۵.۲ توابع بالائی

در بخش ۲.۲ دیدیم که تابع φ یک تابع پله‌ای است اگر و تنها اگر خانواده متناهی $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر با $\mu^*(A_i) < \infty$ برای $i=1,2,\dots,n$ و اعداد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$ موجود باشند به طوری که $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. عدد حقیقی

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i)$$

را L-انتگرال φ نامیدیم و دیدیم که مقدار $I(\varphi)$ مستقل از نمایش φ است. L-انتگرال φ را با نماد $\int \varphi d\mu$ یا $\int_X \varphi d\mu$ نشان می‌دهیم. پس

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i).$$

قضیه ۳۴. خانواده تمام توابع پله‌ای تحت عملهای مقدماتی یک فضای توابع و یک جبر است.

اثبات. اثبات اینکه خانواده توابع پله‌ای یک جبر است، به طور مستقیم از تعریف حاصل می‌شود. برای اثبات اینکه یک فضای توابع است، توجه می‌کنیم که اگر تابع پله‌ای φ دارای نمایش استاندارد $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ باشد آنگاه $\varphi^+ = \sum_{i=1}^{n} \max\{a_i, 0\} \chi_{A_i}$. بنابراین φ^+ نیز یک تابع پله‌ای است و نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

خواص اولیه L-انتگرال برای توابع پله‌ای در بخش (۲.۲) شرح داده شد. در این بخش توجه خود را به حدود تقریباً همه جای دنباله‌های صعودی از توابع پله‌ای معطوف می‌کنیم.

تعریف ۳۵. تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را یک تابع بالائی نامیم، هرگاه دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع پله‌ای وجود داشته باشد به طوری که

الف) $\varphi_n \uparrow f$ a.e. و

ب) $\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n \, d\mu < \infty$.

دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع پله‌ای برقرار در شرایط (الف) و (ب) تعریف، را یک دنباله مولد تابع f نامیم.

طبق قضیه (۹)، هر تابع بالایی یک تابع اندازه‌پذیر است. خانواده تمام توابع بالایی را با $\mathcal{U}$ نمایش می‌دهیم.

به وضوح هر تابع پله‌ای یک تابع بالایی است. علاوه بر آن، یک تابع بالایی لزوماً تابعی مثبت نیست. اگر f یک تابع بالایی با دنباله مولد $\{\varphi_n\}$ بوده و اگر $\{\psi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای باشد به طوری که $\psi_n \uparrow f$ a.e. آنگاه از قضیه (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int \psi_n \, d\mu$$

بنابراین $\{\psi_n\}$ نیز یک دنباله مولد برای f است و در نتیجه تعریف زیر با معناست.

تعریف ۳۶. فرض کنید f یک تابع بالایی و $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است به طوری که $\varphi_n \uparrow f$ a.e. در این صورت انتگرال لبگ (یا به طور ساده‌تر انتگرال) f توسط

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n \, d\mu$$

تعریف می‌شود.

مقدار ل-انتگرال یک تابع بالایی مستقل از انتخاب دنباله توابع پله‌ای است. علاوه بر آن، اگر f یک تابع بالایی و g تابعی دیگر باشد به طوری که $f=g$ a.e. آنگاه g نیز تابع بالایی است و $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$.

قضیه ۳۷. فرض کنید f و g توابع بالایی‌اند. در این صورت

الف) $f+g$ یک تابع بالایی است و $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

ب) αf برای $\alpha \geq 0$ یک تابع بالایی است و $\int(\alpha f)d\mu=\alpha\int f d\mu$.

ج) $f\vee g$ و $f\wedge g$ توابع بالایی اند.

اثبات. دو دنباله مولد $\{\varphi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ برای f و g به ترتیب، انتخاب می کنیم.

الف) به وضوح $\{\varphi_n+\psi_n\}$ یک دنباله از توابع پله ای است و $\varphi_n+\psi_n \uparrow f+g$ a.e. بنابراین

$$\int(\varphi_n+\psi_n)d\mu=\int\varphi_n d\mu+\int\psi_n d\mu \uparrow \int f d\mu+\int g d\mu$$

در نتیجه $f+g$ یک تابع بالایی است و با توجه به توضیح قبل از قضیه، (الف) حاصل می شود.

ب) با توجه به تعریف، واضح است.

ج) هر دو دنباله $\{\varphi_n\vee\psi_n\}$ و $\{\varphi_n\wedge\psi_n\}$ دنباله هایی از توابع پله ای اند، علاوه بر آن $\varphi_n\wedge\psi_n \uparrow f\wedge g$ a.e. و

$$\lim\int\varphi_n\wedge\psi_n d\mu \leq \lim\int\varphi_n d\mu<\infty$$

پس $f\wedge g$ یک تابع بالایی است. از طرفی داریم

$$\varphi_n\vee\psi_n \uparrow f\vee g \quad \text{a.e.}$$

با توجه به رابطه $\varphi_n\vee\psi_n=\varphi_n+\psi_n-\varphi_n\wedge\psi_n$ داریم

$$\int\varphi_n\vee\psi_n d\mu=\int\varphi_n d\mu+\int\psi_n d\mu-\int\varphi_n\wedge\psi_n d\mu$$
$$\uparrow \int f d\mu+\int g d\mu-\int f\wedge g d\mu<\infty$$

پس $f\vee g$ یک تابع بالایی است.

قضیه بعد بیان می کند که انتگرال روی $\mathcal{U}$ یکنوا است.

قضیه ۳۸. اگر f و g توابع بالایی بوده و $f\geq g$ a.e. آنگاه

$$\int f d\mu \geq \int g d\mu$$

بالاخص، اگر $f\in\mathcal{U}$ و $f\geq 0$ a.e. آنگاه $\int f d\mu\geq 0$.

اثبات. فرض کنید $\{\varphi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ به ترتیب دنباله‌های مولد f و g هستند. در این صورت $\varphi_n \wedge \psi_n \uparrow g$ a.e. بنابراین $\{\varphi_n \wedge \psi_n\}$ نیز یک دنباله مولد برای g است. طبق قضیه (۱۳)، برای هر n داریم

$$\int \varphi_n \, d\mu \geq \int \varphi_n \wedge \psi_n \, d\mu$$

بنابراین

$$\int f \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu \geq \lim \int \varphi_n \wedge \psi_n \, d\mu = \int g \, d\mu$$

قضیه ۳۹. فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ یک تابع است. اگر دنباله $\{f_n\}$ از توابع بالایی وجود داشته باشد به طوری که $f_n \uparrow f$ a.e. و $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu < \infty$ آنگاه f یک تابع بالایی است و $\int f \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

اثبات. برای هر i، دنباله $\{\varphi_n^i\}$ از توابع پله‌ای را انتخاب می‌کنیم به طوری که $\varphi_n^i \uparrow_n f_i$ a.e. حال برای هر n قرار می‌دهیم

$$\psi_n = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_n^i$$

هر ψ_n یک تابع پله‌ای است و $\psi_n \uparrow f$ a.e. همچنین برای هر n، $\psi_n \leq f_n$ a.e. و در نتیجه طبق قضیه (۳۸)

$$\lim \int \psi_n \, d\mu \leq \lim \int f_n \, d\mu < \infty$$

بنابراین f یک تابع بالایی است.

چون به ازای هر i ثابت داریم

$$\varphi_n^i \leq \psi_n \qquad n \geq i$$

بنابراین برای هر i

$$\int f_i \, d\mu = \lim_n \int \varphi_n^i \, d\mu \leq \lim \int \psi_n \, d\mu$$

پس

$$\lim \int f_n \, d\mu = \lim \int \psi_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

انتگرال در خاصیت مهم همگرایی زیر برای دنباله‌های نزولی برقرار است.

قضیه ۴۰. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع بالایی باشد به طوری که $f_n \downarrow 0$ a.e. آن‌گاه $\int f_n \, d\mu \downarrow 0$.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. برای هر n، دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع پله‌ای را اختیار می‌کنیم به طوری که $0 \le \varphi_n \le f_n$ a.e. و

$$\int (f_n - \varphi_n)\, d\mu = \int f_n \, d\mu - \int \varphi_n \, d\mu < \varepsilon\, 2^{-n}$$

($f_n - \varphi_n$ یک تابع بالایی است). قرار می‌دهیم

$$\psi_n = \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \qquad \forall n$$

در این صورت $\{\psi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است و $\psi_n \downarrow 0$ a.e.، زیرا $f_n \downarrow 0$ a.e.

طبق قضیه (۱۴) داریم

$$\int \psi_n \, d\mu = 0$$

حال عدد صحیح k را انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$\int \psi_n \, d\mu < \varepsilon \qquad \forall n \geq k$$

و از نامساوی تقریباً همه جای زیر

$$0 \le f_n - \psi_n = \bigvee_{i=1}^{n} (f_n - \varphi_i) \le \bigvee_{i=1}^{n} (f_i - \varphi_i) \le \sum_{i=1}^{n} (f_i - \varphi_i) \quad \text{a.e.}$$

نتیجه می‌شود که

$$\int f_n \, d\mu - \int \psi_n \, d\mu \le \sum_{i=1}^{n} \int (f_i - \varphi_i)\, d\mu < \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\right) = \varepsilon$$

بنابراین

$$0 \le \int f_n \, d\mu < \varepsilon + \int \psi_n \, d\mu < 2\varepsilon \qquad \forall n \geq k$$

در نتیجه $\int f_n \, d\mu \downarrow 0$.

توضیح ۴۱. توجه کنید که U یک فضای برداری در حالت کلی نیست، زیرا تحت ضرب اسکالر در اعداد منفی بسته نیست. (تمرین).

تمرین

۱. فرض کنید ـــ خانواده تمام توابع پله‌ای است به طوری که تعداد متناهی عناصر $A_1,\dots,A_n$ از S با اندازه متناهی و اعداد حقیقی $a_1,\dots,a_n$ وجود دارند به طوری که $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$. نشان دهید ـــ یک فضای توابع است. آیا ـــ یک جبر از توابع است؟

۲. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده توسط

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\notin(0,1]\\ \sqrt{n} & \exists n,\ x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\end{cases}$$

نشان دهید f یک تابع بالایی است ولی $-f$ یک تابع بالایی نیست.

۳. $\int f\,d\lambda$ را برای تابع در تمرین (۲) به دست آورید.

۴. ثابت کنید هر تابع پیوسته $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ نسبت به اندازه لبگ روی $[a,b]$ یک تابع بالایی است.

۵. فرض کنید A یک مجموعه اندازه‌پذیر است و f یک تابع بالایی می‌باشد. اگر $\chi_A\le f$ a.e.، نشان دهید $\mu^*(A)<\infty$.

۶. فرض کنید f یک تابع بالایی و A مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازه متناهی است به طوری که برای $x\in A$، $a\le f(x)\le b$. ثابت کنید

الف) $f\chi_A$ یک تابع بالایی است.

ب) $a\mu^*(A)\le\int f\chi_A\,d\mu\le b\mu^*(A)$

۷. فرض کنید (X,S,μ) یک فضای اندازه متناهی است و f یک تابع اندازه‌پذیر مثبت است. نشان دهید f یک تابع بالایی است اگر و تنها اگر عدد حقیقی M وجود داشته باشد به طوری که $\int\varphi\,d\mu\le M$ برای هر تابع پله‌ای φ با $\varphi\le f$ a.e. علاوه بر آن نشان دهید اگر چنین حالتی برقرار باشد آن گاه

$$\int f\,d\mu=\sup\left\{\int\varphi\,d\mu:\ \varphi\le f\ \text{a.e.}\ \text{و}\ \varphi\ \text{یک تابع پله‌ای است}\right\}$$

۶.۲ توابع انتگرال پذیر

در انتهای بخش ۵.۲ بیان کردیم که خانواده $\mathcal{U}$ از توابع بالایی یک فضای برداری نیست. بهرحال، اگر خانواده تمام توابعی را که بصورت تفاضل دو تابع بالایی تقریباً همه‌جا نوشته می‌شوند را در نظر بگیریم، این خانواده یک فضای توابع است. عناصر این خانواده را توابع انتگرال پذیر لبگ نامیم. بخش حاضر به بررسی این خانواده اختصاص دارد.

تعریف ۴۲. تابع $f: X \to \mathbb{R}$ را انتگرال پذیر لبگ (یا بطور ساده تر انتگرال پذیر) نامیم، هرگاه توابع بالایی u و v وجود داشته باشند بطوریکه $f = u - v$ a.e. انتگرال f توسط

$$\int f d\mu = \int u d\mu - \int v d\mu$$

تعریف می‌شود.

توضیح ۴۳. باید توجه کرد که مقدار انتگرال مستقل از نمایش f به صورت تفاضل دو تابع بالایی است. زیرا اگر $f = u - v = u_1 - v_1$ a.e. که در آن u، u_1، v و v_1 توابع بالایی هستند آنگاه $u + v_1 = u_1 + v$ a.e. پس از قضیه (۳۷) - الف داریم

$$\int u d\mu + \int v_1 d\mu = \int u_1 d\mu + \int v d\mu$$

بنابراین

$$\int u d\mu - \int v d\mu = \int u_1 d\mu - \int v_1 d\mu$$

یک تابع انتگرال پذیر، لزوماً اندازه پذیر است و هر تابع بالایی یک انتگرال پذیر می‌باشد. علاوه بر آن، اگر f تابع انتگرال پذیر لبگ بوده و g تابعی دیگر باشد بطوریکه $f = g$ a.e. آنگاه g نیز انتگرال پذیر لبگ است و

$$\int g d\mu = \int f d\mu.$$

قضیه ۴۴. خانواده تمام توابع L- انتگرال پذیر یک فضای توابع است.

اثبات. فرض کنید f و g دو تابع انتگرال پذیر با نمایش های $f=u-v$ a.e. و $g=u_1-v_1$ a.e. است. آن گاه تقریباً همه جا اتحادهای

$$f+g=(u+u_1)-(v-v_1)$$

$$\alpha f=\alpha u-\alpha v \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

توابع بالا را به صورت تفاضل های توابع بالایی تجزیه می کنند. پس خانواده توابع انتگرال پذیر یک فضای توابع است.

اگر f انتگرال پذیر باشد آن گاه $|f|$ نیز تابعی انتگرال پذیر است. بالاخص، از قضیه (۴۴) نتیجه می شود که تابع f یک تابع L- انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر f^+ و f^- هر دو L- انتگرال پذیر باشند.

قضیه ۴۵. فرض کنید f و g توابع انتگرال پذیرند، در این صورت برای هر $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ داریم

$$\int(\alpha f+\beta g)\,d\mu=\alpha\int f\,d\mu+\beta\int g\,d\mu$$

اثبات. تمرین

قضیه ۴۶. فرض کنید f تابعی انتگرال پذیر است و $f\geq 0$ a.e. آن گاه f یک تابع بالایی است.

اثبات. توابع بالایی u و v را انتخاب می کنیم به طوری که $f=u-v$ a.e. چون u و v تقریباً همه جا حد دنباله هایی از توابع پله ای اند، پس دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع پله ای وجود دارد به طوری که $\varphi_n\to f$ a.e. چون $f\geq 0$ a.e. پس $\varphi_n^+\to f$ a.e. طبق قضیه (۱۷)، دنباله $\{s_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که

$$0\leq s_n\uparrow f \quad \text{a.e.}$$

برای هر n، قرار دهید

$$\varphi_n = s_n \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} \psi_i^+\right)$$

آن گاه $\{\varphi_n\}$ یک دنباله از توابع پله‌ای است به طوری که $0 \leq \varphi_n \uparrow f$ a.e. برای کامل کردن اثبات، نشان می‌دهیم دنباله $\{\int \varphi_n d\mu\}$ کراندار است. از

$$\varphi_n + v \leq f + v = u \quad \text{a.e.}$$

و قضیه (۳۸) نتیجه می‌شود که

$$\int \varphi_n d\mu + \int v d\mu \leq \int u d\mu,$$

و بنابراین برای هر n،

$$\int \varphi_n d\mu \leq \int u d\mu - \int v d\mu < \infty$$

و اثبات کامل است.

به عنوان کاربردی از قضیه (۴۶)، نتیجه مفید زیر را داریم.

قضیه ۴۷. اگر f تابعی انتگرال پذیر باشد آن گاه برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، مجموعه اندازه پذیر $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ دارای اندازه متناهی است.

اثبات. قرار می‌دهیم

$$A = \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

داریم

$$\varepsilon \chi_A \leq |f|$$

$\frac{1}{\varepsilon}|f|$ تابعی انتگرال پذیر است، در واقع طبق قضیه (۴۶) یک تابع بالایی است. فرض کنید $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است به طوری که $\varphi_n \uparrow (\frac{1}{\varepsilon})|f|$ a.e. در نتیجه $\{\varphi_n \wedge \chi_A\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است به طوری که $\varphi_n \wedge \chi_A \uparrow \chi_A$ a.e. بنابراین طبق قضیه (۴۱)

$$\mu^*(A)=\lim\int \varphi_n \wedge \chi_A \, d\mu \le \lim \int \varphi_n \, d\mu = \frac{1}{\epsilon}\int |f| \, d\mu < \infty$$

توضیح ۴۸. اگر f تابعی انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه قضیه (۴۶) نتیجه می‌دهد که f^+ و f^- هر دو توابع بالایی اند و بنابراین $f=f^+-f^-$ یک تجزیه f به صورت تفاضل دو تابع بالایی مثبت است. بالاخص $\int f d\mu=\int f^+ d\mu-\int f^- d\mu$.

قضیه ۴۹. فرض کنید f تابعی اندازه‌پذیر است، اگر توابع انتگرال‌پذیر h و g موجود باشند به طوری $h \le f \le g$ a.e.، آنگاه f نیز تابعی انتگرال‌پذیر است.

اثبات. از $h \le f \le g$ a.e. داریم

$$0 \le f-h \le g-h \quad \text{a.e.}$$

پس بدون کم شدن از کلیت بحث، فرض می‌کنیم $0 \le f \le g$ a.e. طبق قضیه (۴۶) g یک تابع بالایی است، دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع پله‌ای را انتخاب می‌کنیم به طوری که $0 \le \varphi_n \uparrow g$ a.e.، طبق قضیه (۱۷)، دنباله $\{\psi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که $0 \le \psi_n \uparrow f$ a.e. اما در این صورت $\{\varphi_n \wedge \psi_n\}$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای است که

$$\varphi_n \wedge \psi_n \uparrow f \quad \text{a.e.}$$

و

$$\int \varphi_n \wedge \psi_n \, d\mu \le \lim \int \varphi_n \, d\mu = \int g \, d\mu < \infty \qquad \forall n$$

بنابراین $f \in \mathcal{U}$ و در نتیجه f تابعی انتگرال‌پذیر است.

قضیه ۵۰. فرض کنید f و g توابعی انتگرال‌پذیرند، در این صورت

الف) اگر $\int |f| d\mu=0$ آنگاه $f=0$ a.e.،

ب) اگر $f \geqslant g$ a.e. آنگاه $\int f d\mu \geqslant \int g d\mu$.

ج) $|\int f d\mu| \le \int |f| d\mu$.

اثبات. الف) به وضوح، اگر $f=0$ a.e. آنگاه $\int|f|d\mu=0$. از طرف دیگر، فرض کنید $\int|f|d\mu=0$. طبق قضیه (۴۶)، $|f|$ یک تابع بالایی است، پس دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع پله‌ای وجود دارد به طوری که $0\leq\varphi_n\uparrow|f|$ a.e.. از قضیه (۳۸) نتیجه می‌شود که برای هر n، $\int\varphi_n d\mu=0$ پس برای هر n $\varphi_n=0$ a.e.. بنابراین $|f|=0$ a.e. یعنی $f=0$ a.e..

ب) چون $f-g\geq 0$ a.e.، از قضیه (۴۶) نتیجه می‌شود که $f-g$ یک تابع بالایی است. حال طبق قضیه (۳۸)

$$\int f d\mu-\int g d\mu=\int(f-g)d\mu\geq 0$$

پس $\int f d\mu\geq\int g d\mu$.

ج) حکم از (ب) و نامساوی $-|f|\leq f\leq|f|$ حاصل می‌شود.

توضیح ۵۱. توجه داریم که تاکنون توابع با مقادیر حقیقی را مورد نظر قرار داده‌ایم. به هر حال، می‌توانیم توابع با مقادیر نامتناهی را در نظر بگیریم مشروط به اینکه مجموعه تمام نقاطی که تابع در آن نقاط ∞ یا $-\infty$ است یک مجموعه پوچ باشد، زیرا نه مشخصه انتگرال‌پذیری، نه مقدار انتگرال یک تابع با در نظر گرفتن مقادیر آن روی یک مجموعه پوچ، تغییری نمی‌کند. علاوه بر آن

قضیه ۵۲. (Levi) فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ از توابع انتگرال‌پذیر در شرایط زیر صدق کند

الف) برای هر n، $f_n \le f_{n+1}$ a.e.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$

آن‌گاه تابع انتگرال‌پذیر f وجود دارد به طوری که $f_n \uparrow f$ a.e. (و بنابراین $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$)

اثبات. با جایگزینی $\{f_n - f_1\}$ به جای $\{f_n\}$ در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که $\forall n,\ f_n \geq 0$ a.e. علاوه بر آن، با یک استدلال ساده نشان داده می‌شود که می‌توان فرض کرد برای هر $x\in X$، $0 \le f_n(x) \uparrow$. قرار می‌دهیم $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$،

برای هر $x \in X$، قرار می‌دهیم $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ و $E = \{x\in X : g(x) = \infty\}$ در این صورت

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > i\} \right)$$

بنابراین E یک مجموعه اندازه‌پذیر است. حال نشان می‌دهیم $\mu^*(E) = 0$.

طبق قضیه (۴۶)، هر f_i یک تابع بالایی است. بنابراین برای هر i دنباله $\{\varphi_n^i\}$ از توابع پله‌ای وجود دارد به طوری که

$$0 \le \varphi_n^i \uparrow_n f_i \quad \text{a.e.}$$

برای هر n، قرار می‌دهیم $\psi_n = \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_n^i$. دنباله $\{\psi_n\}$، دنباله‌ای از توابع پله‌ای است به طوری که $\psi_n \uparrow g$ a.e. و

$$\lim \int \psi_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = I$$

بالاخص، برای هر k دنباله $\{\psi_n \wedge k\chi_E\}$ در $\psi_n \wedge k\chi_E \uparrow_n k\chi_E$ a.e. صدق می‌کند.

از قضیه (۱۶) نتیجه می‌شود که $\mu^*(E) < \infty$ و

$$k\mu^*(E) \le \lim \int \psi_n d\mu = I < \infty \qquad \forall k$$

بنابراین $\mu^*(E) = 0$. حال تابع $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ را با $f(x) = g(x)$، $x \notin E$

و $f(x)=0$ ، $x\in E$ تعریف می‌کنیم. در نتیجه $f_n \uparrow f$ a.e. و نتیجه از قضیه (۴۹) حاصل می‌شود.

قضیه ۵۳. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر نامنفی است به‌طوری که $\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu<\infty$. آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ یک تابع انتگرال‌پذیر را تعریف می‌کند و

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu.$$

اثبات. برای هر n، قرار می‌دهیم

$$g_n=\sum_{i=1}^{n} f_i$$

هر g_n یک تابع انتگرال‌پذیر است و $g_n\uparrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ a.e. از قضیه (۵۲) نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ یک تابع انتگرال‌پذیر است و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu=\lim\int g_n\,d\mu=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)d\mu.$$

قضیه ۵۴. (لم فاتو) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر است و برای هر n، $f_n\geqslant 0$ a.e. و

$$\liminf\int f_n\,d\mu<\infty$$

آنگاه

$$\int \liminf f_n\,d\mu\le \liminf\int f_n\,d\mu$$

اثبات. بدون کم شدن از کلیت بحث، فرض می‌کنیم برای هر $x\in X$ و هر n

$$f_n(x)\geqslant 0$$

برای n داده شده، قرار می‌دهیم

$$g_n(x)=\inf\{f_i : i\geqslant n\}\qquad x\in X$$

در این صورت هر g_n تابعی اندازه‌پذیر است و برای هر n، $0\le g_n\le f_n$، پس از قضیه (۴۹)، هر g_n انتگرال‌پذیر است و $g_n\uparrow$ و

$$\lim \int g_n d\mu \le \liminf \int f_n d\mu < \infty$$

بنابراین از قضیه (۵۲) نتیجه می‌شود که تابع انتگرال‌پذیر g وجود دارد به طوری که

$$g_n \uparrow g \quad a.e.$$

در نتیجه $g = \liminf f_n$ a.e. و بنابراین $\liminf f_n$ تابعی انتگرال‌پذیر است و

$$\int \liminf f_n d\mu = \int g d\mu = \lim \int g_n d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$$

قضیه ۵۵. قضیه همگرایی مغلوب (قطع شده) لبگ (LDCT). فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر است به طوری که در شرط

$$|f_n| \le g \quad a.e.$$

برای هر n و تابع انتگرال‌پذیری چون g برقرار است. اگر $f_n \to f$ a.e. آن‌گاه f تابعی انتگرال‌پذیر است و

$$\lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu.$$

اثبات. به وضوح $|f| \le g$ a.e. و انتگرال‌پذیری f از قضیه (۴۹) حاصل می‌شود. دنباله $\{g - f_n\}$ در فرضیات لم فاتو (قضیه ۵۴) صدق می‌کند و

$$\liminf (g - f_n) = g - f \quad a.e.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g-f) d\mu \\ &= \int \liminf (g-f_n) d\mu \\ &\le \liminf \int (g-f_n) d\mu = \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu \end{aligned}$$

پس

$$\limsup \int f_n d\mu \le \int f d\mu$$

به طور مشابه، لم فاتو را برای دنباله $\{g + f_n\}$ به کار می‌بریم، داریم

$$\int f d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$$

زیرا

$$\begin{aligned}\int g\,d\mu+\int f\,d\mu &= \int (f+g)\,d\mu\\ &= \int \liminf (g+f_n)\,d\mu\\ &\le \liminf \int (g+f_n)\,d\mu\\ &= \int g\,d\mu + \liminf \int f_n\,d\mu\end{aligned}$$

بنابراین $\lim \int f_n\,d\mu$ در $\mathbb{R}$ موجود است و

$$\lim \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

توضیح ۵۶. به سادگی دیده می‌شود که برای هر زیرمجموعه E از X، خانواده $S_E=\{E\cap A:\ A\in S\}$ از زیرمجموعه‌های E (که تحدید S به E نامیده می‌شود) یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های E است. حال اگر E زیرمجموعه اندازه‌پذیری از X باشد آنگاه تحدید μ به S_E یک اندازه است. یعنی (E,S_E,μ) برای هر زیرمجموعه اندازه‌پذیر E از X یک فضای اندازه است. همچنین، با عملیات مستقیم دیده می‌شود که زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر در (E,S_E,μ)، زیرمجموعه‌هایی از E هستند که به عنوان زیرمجموعه‌های X اندازه‌پذیرند.

اگر E زیرمجموعه اندازه‌پذیری از X باشد آنگاه تابع $f: E\to\mathbb{R}$ روی E انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه f نسبت به فضای اندازه (E,S_E,μ) انتگرال‌پذیر باشد. البته، دامنه f را می‌توان به تمام مجموعه X با فرض $f(x)=0$ برای $x\notin E$ توسیع داد. در این صورت f تابعی انتگرال‌پذیر روی X است و $\int_X f\,d\mu=\int_E f\,d\mu$.

تابع $f: X\to\mathbb{R}$ را روی زیرمجموعه $E\subset X$ انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه $f\chi_E$ روی X انتگرال‌پذیر باشد یا به طور معادل، تحدید f به E نسبت به فضای اندازه (E,S_E,μ) انتگرال‌پذیر باشد. در این حالت، داریم

$$\int f\chi_E\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

قضیه ۵۷ . هر تابع انتگرال پذیر f روی هر زیرمجموعه اندازه پذیر از X انتگرال پذیر است، علاوه بر آن برای هر زیرمجموعه اندازه پذیر E از X داریم

$$\int_E f\,d\mu + \int_{E^c} f\,d\mu = \int f\,d\mu$$

توضیح ۵۸ . اگر $\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\chi_{A_i}$ نمایش استاندارد یک تابع ساده مثبت φ باشد، آن گاه مجموع $\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\mu^*(A_i)$ می‌تواند یک عدد حقیقی نامنفی گسترش یافته باشد. اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\mu^*(A_i)=\infty$ آن گاه قرار می‌دهیم $\int\varphi\,d\mu=\infty$ و گوییم انتگرال لبگ φ بی‌نهایت است.

حال فرض کنید $f: X\longrightarrow\mathbb{R}^*$ یک تابع است که در آن دنباله $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای از توابع ساده است به طوری که $\varphi_n\uparrow f$ a.e. . آن گاه $\lim\int\varphi_n\,d\mu$ به عنوان یک عدد حقیقی گسترش یافته موجود است و می‌توان به سادگی دید که $\int\varphi_n\,d\mu$ مستقل از انتخاب دنباله $\{\varphi_n\}$ می‌باشد. در حالتی که $\int\varphi_n\,d\mu=\infty$ می‌نویسیم $\int f\,d\mu=\infty$ و گوییم انتگرال لبگ f بی‌نهایت است (اما نمی‌گوییم که f تابعی انتگرال پذیر است).

در چنین وضعیتی هر تابع اندازه پذیر مثبت f دارای یک انتگرال لبگ (متناهی یا نامتناهی) است، زیرا طبق قضیه (۱۷) دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که $\varphi_n\uparrow f$ a.e. .

با توجه به توضیحات بالا، تعدادی از قضایای بیان شده را می‌توان بدون فرض انتگرال پذیری روی توابع بیان و اثبات کرد. برای مثال لم فاتو را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد به طوری که $f_n\geq 0$ a.e. برای هر n، آن گاه

$$\int \liminf f_n\,d\mu \leq \liminf \int f_n\,d\mu$$

که در آن هر دو طرف نامعادله می‌توانند بی‌نهایت باشند.

تمرین

۱. با ارائه یک مثال نقض، نشان دهید که توابع انتگرال پذیر به فرم یک جبر نیستند.

۲. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است و ε_a اندازه دیراک روی X نسبت به نقطه a است. نشان دهید هر تابع $f:X\to\mathbb{R}$ انتگرال پذیر نسبت به اندازه دیراک است و

$$\int f\,d\varepsilon_a=f(a)$$

۳. فرض کنید μ اندازه شمارشی روی $\mathbb{N}$ است. نشان دهید تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|<\infty$. علاوه بر آن نشان دهید در این حالت داریم

$$\int f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

۴. نشان دهید تابع f انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر $|f|$ انتگرال پذیر باشد. یک مثال از تابع انتگرال ناپذیر ارائه دهید که قدر مطلق آن انتگرال پذیر باشد.

۵. فرض کنید f تابعی انتگرال پذیر است و $\{E_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های مجزای اندازه پذیر از X اند. اگر $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ آنگاه

$$\int_E f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f\,d\mu.$$

۶. فرض کنید f تابعی انتگرال پذیر است. نشان دهید برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود دارد (وابسته به ε) به طوری که $\left|\int_E f\,d\mu\right|<\varepsilon$ برای هر مجموعه اندازه پذیر E با $\mu^*(E)<\delta$.
(راهنمایی: ابتدا حکم را برای توابع پله‌ای ثابت کنید)

۷. نشان دهید برای هر تابع انتگرال پذیر f، مجموعه $\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ را می‌توان به صورت یک اجتماع شمارا از مجموعه‌های اندازه پذیر با اندازه متناهی (یعنی یک مجموعه σ-متناهی) نوشت.

۸. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ نسبت به اندازه لبگ انتگرال پذیر است. نشان دهید تابع $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ تعریف شده توسط

$$g(t)=\sup\left\{\int|f(x+y)-f(x)|\,d\lambda(x):\ |y|\le t\right\}$$

برای $t\geqslant 0$ در $t=0$ پیوسته است.

۹. فرض کنید g تابعی انتگرال‌پذیر است و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر می‌باشند به طوری که برای هر n، $|f_n| \le g$ a.e.. نشان دهید اگر $f_n \xrightarrow{\mu} f$ آنگاه f تابعی انتگرال‌پذیر است و $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$.

۱۰. فرض کنید f تابع اندازه‌پذیر تقریباً همه جا مثبت است و برای هر عدد صحیح i

$$e_i = \mu^*(\{x \in X : 2^{i-1} < f(x) \le 2^i\})$$

نشان دهید f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i e_i < \infty$

۱۱. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال است به طوری که برای هر n

$$0 \le f_{n+1} \le f_n \quad \text{a.e.}$$

نشان دهید $f_n \downarrow 0$ a.e. اگر و تنها اگر $\int f_n\, d\mu \downarrow 0$

۱۲. فرض کنید f تابعی انتگرال‌پذیر است به طوری که برای تقریباً تمام xها، $f(x) > 0$. اگر A یک مجموعه اندازه‌پذیر بوده و $\int_A f\, d\mu = 0$ آنگاه $\mu^*(A) = 0$.

۱۳. فرض کنید f تابع انتگرال‌پذیر مثبت است. تابع مجموعه‌ای $\nu : \Lambda \to [0, \infty)$ را توسط ضابطه زیر برای هر $A \in \Lambda$ تعریف می‌کنیم: $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$. نشان دهید:

الف) (X, Λ, ν) یک فضای اندازه است.

ب) اگر Λ_ν نشان دهنده زیرمجموعه‌های ν-اندازه‌پذیر X باشد، آنگاه $\Lambda \subset \Lambda_\nu$. مثالی ارائه دهید که $\Lambda \ne \Lambda_\nu$.

ج) اگر $\mu^*(\{x \in X : f(x) = 0\}) = 0$ نشان دهید $\Lambda = \Lambda_\nu$.

د) اگر g یک تابع انتگرال‌پذیر نسبت به فضای اندازه (X, Λ, ν) باشد آنگاه نشان دهید fg نسبت به فضای اندازه (X, S, μ) انتگرال‌پذیر است و

$$\int g\, d\nu = \int g f\, d\mu$$

(با توجه به این تساوی، می‌توان نوشت که $\nu = f d\mu$ و f را مشتق ν نسبت به μ گوییم و به صورت نمادین با $\frac{d\nu}{d\mu} = f$ نشان می‌دهیم.)

۱۴. فرمول تغییر متغیر. فرض کنید I یک فاصله در $\mathbb{R}$ است و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر نسبت به اندازه لبگ باشد. برای زوج اعداد حقیقی a و b با $a \neq 0$ قرار دهید

$$J = \left\{ \frac{x-b}{a} : x \in I \right\}$$

نشان دهید تابع $g : J \to \mathbb{R}$ تعریف شده توسط

$$g(x) = f(ax+b) \qquad x \in J$$

انتگرال‌پذیر است و

$$\int_I f \, d\lambda = |a| \int_J g \, d\lambda$$

(راهنمایی: ابتدا مسئله را برای توابع پله‌ای ثابت کنید)

۱۵. فرض کنید $(X, \mathcal{S}, \mu)$ یک فضای اندازه متناهی است. برای هر زوج از توابع اندازه‌پذیر f و g، فرض کنید

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \, d\mu$$

الف) نشان دهید دنباله $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر در $f_n \xrightarrow{\mu} f$ برقرار است اگر و تنها اگر $\lim d(f_n, f) = 0$

ب) نشان دهید اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که وقتی $m,n \to \infty$ داشته باشیم $d(f_n, f_m) \to 0$ آنگاه تابع اندازه‌پذیر f وجود دارد به طوری که $\lim d(f_n, f) = 0$.