گیریم. چون $\chi_{B_n}(y)$ برابر یک یا صفر است، درنتیجه

$$\chi_A(x)=\sum_{i\in K}\chi_{A_i}(x)$$

که در آن $K=\{i\in\mathbb{N} : y\in B_i\}$، بنابراین خانواده $\{A_i : i\in K\}$ باید مجزا باشند (چرا؟) و درنتیجه $\mu(A)=\sum_{i\in K}\mu(A_i)$. بنابراین برای هر $y\in Y$ داریم

$$\mu(A)\cdot\chi_B(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\cdot\chi_{B_n}(y) \qquad (۵)$$

چون یک جمله با $\mu(A_n)=0$ بعنوان جمع در (۴) یا (۵) رخ نمی‌دهد، می‌توان فرض کرد که

$$\mu(A_n)\neq 0 \qquad \forall n$$

حال اگر A و B دارای اندازه‌های متناهی باشند با توجه به قضیه (۵۳) و انتگرال‌گیری جمله به جمله از (۵)، دیده می‌شود که (۴) برقرار است. از طرف دیگر، اگر A یا B دارای اندازه بینهایت باشند آن‌گاه باید $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\cdot\nu(B_n)=\infty$. زیرا اگر این جمع متناهی باشد آن‌گاه طبق قضیه (۵۳)، $\mu(A)\,\chi_B(y)$ یک تابع انتگرال‌پذیر است که غیرممکن می‌باشد. بنابراین، در این حالت (۴) با دو طرف بینهایت برقرار است.

چند نتیجه زیر، خواص اساسی اندازه حاصل‌ضرب $\mu\times\nu$ است. به طور معمول $(\mu\times\nu)^*$ نشان دهنده اندازه خارجی تولید شده توسط فضای $(X\times Y, S\times\Sigma, \mu\times\nu)$ روی $X\times Y$ است.

قضیه ۸۴. اگر $A\subset X$ و $B\subset Y$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر با اندازه متناهی باشند، آن‌گاه

$$(\mu\times\nu)^*(A\times B)=\mu^*\times\nu^*(A\times B)=\mu^*(A)\cdot\mu^*(B)$$

اثبات. به وضوح $S\times\Sigma\subset\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$. حال فرض کنید $\{A_n\times B_n\}$ دنباله‌ای در $S\times\Sigma$

است به طوری که $A\times B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\times B_n$ ، طبق قضیه (۸۳) ، $\mu^*\times\nu^*$ یک اندازه روی نیم حلقه $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ است ، پس از قضیه (۷٪۱) از فصل اول داریم

$$\mu^*\times\nu^*(A\times B)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\times\nu^*(A_n\times B_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\times\nu(A_n\times B_n)$$

و در نتیجه

$$\mu^*\times\nu^*(A\times B)\le(\mu\times\nu)^*(A\times B)$$

از طرف دیگر، برای $\varepsilon>0$ داده شده ، دو دنباله $\{A_n\}\subset S$ و $\{B_n\}\subset\Sigma$ انتخاب می‌کنیم که $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\mu^*(A)+\varepsilon\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\nu(B_n)<\nu^*(B)+\varepsilon$$

اما در این صورت داریم

$$A\times B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}A_n\times B_m$$

و برای هر $\varepsilon>0$ ،

$$(\mu\times\nu)^*(A\times B)\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mu\times\nu(A_n\times B_m)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_n)\cdot\nu(B_m)$$
$$=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\nu(B_m)\Big)$$
$$<[\mu^*(A)+\varepsilon]\,[\nu^*(B)+\varepsilon]$$

یعنی

$$(\mu\times\nu)^*(A\times B)\le\mu^*(A)\cdot\nu^*(B)=\mu^*\times\nu^*(A\times B)$$

بنابراین $(\mu\times\nu)^*(A\times B)=\mu^*\times\nu^*(A\times B)$

انتظار داریم که اعضای $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ زیرمجموعه‌های $\mu\times\nu$ - اندازه‌پذیر از $X\times Y$ باشند یعنی $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu\subset\Lambda_{\mu\times\nu}$. این مطلب در قضیه بعد آورده شده است .

قضیه ۸۵. اگر A یک زیرمجموعه μ-اندازه‌پذیر X و B یک زیرمجموعه ν-اندازه‌پذیر Y باشند آن‌گاه $A\times B$ یک زیرمجموعه $\mu\times\nu$-اندازه‌پذیر $X\times Y$ است.

اثبات. فرض کنید $C\times D\in S\times\Sigma$ و $\mu\times\nu(C\times D)=\mu(C)\cdot\nu(D)<\infty$. برای $\mu\times\nu$-اندازه‌پذیری $A\times B$، طبق قضیه (۱۰۳.۱) از فصل اول، کافی است نشان دهیم

$$(\mu\times\nu)^*((C\times D)\cap(A\times B))+(\mu\times\nu)^*((C\times D)\cap(A\times B)^c)\le\mu\times\nu(C\times D).$$

اگر $\mu\times\nu(C\times D)=0$ باشد آن‌گاه نامساوی بالا برقرار است (زیرا هر دو طرف آن صفر است). بنابراین می‌توان فرض کرد که $\mu(C)<\infty$ و $\nu(D)<\infty$. به وضوح

$$(C\times D)\cap(A\times B)=(C\cap A)\times(D\cap B)$$

$$(C\times D)\cap(A\times B)^c=[(C\cap A^c)\times(D\cap B)]\cup[(C\cap A)\times(D\cap B^c)]\cup[(C\cap A^c)\times(D\cap B^c)]$$

و هر عضو از اجتماع بالا دارای اندازه متناهی است.

حال زیرجمعی بودن $(\mu\times\nu)^*$ و قضیه (۸۴) نتیجه می‌دهند که

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)^*((C\times D)\cap(A\times B))&+(\mu\times\nu)^*((C\times D)\cap(A\times B^c))\\ &\le\mu^*(C\cap A)\cdot\nu^*(B\cap D)+\mu^*(C\cap A^c)\cdot\nu^*(D\cap B)\\ &\quad+\mu^*(C\cap A)\cdot\nu^*(D\cap B^c)+\mu^*(C\cap A^c)\,\nu^*(D\cap B^c)\\ &=[\mu^*(C\cap A)+\mu^*(C\cap A^c)][\nu^*(D\cap B)+\nu^*(D\cap B^c)]\\ &=\mu(C)\,\nu(D)=\mu\times\nu(C\times D).\end{aligned}$$

و حکم حاصل می‌شود.

توضیح ۸۶. در حالت کلی، $\mu^*\times\nu^*$ تنها توسیع $\mu\times\nu$ از $S\times\Sigma$ به اندازه‌ای روی $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ نیست. در هر حال، اگر هر دوی (X,S,μ) و (Y,Σ,ν) فضاهای اندازه σ-متناهی باشند آن‌گاه $(X\times Y,S\times\Sigma,\mu\times\nu)$ یک فضای اندازه σ-متناهی است و بنابراین از قضیه (۱۱۳.۱) فصل اول، $\mu^*\times\nu^*$ تنها توسیع $\mu\times\nu$ به یک اندازه روی $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ است، علاوه بر آن

$\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu\subset\Lambda_{\mu\times\nu}$ و در واقع $(\mu\times\nu)^*$ یک اندازه روی $\Lambda_{\mu\times\nu}$ است و در این حالت رابطه $(\mu\times\nu)^*=\mu^*\times\nu^*$ روی $\Lambda_\mu\times\Lambda_\nu$ برقرار است.

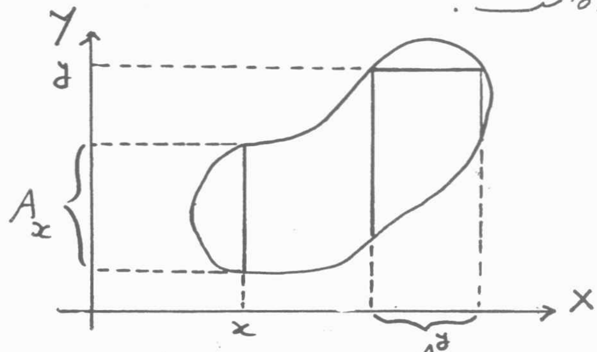
تعریف ۸۷. اگر A زیرمجموعه‌ای از $X\times Y$ بوده و $x\in X$ باشد، x-مقطع A توسط

$$A_x=\{y\in Y:(x,y)\in A\}$$

تعریف می‌شود. به وضوح A_x زیرمجموعه‌ای از Y است. به طور مشابه اگر $y\in Y$ باشد، y-مقطع A توسط

$$A^y=\{x\in X:(x,y)\in A\}$$

تعریف می‌شود. به وضوح $A^y\subset X$. تعبیرهای هندسی x- و y-مقطع‌ها در شکل زیر نمایش داده شده است.



در رابطه با مقاطع مجموعه‌ها، اتحادهای زیر برقرارند:

الف) $\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)_x=\bigcup_{i\in I}(A_i)_x$ و $\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^y=\bigcup_{i\in I}(A_i)^y$

ب) $\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)_x=\bigcap_{i\in I}(A_i)_x$ و $\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)^y=\bigcap_{i\in I}(A_i)^y$

ج) $(A\setminus B)_x=A_x\setminus B_x$ و $(A\setminus B)^y=A^y\setminus B^y$

(اثبات‌های روابط بالا ساده است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود).

در قضیه بعد رابطه بین زیرمجموعه‌های $\mu\times\nu$-اندازه‌پذیر $X\times Y$ و زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر X و Y را بررسی می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که یک تابع با مقادیر حقیقی گسترش یافته مانند f که روی مجموعه‌ای با اندازه صفر تعریف نشده است را یک تابع انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه تابع انتگرال‌پذیر g وجود داشته

باشد به طوری که $f=g$ a.e. .

قضیه ۸۸. فرض کنید E یک زیرمجموعه $\mu\times\nu$-اندازه‌پذیر از $X\times Y$ با

$$(\mu\times\nu)^*(E)<\infty$$

است. در این صورت برای تقریباً همه x ها نسبت به μ، مجموعه E_x یک زیرمجموعه ν-اندازه‌پذیر از Y است و تابع $x\mapsto\nu^*(E_x)$ تابعی انتگرال‌پذیر روی X است به طوری که

$$(\mu\times\nu)^*(E)=\int_X \nu^*(E_x)\,d\mu(x)$$

به طور مشابه، برای تقریباً همه y ها نسبت به ν، مجموعه E^y یک زیرمجموعه μ-اندازه‌پذیر از X است و تابع $y\mapsto\mu^*(E^y)$ تابعی انتگرال‌پذیر روی Y است به طوری که

$$(\mu\times\nu)^*(E)=\int_Y \mu^*(E^y)\,d\nu(y).$$

اثبات. با توجه به تقارن، کافی است فرمول اول را به دست آوریم. اثبات طی چند مرحله انجام می‌گیرد.

مرحله I. فرض کنید $E=A\times B\in S\times\Sigma$. بر وضوح اگر $x\in A$ باشد آن‌گاه $E_x=B$ و اگر $x\notin A$ آن‌گاه $E_x=\emptyset$. بنابراین E_x یک زیرمجموعه ν-اندازه‌پذیر از Y برای هر $x\in X$ است و برای هر $x\in X$ داریم

$$\nu(E_x)=\nu(B)\,\chi_A(x) \qquad (۴)$$

چون $(\mu\times\nu)^*(E)=(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B)<\infty$، دو امکان وجود دارد:

الف) هر دوی A و B دارای اندازه متناهی باشند. در این حالت، (۴) نشان می‌دهد که $x\mapsto\nu^*(E_x)$ تابعی انتگرال‌پذیر است (در واقع یک تابع پله‌ای است) و

$$\int_X \nu^*(E_x)\,d\mu(x)=\int \nu(B)\chi_A\,d\mu=\mu(A)\cdot\nu(B)=(\mu\times\nu)^*(E).$$

ب) A یا B دارای اندازه بی‌نهایت است. در این حالت، مجموعه دیگر باید دارای اندازه صفر باشد و بنابراین (۴) نشان می‌دهد که برای μ-تقریباً تمام x ها، $\nu(E_x)=0$. پس تابع $x\mapsto\nu^*(E_x)$ تابع صفر است و بنابراین

$$\int_X \nu^*(E_x)\,d\mu(x) = 0 = (\mu\times\nu)^*(E).$$

مرحله II. فرض کنید E یک مجموعه سیگمایی در $S\times\Sigma$ است. دنباله $\{E_n\}$ از عناصر متمایز $S\times\Sigma$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. بنابراین $E_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$ و طبق مرحله (I)، E_x یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر Y برای هر $x\in X$ است.

حال تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\nu^*(E_x), \quad f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\nu((E_i)_x) \qquad \forall x\in X,\ \forall n$$

طبق مرحله (I) هر f_n یک تابع انتگرال‌پذیر است و

$$\int f_n\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\int_X \nu((E_i)_x)\,d\mu(x)=\sum_{i=1}^{n}\mu\times\nu(E_i)\uparrow(\mu\times\nu)^*(E)<\infty$$

چون $\{(E_n)_x\}$ یک دنباله متمایز از Σ است، داریم

$$\nu^*(E_x)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu((E_n)_x)$$

و بنابراین برای هر $x\in X$، $f_n(x)\uparrow f(x)$. حال طبق قضیه Levi (۵۲)، f یک تابع انتگرال‌پذیر است و

$$\int_X \nu^*(E_x)\,d\mu(x)=\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\times\nu(E_i)=(\mu\times\nu)^*(E).$$

مرحله III. فرض کنید E اشتراک شمارایی از مجموعه‌های سیگمایی با اندازه متناهی است. دنباله $\{E_n\}$ از مجموعه‌های سیگمایی را انتخاب می‌کنیم به طوری که $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$، $(\mu\times\nu)^*(E_1)<\infty$ و برای هر n، $E_{n+1}\subset E_n$.

برای هر n، فرض کنید

$$g_n(x)=\begin{cases}0 & \nu^*((E_n)_x)=\infty\\ \nu^*((E_n)_x) & \nu^*((E_n)_x)<\infty\end{cases}$$

طبق مرحله (II) هر g_n یک تابع انتگرال‌پذیر روی X است به طوری که

$$\int g_n\,d\mu=(\mu\times\nu)^*(E_n)$$

با توجه به $E_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$ نتیجه می‌شود که E_x برای هر $x\in X$ یک مجموعه ν-اندازه‌پذیر است. همچنین، چون برای μ-تقریباً همه xها $\nu^*((E_1)_x)<\infty$، از قضیه (۱۱۵.۱) از فصل اول نتیجه

می‌شود که

$$g_n(x) = \nu^*((E_n)_x) \downarrow \nu^*(E_x) \qquad \mu\text{-a.e } x$$

بنابراین تابع $x \mapsto \nu^*(E_x)$ یک تابع انتگرال‌پذیر تعریف می‌کند و

$$\int_X \nu^*(E_x)\,d\mu(x) = \lim \int g_n\,d\mu = \lim\, (\mu\times\nu)^*(E_n) = (\mu\times\nu)^*(E)$$

که در آن تساوی آخر مجدداً از قضیه (۱.۱۱۵) فصل اول استفاده شده است.

مرحله IV. فرض کنید $(\mu\times\nu)^*(E) = 0$. با توجه به استدلال ارائه شده در اثبات قضیه (۱.) فصل اول، مجموعه اندازه‌پذیر G وجود دارد که اشتراک تعداد شمارایی از مجموعه‌های مستطیلی با اندازه متناهی است به طوری که $E \subset G$ و $(\mu\times\nu)^*(G) = 0$. طبق مرحله (III)

$$\int_X \nu^*(G_x)\,d\mu(x) = (\mu\times\nu)^*(G) = 0$$

و بنابراین با توجه به قضیه (۵۰) قسمت (الف) برای μ-تقریباً همه xها داریم $\nu^*(G_x) = 0$. برای هر x، $E_x \subset G_x$ پس باید برای μ-تقریباً همه xها $\nu^*(E_x) = 0$. بنابراین E_x یک مجموعه ν-اندازه‌پذیر برای μ-تقریباً همه xهاست و $x \mapsto \nu^*(E_x)$ تعریف کننده تابع صفر است. بنابراین

$$\int \nu^*(E_x)\,d\mu(x) = 0 = (\mu\times\nu)^*(E).$$

مرحله V. حالت کلی. مجموعه $\mu\times\nu$-اندازه‌پذیر F را انتخاب می‌کنیم که اشتراک شمارایی از مجموعه‌های مستطیلی با اندازه متناهی است به طوری که $E \subset F$ و

$$(\mu\times\nu)^*(F) = (\mu\times\nu)^*(E)$$

قرار می‌دهیم $G = F \setminus E$. در این صورت G یک مجموعه پوچ است و در نتیجه طبق مرحله (IV) برای μ-تقریباً همه xها $\nu^*(G_x) = 0$. بنابراین E_x یک مجموعه ν-اندازه‌پذیر برای μ-تقریباً همه xهاست و $\nu^*(E_x) = \nu^*(F_x)$. طبق مرحله (III) تابع $x \mapsto \nu^*(F_x)$ تابعی انتگرال‌پذیر است و بنابراین تابع $x \mapsto \nu^*(E_x)$ تابعی انتگرال‌پذیر می‌باشد و

$$(\mu\times\nu)^*(E) = (\mu\times\nu)^*(F) = \int_X \nu^*(F_x)\,d\mu(x) = \int_X \nu^*(E_x)\,d\mu(x).$$

تعریف ۸۹. فرض کنید $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ یک تابع است. برای هر $x\in X$ ثابت، نماد f_x نشان دهنده تابع $f_x: Y \to \mathbb{R}$ تعریف شده توسط $f_x(y)=f(x,y)$ برای هر $y\in Y$ است. به طور مشابه برای هر $y\in Y$ نماد f^y نشان دهنده تابع $f^y: X \to \mathbb{R}$ تعریف شده توسط $f^y(x)=f(x,y)$ برای هر $x\in X$ است.

تعریف ۹۰. فرض کنید $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ یک تابع است. انتگرال مکرر $\iint f\,d\mu\,d\nu$ را موجود گوییم هرگاه f^y روی X برای ν- تقریباً همه y ها انتگرال پذیر بوده و تابع

$$g(y)=\int f^y d\mu=\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$$

یک تابع انتگرال پذیر روی Y تعریف کند.

مقدار انتگرال تکراری $\iint f\,d\mu\,d\nu$ با شروع از انتگرال داخلی و سپس محاسبه حاصل با انتگرال دوم بدست می آید. یعنی

$$\iint f\,d\mu\,d\nu=\int_Y\left[\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y)$$

معادلاً $\iint f\,d\nu\,d\mu$ مشابه است یعنی

$$\iint f\,d\nu\,d\mu=\int_X\left[\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right]d\mu(x)$$

اگر E یک زیرمجموعه $\mu\times\nu$- اندازه پذیر از $X\times Y$ با $(\mu\times\nu)^*(E)<\infty$ باشد آنگاه با استفاده از قضیه (۸۸) هر دو انتگرال مکرر $\iint \chi_E\,d\mu\,d\nu$ و $\iint \chi_E\,d\nu\,d\mu$ موجودند و

$$\iint \chi_E\,d\mu\,d\nu=\iint \chi_E\,d\nu\,d\mu=\int \chi_E\,d(\mu\times\nu)=(\mu\times\nu)^*(E)$$

چون هر تابع $\mu\times\nu$- پله‌ای ترکیب خطی از توابع مشخصه مجموعه‌های $\mu\times\nu$- اندازه پذیر با اندازه متناهی است، پس اگر φ یک تابع $\mu\times\nu$- پله‌ای باشد آنگاه هر دو انتگرال مکرر $\iint \varphi\,d\mu\,d\nu$ و $\iint \varphi\,d\nu\,d\mu$ موجودند و

$$\iint \varphi\, d\mu\, d\nu = \iint \varphi\, d\nu\, d\mu = \int \varphi\, d(\mu\times\nu)$$

اتحادهای بیان شده در بالا حالات خاصی از قضیه کلی زیر بنام قضیه فوبینی است .

قضیه ۹۱ . فوبینی . فرض کنید $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ یک تابع $\mu\times\nu$ -انتگرال پذیر است .
در این صورت هر دو انتگرال مکرر موجودند و

$$\int f\, d(\mu\times\nu) = \iint f\, d\mu\, d\nu = \iint f\, d\nu\, d\mu .$$

اثبات ، بدون کم شدن از کلیت بحث ، می توان فرض کرد برای هر x و y ، $0 \leq f(x,y)$.
دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع پله ای را انتخاب می کنیم به طوری که برای هر x و هر y

$$0 \leq \varphi_n(x,y) \uparrow f(x,y)$$

بنابراین

$$\int_X \left[\int_Y \varphi_n(x,y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int \varphi_n\, d(\mu\times\nu) \uparrow \int f\, d(\mu\times\nu) < \infty \qquad (۷)$$

طبق قضیه (۸۸) ، برای هر n تابع

$$g_n(x) = \int (\varphi_n)_x\, d\nu = \int_Y \varphi_n(x,y)\, d\nu(y)$$

یک تابع انتگرال پذیر روی X تعریف می کند و به وضوح $g_n(x) \uparrow$ برای μ -تقریباً هر x . اما
در این صورت طبق قضیه (۵۲) تابع μ -انتگرال پذیر $g : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$g_n(x) \uparrow g(x) \qquad \mu\text{-a.e.}$$

یعنی زیرمجموعه μ -پوچ A از X وجود دارد به طوری که برای هر $x \notin A$ داریم

$$\int (\varphi_n)_x\, d\nu \uparrow g(x) < \infty$$

چون برای هر x ، $(\varphi_n)_x \uparrow f_x$ در نتیجه f_x برای هر $x \notin A$ یک تابع ν -انتگرال پذیر است و

$$g_n(x) = \int (\varphi_n)_x\, d\nu = \int_Y \varphi_n(x,y)\, d\nu(y) \uparrow \int_Y f_x\, d\nu \qquad \forall x \notin A$$

حال با توجه به (۷) و قضیه (۳۹) نتیجه می شود که تابع $x \mapsto \int_Y f_x\, d\nu$ تابعی انتگرال پذیر است و

$$\int f\, d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu\right) d\mu = \iint f\, d\nu\, d\mu$$

به طور مشابه داریم $\int f\, d(\mu\times\nu) = \iint f\, d\mu\, d\nu$ و اثبات کامل است .

توضیح ۹۲. وجود انتگرال های مکرر لزوماً تضمینی برای انتگرال پذیر تابع روی فضای حاصل ضرب نیست. به عنوان مثال، فرض کنید $X=Y=[0,1]$ و $\lambda=\nu=\mu$ (اندازه لبگ) و

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

آن گاه

$$\iint f\,d\mu\,d\nu=-\frac{\pi}{4}, \qquad \iint f\,d\nu\,d\mu=\frac{\pi}{4}$$

قضیه فوبینی نتیجه می دهد که f روی $[0,1]\times[0,1]$ انتگرال پذیر نیست.

به هر حال، عکس قضیه فوبینی تحت شرایطی برقرار است و بر طبق آن وجود یکی از انتگرال های مکرر برای انتگرال پذیری تابع روی فضای حاصل ضرب کفایت می کند. این قضیه به قضیه تونلی معروف است و به کرات در کاربردها مورد استفاده قرار می گیرد.

قضیه ۹۳. تونلی. فرض کنید (X,S,μ) و (Y,Σ,ν) دو فضای اندازه σ-متناهی اند و $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ یک تابع $\mu\times\nu$-اندازه پذیر است. اگر یکی از انتگرال های مکرر $\iint|f|\,d\mu\,d\nu$ یا $\iint|f|\,d\nu\,d\mu$ موجود باشد آن گاه تابع f یک تابع $\mu\times\nu$-انتگرال پذیر است (و در نتیجه انتگرال مکرر دیگر نیز موجود است) و

$$\int f\,d(\mu\times\nu)=\iint f\,d\mu\,d\nu=\iint f\,d\nu\,d\mu.$$

اثبات. بدون کم شدن از کلیت بحث، می توان فرض کرد که برای هر x و هر y

$$f(x,y)\geq 0.$$

چون (X,S,μ) و (Y,Σ,ν) فضاهای اندازه σ-متناهی اند، به سادگی دیده می شود که فضای حاصل ضرب نیز σ-متناهی است. دنباله $\{A_n\}$ از مجموعه های $\mu\times\nu$-اندازه پذیر را انتخاب می کنیم به طوری که برای هر n، $(\mu\times\nu)^*(A_n)<\infty$ و $A_n\uparrow X\times Y$. طبق قضیه (۱۷) دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع $\mu\times\nu$-ساده وجود دارد به طوری که برای هر x و y داریم

$$0 \le \psi_n(x,y) \uparrow f(x,y)$$

قرار می‌دهیم $\varphi_n = \psi_n \cdot \chi_{A_n}$ ، $\forall n$. در این صورت $\{\varphi_n\}$ یک دنباله از توابع $\mu\times\nu$ - پله‌ای است به طوری که برای هر x و y

$$0 \le \varphi_n(x,y) \uparrow f(x,y)$$

حال فرض کنید $\iint f\,d\mu\,d\nu$ محدود است. این به معنای آن است که برای ν تقریباً هر y ، انتگرال $\int f(x,y)\,d\mu(x)$ محدود است و یک تابع ν - انتگرال‌پذیر را تعریف می‌کند.

از $\varphi_n(x,y) \uparrow f(x,y)$ نتیجه می‌شود که برای ν - تقریباً هر y

$$\int \varphi_n(x,y)\,d\mu(x) \uparrow \int f(x,y)\,d\mu(x)$$

اما در این صورت با بکارگیری قضیه همگرایی قطع شده لبگ داریم

$$\int \varphi_n\,d(\mu\times\nu) = \int_Y\left[\int_X \varphi_n(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y) \uparrow \iint f\,d\mu\,d\nu < \infty$$

و این نشان می‌دهد f یک تابع $\mu\times\nu$ - بالایی است و $\int f\,d(\mu\times\nu) = \iint f\,d\mu\,d\nu$. حال باقی اثبات از قضیه فوبینی (۹۱) حاصل می‌شود.

در کاربردها، معمولاً قضیه‌های فوبینی و تونلی را به عنوان روش محاسبه انتگرال دوگانه با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری می‌شناسیم.

تشخیص $\mu\times\nu$ - اندازه‌پذیری تابع $f: X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ مسئله سختی است. بهرحال در تعدادی از کاربردهای $\mu\times\nu$ - اندازه‌پذیری f می‌توان از مفاهیم و مشاهدات توپولوژیکی استفاده کرد. به عنوان مثال، اگر $X = Y = \mathbb{R}$ و $\mu = \nu =$ اندازه لبگ باشد آن‌گاه اندازه حاصل‌ضرب $\mu\times\nu$ روی $\mathbb{R}^2$ ، اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^2$ است. بنابراین هر تابع پیوسته با مقادیر حقیقی روی $\mathbb{R}^2$ لزوماً $\mu\times\nu$ - اندازه‌پذیر است.