۴.۲ همگرایی در اندازه

فرض کنید $(X,\mathcal{S},\mu)$ یک فضای اندازه است. خانواده تمام توابع μ-اندازه‌پذیر با مقادیر حقیقی تعریف شده روی X را با $\mathcal{M}$ نمایش می‌دهیم

$$\mathcal{M}=\{f\in\mathbb{R}^X : \text{است}\ \text{اندازه‌پذیر}\text{-}\mu\ \text{تابع}\ f\}$$

$\mathcal{M}$ تحت عملهای جبری و عملهای شبکه بسته است. یعنی $\mathcal{M}$ یک فضای توابع و یک جبر است. در فضای $\mathcal{M}$ مفهوم همگرایی دنباله‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲۸. دنباله (f_n) از توابع اندازه‌پذیر را همگرا به $f\in\mathcal{M}$ در اندازه (یا در احتمال) نامیم و با نماد $f_n\xrightarrow{\mu} f$ نمایش می‌دهیم هرگاه به ازای هر $\epsilon>0$

$$\lim \mu^*(\{x\in X: |f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon\})=0$$

در قضیه زیر خواص همگرایی در اندازه را خلاصه کرده‌ایم.

قضیه ۲۹. فرض کنید (f_n) و (g_n) دو دنباله از توابع اندازه‌پذیر است و $f,g\in\mathcal{M}$. در این صورت عبارات زیر برقرار است:

الف) اگر $f_n\xrightarrow{\mu}f$ و $g_n\xrightarrow{\mu}g$ آنگاه برای هر $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$،

$$\alpha f_n+\beta g_n\xrightarrow{\mu}\alpha f+\beta g.$$

ب) اگر $f_n\xrightarrow{\mu}f$ و $f_n\xrightarrow{\mu}g$ آنگاه $f=g$ a.e.

اثبات: الف). فرض کنید $\alpha,\beta\neq 0$. از

$$|\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)-[\alpha f(x)+\beta g(x)]|\leq|\alpha||f_n(x)-f(x)|+|\beta||g_n(x)-g(x)|$$

نتیجه می‌شود که

$$\{x\in X: |\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)-[\alpha f(x)+\beta g(x)]|\geq\epsilon\}$$
$$\subseteq\{x\in X: |f_n(x)-f(x)|\geq\frac{\epsilon}{2|\alpha|}\}\cup\{x\in X: |g_n(x)-g(x)|\geq\frac{\epsilon}{2|\beta|}\}$$

و حکم برقرار است.

ب) فرض کنید $f_n\xrightarrow{\mu}f$ و $f_n\xrightarrow{\mu}g$. برای $\epsilon>0$ نامساوی مثلث نتیجه می‌دهد که

$$\{x\in X: |f(x)-g(x)|\geq 2\epsilon\}$$
$$\subseteq\{x\in X: |f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon\}\cup\{x\in X: |f_n(x)-g(x)|\geq\epsilon\}$$

بنابراین برای هر $\varepsilon>0$ داریم

$$\mu^*(\{x\in X : |f(x)-g(x)| \geq 2\varepsilon\})=0$$

در نتیجه

$$\mu^*(\{x\in X : f(x)\neq g(x)\}) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X : |f(x)-g(x)|\geq \tfrac{1}{n}\}\Big)=0$$

یعنی $f=g$ a.e.

عملهای شبکه نسبت به همگرایی در اندازه، پیوسته اند.

قضیه ۳۰. فرض کنید دنباله (f_n) از توابع اندازه پذیر در شرط $f_n \xrightarrow{\mu} f$ صدق می کند. در این صورت عبارات زیر برقرارند.

$$f_n^+ \xrightarrow{\mu} f^+$$
$$f_n^- \xrightarrow{\mu} f^-$$
$$|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$$

اثبات. حکم های مورد نظر به سادگی از روابط زیر حاصل می شوند:

$$|f_n^+-f^+|\leq|f_n-f|,\quad |f_n^- - f^-|\leq |f_n-f|,\quad \big||f_n|-|f|\big|\leq|f_n-f|$$

ارتباط بین مفاهیم همگرایی در اندازه و همگرایی نقطه وار در زیر آورده شده است.

قضیه ۳۱. اگر (f_n) دنباله ای از توابع اندازه پذیر باشد به طوری که برای $f\in \mathcal{M}$، $f_n \xrightarrow{\mu} f$
آن گاه زیردنباله (f_{k_n}) از (f_n) وجود دارد به طوری که $f_{k_n} \xrightarrow{a.e.} f$

اثبات. فرض کنید $f_n \xrightarrow{\mu} f$. استدلالی ساده نشان می دهد که دنباله اکیداً صعودی $\{k_n\}$ از اعداد صحیح مثبت وجود دارد به طوری که برای هر $k\geq k_n$ داریم

$$\mu^*(\{x\in X : |f_k(x)-f(x)|\geq \tfrac{1}{n}\}) < 2^{-n}$$

قرار می دهیم

$$E_n=\{x\in X : |f_{k_n}(x)-f(x)|\geq \tfrac{1}{n}\}$$

و فرض کنید $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$. در این صورت برای هر n

$$\mu^*(E)\leq \mu^*\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\Big)\leq \sum_{k=n}^{\infty}\mu^*(E_k)\leq 2^{-n+1}$$

پس $\mu^*(E)=0$. علاوه بر آن، اگر $x\notin E$ آن گاه n ای وجود دارد به طوری که $x\notin \bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$ و

در نتیجه برای هر $n \le m$ ، $|f_{k_m}(x) - f(x)| \le \frac{1}{m}$ ، بنابراین برای $x \in E^c$ داریم
$$\lim f_{k_n}(x) = f(x)$$
یعنی $f_{k_n} \xrightarrow{a.e.} f$.

توضیح ۳۲. همگرایی نقطه‌وار، همگرایی در اندازه را نتیجه نمی‌دهد. به عنوان مثال فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و λ اندازه لبگ است. تعریف می‌کنیم $f_n = \chi_{[n, n+1]}$. بوضوح برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم
$$\lim f_n(x) = 0$$
از طرف دیگر برای هر n داریم
$$\lambda(\{x \in X : |f_n(x)| \geq 1\}) = \lambda([n, n+1]) = 1$$
پس (f_n) در اندازه به صفر همگرا نیست.

بهر حال اگر فضای اندازه متناهی باشد آنگاه همگرایی نقطه‌وار، همگرایی در اندازه را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۳۳. فرض کنید $\mu^*(X) < \infty$. اگر دنباله (f_n) از توابع اندازه‌پذیر در شرط $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ صدق کند آنگاه $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

اثبات. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده است. برای هر n قرار می‌دهیم
$$E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$$
چون $\mu^*(X) < \infty$ از قضیه اگوروف نتیجه می‌شود که برای $\delta > 0$ داده شده، مجموعه اندازه‌پذیر A وجود دارد به طوری که $\mu^*(A) < \delta$ و (f_n) بطور یکنواخت روی A^c به f همگراست.

k را چنان انتخاب می‌کنیم که برای هر $x \in A^c$ و هر $n \geq k$ ، $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

در این صورت برای هر $n \geq k$ ، $E_n \subseteq A$ و بنابراین $\mu^*(E_n) \le \mu^*(A) < \delta$ برای $n \geq k$.

در نتیجه $\lim \mu^*(E_n) = 0$ و حکم تمام است.

مثال ۲. بازه $[0,1]$ با اندازه لبگ λ را در نظر بگیرید. برای هر n ، بازه $[0,1]$ را به n زیربازه به صورت $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$ تقسیم می‌کنیم. تمام این بازه‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم
$$[0, \tfrac{1}{2}], [\tfrac{1}{2}, 1], [0, \tfrac{1}{3}], [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}], [\tfrac{2}{3}, 1], [0, \tfrac{1}{4}], [\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}], [\tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}], [\tfrac{3}{4}, 1], \ldots$$
فرض کنید f_n تابع مشخصه nامین بازه در دنباله بالا است. بوضوح $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ اما $\{f_n(x)\}$ برای هر $x \in [0,1]$ به صفر همگرا نیست.