۲.۲ اندازه لبگ

اندازه لبگ تعمیم طبیعی نماهیم طول، مساحت و حجم است. بالاخص اندازه لبگ هر شکل هندسی در $\mathbb{R}^2$ مساحت آن است و اندازه لبگ اجسام هندسی در $\mathbb{R}^3$ حجم آن می باشد.

در این بخش برخی از خواص اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^n$ را مورد مطالعه قرار می دهیم. S نشان دهنده نیم حلقه ای شامل مجموعه تهی و تمام مجموعه های به فرم $A=\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ است که در آن برای $-\infty<a_i<b_i<\infty$. این نیم حلقه در فصلهای قبل مورد بررسی قرار گرفته است. تابع مجموعه ای $\lambda : S \to [0,\infty)$ تعریف شده توسط $\lambda(\phi)=0$ و $\lambda\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ یک تابع σ-جمعی است.

قضیه ۱۹. تابع مجموعه ای $\lambda : S \to [0,\infty)$ تعریف شده در بالا یک اندازه است، که آن را اندازه لبگ روی S نامیم.

اثبات. اثبات به وسیله استقراء روی بعد $\mathbb{R}^n$ انجام می پذیرد. نیم حلقه S روی $\mathbb{R}^n$ را با S_n نمایش داده و تابع مجموعه ای λ متناظر به آن را با λ_n نشان می دهیم. برای $n=1$ حکم از مثال ( ) نتیجه می شود. فرض کنید برای n حکم برقرار است. نشان می دهیم λ_{n+1} روی S_{n+1} تابعی σ-جمعی است. برای این منظور، فرض کنید

$$A\times[a,b)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[A_i\times[a_i,b_i)\right]$$

که در آن $A\in S_n$ و برای هر i، $A_i\in S_n$ و مجموعه های $\{A_i\times[a_i,b_i)\}$ دو به دو متمایزند. به سادگی می توان دید که

$$\chi_{A\times[a,b)}=\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{A_i\times[a_i,b_i)}$$

حال برای $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ و $t\in\mathbb{R}$ داریم

$$\chi_A(x)\cdot\chi_{[a,b)}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{A_i}(x)\cdot\chi_{[a_i,b_i)}(t)$$

$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ثابت گرفته و قرار می دهیم $\varphi_k(t)=\sum_{i=1}^{k}\chi_{A_i}(x)\chi_{[a_i,b_i)}(t)$. در این صورت هر φ_k یک تابع پله ای (برای $(\mathbb{R},S_1,\lambda_1)$) است و برای هر $t\in\mathbb{R}$

$$\varphi_k(t)\uparrow\chi_A(x)\cdot\chi_{[a,b)}(t)$$

بنابراین طبق قضیه ( ) بخش قبل، برای هر $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)\chi_{A_i}(x)\uparrow(b-a)\chi_A(x)$$

حال طبق فرض استقراء $(\mathbb{R}^n,S_n,\lambda_n)$ یک فضای اندازه است، بنابراین با توجه به قضیه ( )

بخش قبل، داریم

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)\lambda_n(A_i)\uparrow(b-a)\lambda_n(A)$$

یعنی

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{n+1}(A_i\times[a_i,b_i))=\lambda_{n+1}(A\times[a,b))$$

پس λ_{n+1} تابعی σ - جمعی است.

یک فاصله در $\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای به فرم $\prod_{i=1}^{n} I_i$ است که در آن I_i ها فواصلی در $\mathbb{R}$ هستند. اگر هر یک از I_i ها فاصله‌ای باز و کراندار از $\mathbb{R}$ باشند آن‌گاه $\prod_{i=1}^{n} I_n$ را یک فاصله باز کراندار از $\mathbb{R}^n$ نامیم. به سادگی می‌توان نشان داد که هر فاصله در $\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر لبگ است و علاوه بر آن $\lambda^*(\prod_{i=1}^{n} I_i)=\prod_{i=1}^{n}|I_i|$ که در آن $|I|$ طول I است.

در تمام بحث حاضر، $d(x,y)$ نشان دهنده فاصله اقلیدسی بردارهای $x=(x_1,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,\dots,y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ است. یعنی

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

فرمولی مناسب برای اندازه لبگ خارجی به صورت زیر است:

(۱) $\lambda^*(A)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(I_i):\quad A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ و I_i ها فواصل باز کراندارند $\}$ که در آن A زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است.

برای اثبات فرمول بالا، نخست توجه داریم که اگر $A=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ (یعنی $A\in S$) آن‌گاه برای هر $\epsilon>0$ فاصله باز کراندار $I_\epsilon=\prod_{i=1}^{n}(a_i-\epsilon,b_i)$ وجود دارد به طوری که $A\subseteq I_\epsilon$ و وقتی $\epsilon\to 0$ داریم

$$\lambda^*(I_\epsilon)-\lambda(A)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i+\epsilon)-\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\longrightarrow 0$$

اگر $\lambda^*(A)=\infty$ آن‌گاه فرمول (۱) بدیهی است. اگر $\lambda^*(A)<\infty$ آن‌گاه برای $\epsilon>0$ داده شده، دنباله $\{A_i\}$ از S را می‌توان انتخاب کرد به طوری که

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A_i)<\lambda^*(A)+\epsilon$$

و برای هر i فاصله باز کراندار I_i وجود دارد به طوری که $A_i\subseteq I_i$ و $\lambda^*(I_i)-\lambda(A_i)<2^{-i}\epsilon$ بنابراین $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ و

$$\lambda^*(A)\le\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(I_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}[\lambda(A_i)+2^{-i}\epsilon]<\lambda^*(A)+2\epsilon$$

و (۱) برقرار است.

توضیح ۲۰. برای سادگی کتابت، از اینجا به بعد λ^* را با λ نمایش داده و آن را اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^n$ نامیم.

بوضوح هر زیرمجموعه متناهی $\mathbb{R}^n$ دارای اندازه لبگ صفر است. بنابراین با توجه به خاصیت σ- زیرجمعی بودن λ، هر زیرمجموعه شمارای $\mathbb{R}^n$ دارای اندازه لبگ صفر است.
نتیجه بعد یک خاصیت تقریب مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ توسط مجموعه‌های باز را بیان می‌کند.

قضیه ۲۱. زیرمجموعه E از $\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر لبگ است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon>0$ مجموعه باز O وجود داشته باشد به طوری که $E\subseteq O$ و $\lambda(O\setminus E)<\epsilon$.

اثبات. فرض کنید E اندازه‌پذیر لبگ است. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $\lambda(E)<\infty$. برای $\epsilon>0$ داده شده، دنباله $\{I_i\}$ از فواصل باز کراندار را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$E\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) < \lambda(E)+\epsilon$$

در این صورت $O=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ یک مجموعه باز است و $E\subseteq O$ و $\lambda(O)\le\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(I_i)<\lambda(E)+\epsilon$.
چون E اندازه‌پذیر است، پس $\lambda(O\setminus E)=\lambda(O)-\lambda(E)<\epsilon$.
حال اگر $\lambda(E)=\infty$. برای هر i قرار می‌دهیم

$$B_i=\{x\in\mathbb{R}^n : d(x,0)\le i\} \quad , \quad E_i=E\cap B_i.$$

در نتیجه $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ و هر مجموعه E_i اندازه‌پذیر لبگ است و $\lambda(E_i)<\infty$. طبق قسمت اول اثبات، برای هر i مجموعه باز O_i وجود دارد به طوری که $E_i\subseteq O_i$ و $\lambda(O_i\setminus E_i)<2^{-i}\epsilon$ قرار می‌دهیم $O=\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$. در این صورت O یک مجموعه باز است و

$$\lambda(O\setminus E)\le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(O_i\setminus E_i)<\epsilon$$

زیرا $O\setminus E\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (O_i\setminus E_i)$.

برعکس، فرض کنید برای هر $\epsilon>0$ مجموعه باز O وجود دارد به طوری که شامل مجموعه E است و $\lambda(O\setminus E)<\epsilon$. برای هر i مجموعه باز O_i را چنان انتخاب می‌کنیم که $E\subseteq O_i$ و $\lambda(O_i\setminus E)<i^{-1}$. قرار دهید $G=\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$. در این صورت G مجموعه اندازه‌پذیر لبگ است و $E\subseteq G$. علاوه بر آن برای هر i داریم $\lambda(G\setminus E)\le\lambda(O_i\setminus E)<i^{-1}$ و در نتیجه $\lambda(G\setminus E)=0$ پس $G\setminus E$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر لبگ است. حال اندازه‌پذیری E از رابطه $E=G\setminus(G\setminus E)$ حاصل می‌شود.

تعریف ۲۲. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف است و $\mathcal{B}$، σ-جبر مجموعه‌های بورل آن باشد. اندازه $\mu:\mathcal{B}\longrightarrow[0,\infty]$ را یک اندازه بورل منظم نامیم هرگاه μ دارای خواص زیر باشد:

الف) برای هر مجموعه فشرده K، $\mu(K)<\infty$.

ب) اگر B یک مجموعه بورل از X باشد آنگاه

$$\mu(B)=\inf\{\mu(O): O\supseteq B \text{ و } O \text{ باز است}\}$$

ج) اگر O یک مجموعه باز در X باشد آنگاه

$$\mu(O)=\sup\{\mu(K): K\subseteq O, K \text{ فشرده است}\}$$

اندازه μ روی مجموعه‌های بورل از یک فضای توپولوژیک با شرط $\mu(K)<\infty$ برای هر مجموعه فشرده K را یک اندازه بورل نامیم.

باید توجه داشت که اگر μ یک اندازه بورل منظم روی فضای توپولوژیک X باشد آنگاه برای هر مجموعه بورل B با $\mu(B)<\infty$ داریم

$$\mu(B)=\sup\{\mu(K): K\subseteq B, K \text{ فشرده است}\}$$

زیرا، فرض کنید B یک مجموعه بورل با $\mu(B)<\infty$ بوده و $\varepsilon>0$ داده شده است. مجموعه باز V با $B\subseteq V$ و $\mu(V)<\mu(B)+\varepsilon$ را می‌توان انتخاب کرد. بطور مشابه مجموعه باز W را انتخاب می‌کنیم به طوری که $V\setminus B\subseteq W\subseteq V$ و

$$\mu(W)<\mu(V\setminus B)+\varepsilon=\mu(V)-\mu(B)+\varepsilon<2\varepsilon$$

حال مجموعه فشرده C وجود دارد به طوری که $C\subseteq V$ و $\mu(V)<\mu(C)+\varepsilon$. قرار می‌دهیم $K=C\cap W^c$. K یک مجموعه فشرده است و $K\subseteq B$ و

$$\begin{aligned}0\le\mu(B)-\mu(K)=\mu(B\setminus K)&\le\mu(V\setminus K)\\&=\mu((V\setminus C)\cap W)\\&\le[\mu(V)-\mu(C)]+\mu(W)<3\varepsilon\end{aligned}$$

نتیجه مهم این است که اندازه لبگ یک اندازه بورل منظم است.

قضیه ۲۳. اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^n$ یک اندازه بورل منظم است.

اثبات. الف) فرض کنید K زیرمجموعه فشرده‌ای از $\mathbb{R}^n$ است. در این صورت K کراندار بوده

و $A=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ با $K\subseteq A$ وجود دارد. بنابراین $\lambda(K)\le\lambda(A)<\infty$.

(ب) فرض کنید B یک مجموعه برل است و $\varepsilon>0$. طبق قضیه قبل، مجموعه باز V وجود دارد به طوری که $B\subseteq V$ و $\lambda(V\setminus B)<\varepsilon$. بنابراین برای هر $\varepsilon>0$ داریم

$$\lambda(B)\le\inf\{\lambda(O): B\subseteq O \text{ و } O \text{ باز است}\}$$
$$\le\lambda(V)=\lambda(V\setminus B)+\lambda(B)\le\lambda(B)+\varepsilon$$

پس

$$\lambda(B)=\inf\{\lambda(O): B\subseteq O \text{ و } O \text{ باز است}\}.$$

(ج)، فرض کنید O یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ است. دنباله $\{K_i\}$ از مجموعه‌های فشرده با $O=\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i$ را اختیار می‌کنیم. به عنوان مثال فرض کنید $\{K_1,K_2,\dots\}$ دنباله شمارایی از گوی‌های بسته با مرکز اعداد گویا و شعاع گویا است که در O قرار دارند. حال برای هر i قرار می‌دهیم $C_i=\bigcup_{m=1}^{i}K_m$. هر یک از C_i ها فشرده‌اند و $C_i\uparrow O$. در نتیجه $\lambda(C_i)\uparrow\lambda(O)$ و بنابراین

$$\lambda(O)=\sup\{\lambda(K): K\subseteq O \text{ و } K \text{ فشرده است}\}$$

توضیح ۲۴. در فصل‌های بعد نتیجه کلی‌تری را ثابت خواهیم کرد که نشان می‌دهد هر اندازه برل روی $\mathbb{R}^n$ لزوماً یک اندازه برل منظم است.

اگر A زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ و $a\in\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه مجموعه $a+A=\{a+x: x\in A\}$ را انتقال A به اندازه a نامیم. نماد دیگر برای انتقال $a+A$ به صورت $A+a$ است. لوضوح برای هر زیرمجموعه A از $\mathbb{R}^n$ و هر $a\in\mathbb{R}^n$ داریم

$$\lambda(A)=\lambda(A+a)=\lambda(a+A)$$

با توجه به اتحادهای $E\cap(a+A)=a+(E-a)\cap A$ و $E\cap(a+A)^c=a+(E-a)\cap A^c$ به سادگی می‌توان دید که زیرمجموعه A از $\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر لبگ است اگر و تنها اگر برای هر $a\in\mathbb{R}^n$ ، $a+A$ اندازه‌پذیر لبگ باشد.

فرض کنید $\mathcal{B}$ خانواده تمام مجموعه‌های برل در $\mathbb{R}^n$ است. در این صورت برای هر $A\in\mathcal{B}$ و هر $a\in\mathbb{R}^n$ داریم $a+A\in\mathcal{B}$. زیرا اگر $\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{B}: a+A\in\mathcal{B}\quad\forall a\in\mathbb{R}^n\}$ آنگاه $\mathcal{A}$

۵- جبری از مجموعه‌ها شامل زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ است. بنابراین $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

اندازه $\mu: \mathcal{B} \to [0,\infty]$ را پایا تحت انتقال نامیم هرگاه برای هر $A \in \mathcal{B}$ و هر $a \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\mu(a+A) = \mu(A)$.

سؤالی که مطرح می‌شود این است که اندازه‌های برل پایا تحت انتقال روی $\mathbb{R}^n$ به چه صورت‌اند؟ در پاسخ به این سؤال، نشان می‌دهیم که مضربی از یک اندازه برل پایا تحت انتقال روی $\mathbb{R}^n$، یک اندازه لبگ است. برای این منظور به خاصیتی برای توابع جمعی نیاز داریم. تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را یک تابع جمعی نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$، $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

لم ۲۵. فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع جمعی است. اگر f در صفر پیوسته باشد آنگاه، ثابت c وجود دارد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) = cx$.

بالاخص، اگر $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در صفر نسبت به هر متغیرش پیوسته بوده و برای هر متغیر بطور جداگانه جمعی باشد آنگاه ثابت c وجود دارد به طوری که

$$f(x_1, \dots, x_n) = c\, x_1 \cdots x_n$$

برای هر $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

اثبات. اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جمعی باشد، آنگاه f در خواص زیر صدق می‌کند:

الف) $f(0) = 0$ (زیرا $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$).

ب) برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(-x) = -f(x)$ (زیرا $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$)

ج) برای هر عدد گویای $r \in \mathbb{R}$ و هر $x \in \mathbb{R}$، $f(rx) = r f(x)$.

اثبات (ج) طی چند مرحله انجام می‌پذیرد. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد آنگاه

$$f(nx) = f(x + \cdots + x) = f(x) + \cdots + f(x) = n f(x)$$

پس

$$n f\left(\frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{nx}{n}\right) = f(x)$$

در نتیجه

$$f\left(\left(\frac{1}{n}\right) x\right) = \frac{1}{n} f(x)$$

بنابراین اگر m و n اعداد صحیح مثبت باشند، آنگاه

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x)$$

بنابراین

$$f(rx)=rf(x) \qquad \forall r\in\mathbb{Q},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

چون f در صفر پیوسته است، رابطه $f(x-y)=f(x)-f(y)$ نشان می‌دهد که f در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است. حال اگر $x\in\mathbb{R}$ آنگاه دنباله $\{r_n\}$ از اعداد گویا وجود دارد به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x$ پس

$$f(x)=\lim f(r_n)=\lim r_nf(1)=xf(1)=cx$$

که در آن $c=f(1)$ که ثابت است.

اثبات حالت n بعدی توسط استقراء روی n به سادگی به دست می‌آید.

حال ثابت می‌کنیم که تنها اندازه‌های برل پایا تحت انتقال روی $\mathbb{R}^n$ مضارب اندازه لبگ می‌باشند.

قضیه ۲۶. فرض کنید μ یک اندازه برل پایا تحت انتقال روی $\mathbb{R}^n$ است، آنگاه ثابت c وجود دارد به طوری که برای هر مجموعه برل A در $\mathbb{R}^n$ داریم $\mu(A)=c\lambda(A)$.

اثبات. برای هر $x\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم

$$I_x=\begin{cases}\phi & x=0\\ [0,x) & x>0\\ [x,0) & x<0\end{cases}$$

همچنین، برای هر $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ قرار می‌دهیم

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & \prod\limits_{i=1}^{n}x_i>0\\ -1 & \prod\limits_{i=1}^{n}x_i<0\end{cases}$$

حال فرض کنید μ یک اندازه برل ناصفر پایا تحت انتقال روی $\mathbb{R}^n$ است. تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x_1,\dots,x_n)=\operatorname{sgn}x\cdot\mu\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)$$

تعریف می‌کنیم که در آن $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. در این صورت f در هر یک از متغیرهایش به طور جداگانه جمعی است. به عنوان مثال، نشان می‌دهیم f نسبت به متغیر اولش جمعی است. حالتی که در آن $a>0$، $b<0$ و $a+b>0$ را در نظر می‌گیریم، $x_2,\dots,x_n$ را ثابت گرفته

و قرار می‌دهیم $s=\operatorname{sgn}(x_2,\dots,x_n)$ و $I=\prod_{i=2}^{n} I_{x_i}$. بوضوح

$$[0,a)\setminus[a+b,a)=[0,a+b)$$

$$[a+b,a)\times I=(a,0,\dots,0)+[b,0)\times I$$

چون μ پایا تحت انتقال است، داریم

$$\mu([b,0)\times I)=\mu([a+b,a)\times I)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
f(a,x_2,\dots,x_n)+f(b,x_2,\dots,x_n)&=s\left[\mu([0,a)\times I)-\mu([b,0)\times I)\right]\\
&=s\left[\mu([0,a)\times I)-\mu([a+b,a)\times I)\right]\\
&=s\,\mu(([0,a)\setminus[a+b,a))\times I)\\
&=s\,\mu([0,a+b)\times I)\\
&=f(a+b,x_2,\dots,x_n).
\end{aligned}$$

حالتهای دیگر بطور مشابه ثابت می‌شوند. حال توجه می‌کنیم که f در صفر نسبت به هر کدام از متغیرهایش بطور جداگانه پیوسته است. زیرا اگر $a_k\uparrow 0$ و $I=\prod_{i=2}^{n} I_{x_i}$ آنگاه

$$[a_k,0)\times I\downarrow\emptyset$$

بنابراین $\mu([a_k,0)\times I)\downarrow 0$ و در نتیجه

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k,x_2,\dots,x_n)=0$$

یعنی f در صفر نسبت به متغیر اولش پیوسته است. از طرف دیگر $f(b,x_2,\dots,x_n)=-f(-b,x_2,\dots,x_n)$ نتیجه می‌دهد که f نسبت به متغیر اولش پیوسته از راست است. بنابراین f در صفر نسبت به هر کدام از متغیرهایش بطور جداگانه پیوسته است.

طبق لم قبل، ثابت c وجود دارد به طوری که $f(x_1,\dots,x_n)=c\,x_1\cdots x_n$. چون $\mu\neq 0$ نتیجه می‌شود $c>0$، حال فرض کنید $A=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ که در آن $-\infty<a_i<b_i<\infty$. چون $A=(a_1,\dots,a_n)+\prod_{i=1}^{n}[0,b_i-a_i)$ داریم

$$\mu(A)=\mu\Big(\prod_{i=1}^{n}[0,b_i-a_i)\Big)=f(b_1-a_1,\dots,b_n-a_n)=c\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=c\,\lambda(A).$$

بنابراین روی $\mathcal{S}$

$$\lambda=c^{-1}\mu$$

از قضایای قبل نتیجه می‌شود که برای هر $A\in\mathcal{B}$، $\lambda(A)=c^{-1}\mu(A)$ یعنی $\mu(A)=c\,\lambda(A)$.

نتیجه زیر بیان می‌کند که هر مجموعه برلی یک مجموعه اندازه‌پذیر لبگ است. خانواده تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ را با Λ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۷. هر زیرمجموعه برل $\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر لبگ است.

اثبات. فرض کنید برای $i=1,2,\dots,n$، $-\infty < a_i < b_i < \infty$. m را چنان انتخاب می‌کنیم که برای $1 \le i \le n$، $a_i + \frac{1}{m} < b_i$. بالطبع

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = \bigcup_{k=m}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{n} [a_i + \tfrac{1}{k}, b_i) \right]$$

و σ-جبر بودن Λ نتیجه می‌دهد که

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \in \Lambda$$

پس با توجه به اینکه هر مجموعه باز را می‌توان به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های به فرم بالا نوشت، نتیجه می‌شود که Λ شامل هر مجموعه بازی است. بنابراین Λ باید شامل هر مجموعه برلی باشد زیرا مجموعه‌های برل عناصر σ-جبر تولید شده توسط مجموعه‌های باز می‌باشند.