۷.۲ انتگرال ریمان به عنوان یک انتگرال لبگ

در این بخش، نشان می‌دهیم که انتگرال لبگ، تعمیم انتگرال ریمان است. بحث را با یادآوری انتگرال ریمان شروع می‌کنیم. برای سادگی مطالب، ابتدا توابعی از یک متغیر را در نظر می‌گیریم و در انتها همان نتایج را برای توابع از چند متغیر بیان می‌کنیم. در تمام بحث این بخش، فرض بر این است که f تابعی با مقادیر حقیقی تعریف شده روی فاصله بسته $[a,b]$ از $\mathbb{R}$ است، مگر خلاف آن گفته شود.

خانواده نقاط $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ را یک افراز $[a,b]$ نامیم، هرگاه

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

هر افراز $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ فاصله $[a,b]$ را به n زیرفاصله بسته

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n]$$

تقسیم می‌کند. طول بزرگترین زیرفاصله را نُرم P نامیده و با $\|P\|$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$\|P\|=\max\{x_i-x_{i-1} : i=1,2,\dots,n\}$$

افراز P را ظریف‌تر از افراز Q نامیم هرگاه $Q\subset P$. اگر P و Q دو افراز باشند، آن‌گاه $P\cup Q$ را ظریف مشترک P و Q نامیم.

برای افراز $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ از $[a,b]$، قرار دهید

$$m_i=\inf\{f(x) : x\in[x_{i-1},x_i]\}$$
$$M_i=\sup\{f(x) : x\in[x_{i-1},x_i]\} \qquad i=1,2,\dots,n$$

آن‌گاه جمع پایینی $S_*(f,P)$ از تابع f متناظر به افراز P توسط

$$S_*(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

تعریف می‌شود. به طور مشابه جمع بالایی $S^*(f,P)$ از تابع f توسط

$$S^*(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

تعریف می‌شود. به وضوح برای هر افراز P از $[a,b]$ داریم

$$S_*(f,P) \le S^*(f,P).$$

لم ۵۹. اگر افراز P ظریف‌تر از افراز Q باشد ($Q \subset P$) آن‌گاه

$$S_*(f,Q) \le S_*(f,P), \quad S^*(f,P) \le S^*(f,Q)$$

اثبات. نشان می‌دهیم $S_*(f,Q) \le S_*(f,P)$. اثبات نامساوی دیگر مشابه است.

برای اثبات نامساوی مورد نظر، کافی است فرض کنیم P تنها دارای یک نقطه اضافه‌تر از Q است، مثلاً t. پس فرض کنید $Q=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ و $P=Q\cup\{t\}$. در این صورت k ای (بین $1\le k\le n$) وجود دارد به طوری که $x_{k-1}<t<x_k$. یعنی

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_{k-1},t,x_k,\dots,x_n\}$$

قرار می‌دهیم $c_1=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1},t]\}$ و $c_2=\inf\{f(x): x\in[t,x_k]\}$. داریم $m_k\le c_1$ و $m_k\le c_2$. بنابراین

$$\begin{aligned}
S_*(f,Q) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i\ne k} m_i(x_i-x_{i-1}) + m_k(x_k-x_{k-1})\\
&\le \sum_{i\ne k} m_i(x_i-x_{i-1}) + c_1(t-x_{k-1}) + c_2(x_k-t)\\
&= S_*(f,P).
\end{aligned}$$

لم ۶۰. برای هر زوج افراز P و Q داریم

$$S_*(f,P) \le S^*(f,Q)$$

اثبات. طبق لم (۵۹)

$$S_*(f,P) \le S_*(f,P\cup Q) \le S^*(f,P\cup Q) \le S^*(f,Q)$$

لم (۶۰) بیان می‌کند که هر جمع بالایی یک کران بالایی برای خانواده تمام جمع‌های پایینی f

است و به طوری که به هر جمع پایینی یک کران پایین برای خانواده تمام جمع های بالایی است.
بنابراین اگر انتگرال ریمان پایینی f را توسط

$$I_*(f)=\sup\{S_*(f,P):\ P \text{ افراز } [a,b]\}$$

و انتگرال بالایی f را توسط

$$I^*(f)=\inf\{S^*(f,P):\ P \text{ افراز } [a,b]\}$$

تعریف کنیم، آن گاه برای هر زوج افراز P و Q از $[a,b]$ داریم

$$S_*(f,P)\le I_*(f)\le I^*(f)\le S^*(f,Q)$$

تعریف ۶۱. تابع کراندار $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ را انتگرال پذیر ریمان نامیم هرگاه

$$I_*(f)=I^*(f).$$

در این حالت، مقدار مشترک را انتگرال ریمان f گوییم و با $\int_a^b f(x)\,dx$ نمایش می دهیم.

یک مشخصه انتگرال پذیری ریمان یک تابع که آن را شرط ریمان نامیم، در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه ۶۲. (ریمان). تابع کراندار $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال پذیر ریمان است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$، افراز P از $[a,b]$ وجود داشته باشد به طوری که

$$S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$$

اثبات. فرض کنید f انتگرال پذیر ریمان است و $\varepsilon>0$ داده شده است. قرار می دهیم

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

در این صورت افرازهای P_1 و P_2 از $[a,b]$ وجود دارند به طوری که

$$I-S_*(f,P_1)<\varepsilon,\qquad S^*(f,P_2)-I<\varepsilon$$

حال طبق لم (۵۹)، افراز $P=P_1\cup P_2$ در روابط زیر صدق می کند

$$S^*(f,P)-S_*(f,P)\le S^*(f,P_2)-S_*(f,P_1)$$
$$=[S^*(f,P_2)-I]+[I-S_*(f,P_1)]$$
$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

برعکس، اگر شرط داده شده برقرار باشد، آنگاه با توجه به رابطه زیر که برای هر افراز P از $[a,b]$ برقرار است:

$$0\le I^*(f)-I_*(f)\le S^*(f,P)-S_*(f,P)$$

داریم

$$0\le I^*(f)-I_*(f)<\varepsilon \qquad \forall\varepsilon>0$$

پس $I^*(f)=I_*(f)$ یعنی f انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a,b]$ است.

تعریف ۴۳. فرض کنید $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ افرازی از $[a,b]$ است. خانواده نقاط $T=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$ را یک مجموعه نقاط انتخابی برای P نامیم هرگاه

$$x_{i-1}\le t_i\le x_i\,, \qquad i=1,2,\dots,n$$

و می‌نویسیم

$$S_f(P,T)=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

قضیه زیر فرمول‌های تقریبی مفیدی برای انتگرال ریمان را بیان می‌کند.

قضیه ۴۴. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر ریمان است و $\{P_n\}$ دنباله‌ای از افرازهای $[a,b]$ است به طوری که $\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0$. در این صورت

$$\lim S_*(f,P_n)=\lim S^*(f,P_n)=\int_a^b f(x)\,dx$$

بالاخص، اگر برای هر n، مجموعه T_n یک مجموعه نقاط انتخابی برای افراز P_n بوده و $\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0$ آنگاه

$$\lim S_f(P,T)=\int_a^b f(x)\,dx$$

اثبات . ثابت c را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$|f(x)|<c \qquad \forall x\in[a,b].$$

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. طبق قضیه (۴۲)، افراز $P=\{x_0,x_1,\dots,x_m\}$ از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$$

n_0 را انتخاب می‌کنیم به طوری که $\|P_n\|<\dfrac{\varepsilon}{2cm}$ برای $n\geq n_0$ و

$$\|P_n\|<\min\{x_j-x_{j-1} : j=1,\dots,m\} \qquad n\geq n_0$$

برای $n\geq n_0$ ثابت، فرض کنید $P_n=\{t_0,t_1,\dots,t_k\}$، قرار می‌دهیم

$$M_j^P=\sup\{f(x) : x\in[x_{j-1},x_j]\} \qquad j=1,\dots,m$$

$$M_i=\sup\{f(x) : x\in[t_{i-1},t_i]\} \qquad i=1,\dots,k$$

تعاریف m_j^P و m_j به طور مشابه است (از inf بجای sup استفاده می‌کنیم). در نتیجه

$$0\leq\int_a^b f(x)\,dx-S_*(f,P_n)\leq S^*(f,P_n)-S_*(f,P_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})=V+W$$

که در آن V مجموع جملات $(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})$ است که $[t_{i-1},t_i]$ در زیرفاصله‌ای از P واقع باشد و W جمع جملات باقیمانده است. جمع‌های V و W به طور جداگانه تخمین زده می‌شوند.

ابتدا V را تخمین می‌زنیم. توجه داریم که $V=\Sigma_1+\dots+\Sigma_m$ که در آن هر Σ_j جمع جملات $(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})$ است که در آن $[t_{i-1},t_i]\subset[x_{j-1},x_j]$. اما اگر $[t_{i-1},t_i]\subset[x_{j-1},x_j]$ باشد آنگاه $M_i-m_i\leq M_j^P-m_j^P$. همچنین، جمع طول‌های آن زیرفاصله‌هایی از افراز P_n که در $[x_{j-1},x_j]$ قرار دارند، هرگز از x_j-x_{j-1} بیشتر نخواهد بود. بنابراین $\Sigma_j\leq(M_j^P-m_j^P)(x_j-x_{j-1})$ و در نتیجه

$$V\leq\sum_{j=1}^{m}(M_j^P-m_j^P)(x_j-x_{j-1})=S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$$

حال W را تخمین می‌زنیم. فرض کنید $(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})$ جمله‌ای از جمع W است. چون

$\|P_n\| < \min\{x_j - x_{j-1} : j=1,\dots,m\}$ پس دقیقاً یک j $(1 \le j \le m)$ وجود دارد به طوری که $x_{j-1} < t_{i-1} < x_j < t_i < x_{j+1}$. بنابراین جمع W حداکثر m جمله دارد و چون

$$(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \le 2c\|P_n\|$$
$$< 2c\frac{\varepsilon}{2cm} = \frac{\varepsilon}{m}$$

پس $W < m(\frac{\varepsilon}{m}) = \varepsilon$ ،

بنابراین برای هر $n \ge n_0$

$$0 \le \int_a^b f(x)dx - S_*(f,P_n) \le V + W < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

یعنی $\lim_{n\to\infty} S_*(f,P_n) = \int_a^b f(x)dx$.

به طور مشابه برای $n \ge n_0$

$$0 \le S^*(f,P_n) - \int_a^b f(x)dx \le V + W < 2\varepsilon$$

پس $S^*(f,P_n) = \int_a^b f(x)dx$. قسمت آخر قضیه از نامساوی های

$$S_*(f,P_n) \le S_f(P_n,T_n) \le S^*(f,P_n)$$

حاصل می شود.

در این قسمت از کتاب، نشان می دهیم که انتگرال لبگ، تعمیم انتگرال ریمان است. f انتگرال پذیر لبگ به معنای آن است که f نسبت به اندازه لبگ انتگرال پذیر می باشد.

قضیه ۹۵. هر تابع انتگرال پذیر ریمان $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ، انتگرال پذیر لبگ است و در این حالت دو انتگرال بر هم منطبق می باشند یعنی

$$\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

اثبات. برای هر n ، فرض کنید $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{2^n}\}$ افراز فاصله $[a,b]$ به 2^n زیرفاصله هر یک به طول $(b-a)2^{-n}$ است، یعنی

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{2^n}$$

قرار می‌دهیم

$$\varphi_n=\sum_{i=1}^{2^n} m_i\, \chi_{[x_{i-1},x_i)}\ ,\qquad \psi_n=\sum_{i=1}^{2^n} M_i\, \chi_{[x_{i-1},x_i)}$$

که در آن

$$m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}\ ,\qquad M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

به وضوح $\{\varphi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ دو دنباله از توابع پله‌ای اند به طوری که برای هر $x\in[a,b)$

$$\varphi_n(x)\uparrow\ \le f(x)\le \psi_n(x)\downarrow$$

حال اگر $\varphi_n(x)\uparrow g(x)$ و $\psi_n(x)\downarrow h(x)$ آن‌گاه طبق قضیه (۴۹) توابع g و h انتگرال‌پذیر لبگ اند و $g(x)\le f(x)\le h(x)$ برای هر $x\in[a,b)$. همچنین از تعریف داریم $\int\varphi_n\, d\lambda = S_*(f,P_n)$ و $\int\psi_n\, d\lambda = S^*(f,P_n)$. حال چون

$$\psi_n(x)-\varphi_n(x)\downarrow h(x)-g(x)\ge 0$$

نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}0\le\int(h-g)\,d\lambda&=\lim\int(\psi_n-\varphi_n)\,d\lambda\\&=\lim\int\psi_n\,d\lambda-\lim\int\varphi_n\,d\lambda\\&=\lim S^*(f,P_n)-\lim S_*(f,P_n)=0\end{aligned}$$

که در آن، تساوی آخر از قضیه (۴۴) حاصل شده است. پس $h-g=0$ a.e. و بنابراین $h=g=f$ a.e. بالاخص $\varphi_n\uparrow f$ a.e. و $\psi_n\downarrow f$ a.e. ، در نتیجه f انتگرال‌پذیر لبگ است (در واقع یک تابع بالایی است)، و نهایتاً

$$\int f\,d\lambda=\lim\int\varphi_n\,d\lambda=\lim S_*(f,P_n)=\int_a^b f(x)\,dx$$

قضیه زیر منسوب به لبگ است. در این قضیه، مشخصه‌های توابع انتگرال‌پذیر ریمان برحسب ناپیوستگی‌های آنها معرفی می‌شوند. تمام رابطه‌های تقریباً همه‌جا نسبت به اندازه لبگ در نظر گرفته شده‌اند.

قضیه ۶۶. لبگ. تابع کراندار $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر ریمان است اگر و تنها اگر تقریباً همه‌جا پیوسته باشد.

اثبات. برای هر n، فرض کنید P_n، φ_n و ψ_n همان‌هایی هستند که در اثبات قضیه (۶۵) تعریف شدند. فرض کنید f انتگرال‌پذیر ریمان است. در این صورت اثبات قضیه (۶۵) نشان می‌دهد که زیرمجموعه پوچ (نسبت به اندازه لبگ) A از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که برای هر $x\notin A$، $\varphi_n(x)\uparrow f(x)$ و $\psi_n(x)\downarrow f(x)$. به وضوح $D=A\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\right)$ دارای اندازه لبگ صفر است، و ادعا می‌کنیم f روی $[a,b]-D$ پیوسته می‌باشد.

برای اثبات این ادعا، فرض کنید $x_0\in[a,b]-D$ و $\varepsilon>0$ داده شده است. n ای وجود دارد به طوری که $f(x_0)-\varphi_n(x_0)<\varepsilon$ و $\psi_n(x_0)-f(x_0)<\varepsilon$ (برای هر یک از دنباله‌های $\{\varphi_n\}$ و $\{\psi_n\}$، n ای وابسته به $\varepsilon>0$ وجود دارد که شرایط بالا برقرار است حال n انتخابی در بالا را از ماکزیمم بین دو مقدار n بزرگتر می‌گیریم) بنابراین زیرفاصله‌ای مانند $[x_{i-1},x_i]$ از افراز P_n وجود دارد به طوری که $x_0\in(x_{i-1},x_i)$. به وضوح

$$\varphi_n(x_0)=m_i \quad , \quad \psi_n(x_0)=M_i$$

در نتیجه، اگر $x\in(x_{i-1},x_i)$ آن‌گاه

$$-\varepsilon<m_i-f(x_0)\le f(x)-f(x_0)\le M_i-f(x_0)<\varepsilon$$

چون (x_{i-1},x_i) یک همسایگی x_0 است، نامساوی‌های بالا نشان می‌دهند که f در x_0 پیوسته است. بنابراین f تقریباً همه‌جا پیوسته است.

برای برعکس، فرض کنید f تقریباً همه‌جا پیوسته است. فرض کنید $x_0\neq b$ یک نقطه پیوستگی برای f است. اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد، آن‌گاه $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall x\in[a,b],\quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon \qquad (1)$$

k ای را اختیار می‌کنیم به طوری که $\|P_k\|<\delta$. در این صورت به ازای زیرفاصله‌ای مانند $[x_{i-1},x_i]$ از P_k باید داشته باشیم $x_0\in[x_{i-1},x_i)$. بالاخص، برای هر $x\in[x_{i-1},x_i]$ باید داشته باشیم $|x-x_0|<\delta$ پس از (1) نتیجه می‌شود که

$$f(x_0)-\epsilon \le m_i = \varphi_k(x_0) < f(x_0)+\epsilon$$

چون $\varphi_n(x_0)\uparrow$ پس $\varphi_n(x_0)\uparrow f(x_0)$. به طور مشابه $\psi_n(x_0)\downarrow f(x_0)$.

چون f تقریباً همه جا پیوسته است، در نتیجه $\varphi_n \uparrow f$ a.e. و $\psi_n \downarrow f$ a.e. این نشان می‌دهد که f انتگرال‌پذیر لبگ است. علاوه بر آن طبق قضیه همگرایی قطع شده لبگ داریم

$$S_*(f,P_n)=\int \varphi_n \, d\lambda \uparrow \int f d\lambda, \qquad S^*(f,P_n)=\int \psi_n \, d\lambda \downarrow \int f d\lambda$$

بنابراین $\lim[S^*(f,P_n)-S_*(f,P_n)]=0$ و طبق قضیه (۴۲) تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است.

نتیجه صریحی از قضیه (۴۴)، قضیه زیر است.

قضیه ۴۷. خانواده تمام توابع انتگرال‌پذیر ریمان روی فاصله بسته یک فضای توابع و یک جبر توابع است.

در مثال زیر، تابع انتگرال‌پذیر لبگ کرانداری معرفی می‌شود که انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

مثال ۱. فرض کنید $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{گویا } x \\ 1 & \text{گنگ } x \end{cases}$$

به عبارت دیگر f تابع مشخصه اعداد گنگ در $[0,1]$ است. f در هر نقطه x از $[0,1]$ ناپیوسته است و بنابراین طبق قضیه (۴۴)، f انتگرال‌پذیر ریمان نیست. از طرف دیگر $f=1$ a.e. (زیرا اندازه لبگ مجموعه اعداد گویا صفر است) پس f انتگرال‌پذیر لبگ است. علاوه بر آن $\int f d\lambda = 1$.

از قضیه (۴۴) نتیجه می‌شود که اگر تابع $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد آنگاه تحدید

f به هر زیرفاصله بسته از $[a,b]$ محدود؟ انتگرال پذیر ریمان است. علاوه بر آن، طبق همان قضیه، اگر f و g انتگرال پذیر ریمان روی $[a,c]$ و $[c,b]$، به ترتیب، باشند آنگاه تابع h تولید شده توسط

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in[a,c] \\ g(x) & x\in(c,b] \end{cases}$$

روی $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان است.

به وضوح از قضیه (۴۴) نتیجه می شود که هر تابع پیوسته روی یک فاصله بسته انتگرال پذیر ریمان است. برای محاسبه انتگرال ریمان (و بنابراین لبگ) تابع پیوسته معمولاً از قضیه اساسی استفاده می کنیم.

قضیه ۴۸. قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است. فرض کنید $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است و برای هر x در (a,b) رابطه $F'(x)=f(x)$ را داشته باشیم آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

انتگرال $\int_b^a f(x)\,dx$ را به صورت $-\int_a^b f(x)\,dx$ تعریف می کنیم. $\int_a^a f(x)\,dx$ برابر صفر تعریف می شود. پس

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^e f(x)\,dx + \int_e^d f(x)\,dx$$

برای توسیع نتایج بالا به توابع چند متغیره به صورت زیر عمل می کنیم.

در حالت کلی فاصله $[a,b]$ را با جعبه $J=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ عوض می کنیم و اندازه لبگ آن $\lambda(J)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ است. افراز P از J مجموعه نقاطی به صورت $P=P_1\times\cdots\times P_n$ است که در آن P_i افراز $[a_i,b_i]$ برای $i=1,2,\dots,n$ می باشد. به وضوح هر افراز P مجموعه J را به تعدادی متناهی زیرجعبه تقسیم می کند.

حال اگر $f:J\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار بوده و افراز P جعبه J را به زیرجعبه های $J_1,\dots,J_k$

تقسیم کند آنگاه اعداد

$$m_i = \inf\{f(x_1,\dots,x_n) : (x_1,\dots,x_n)\in J_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x_1,\dots,x_n) : (x_1,\dots,x_n)\in J_i\}$$

را درنظر می گیریم. جمع های بالایی و پایینی متناظر به افراز P توسط فرمول های

$$S_*(f,P)=\sum_{i=1}^{k} m_i\,\lambda(J_i),\qquad S^*(f,P)=\sum_{j=1}^{k} M_j\,\lambda(J_j)$$

تعریف می شوند. انتگرال ریمان پایینی f توسط

$$I_*(f)=\sup\{S_*(f,P) : \text{افراز } J \text{ است } P\}$$

و انتگرال ریمان بالایی f توسط

$$I^*(f)=\inf\{S^*(f,P) : \text{افراز } J \text{ است } P\}$$

تعریف می شوند. همانند حالت یک بعدی داریم

$$-\infty< I_*(f)\le I^*(f)<\infty$$

تابع f را انتگرال پذیر ریمان گوییم هرگاه $I_*(f)=I^*(f)$. این عدد مشترک را انتگرال ریمان f نامیده و با

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_n\,dx_{n-1}\cdots dx_2\,dx_1$$

نشان می دهیم.

۸.۲ کاربردهایی برای انتگرال لبگ

اگر تابع $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ (که در آن $a\in\mathbb{R}$) انتگرال پذیر ریمان روی هر زیرفاصله بسته از $[a,\infty)$ باشد آنگاه انتگرال ریمان ناسره توسط

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{r\to\infty}\int_a^{r} f(x)\,dx$$

تعریف می شود مشروط به آنکه حد در طرف راست در $\mathbb{R}$ موجود باشد. وجود حد بالا به معنای وجود انتگرال (ریمان ناسره) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ است. به طور مشابه، اگر $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ روی هر زیرفاصله بسته از $(-\infty,a]$ موجود باشد، آنگاه $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ توسط

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{a} f(x)dx$$

به شرط وجود حد، تعریف می‌شود. به وضوح اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ موجود باشد آن‌گاه $\int_b^\infty f(x)dx$ برای هر $b>a$ وجود دارد و

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$

قضیه ۶۹. فرض کنید $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ روی هر زیرفاصله بسته از $[a,\infty)$ انتگرال‌پذیر ریمان است. در این صورت $\int_a^\infty f(x)dx$ موجود است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ عدد $M>0$ موجود باشد (وابسته به ε) به طوری که برای هر $s,t\geq M$

$$\left|\int_s^t f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

اثبات. فرض کنید $I=\int_a^\infty f(x)dx$ موجود است. $M>0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که برای هر $r\geq M$،

$$\left|I - \int_a^r f(x)dx\right| < \varepsilon$$

حال اگر $s,t\geq M$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t f(x)dx\right| &= \left|\int_a^t f(x)dx - \int_a^s f(x)dx\right| \\ &\leq \left|I-\int_a^t f(x)dx\right| + \left|I-\int_a^s f(x)dx\right| \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

برعکس، فرض کنید شرط داده شده برقرار است. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $[a,\infty)$ باشد به طوری که $\lim a_n=\infty$ آن‌گاه به سادگی دیده می‌شود که دنباله $\{\int_a^{a_n} f(x)dx\}$ کوشی است. بنابراین $A=\lim\int_a^{a_n} f(x)dx$ موجود است. حال فرض کنید $\{b_n\}$ دنباله‌ای دیگر از $[a,\infty)$ با $\lim b_n=\infty$ است. قرار می‌دهیم $B=\lim\int_a^{b_n} f(x)dx$. چون

$$|A-B| \leq \left|A-\int_a^{a_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx\right| + \left|B-\int_a^{b_n} f(x)dx\right|$$

پس برای هر $\varepsilon>0$ داریم $|A-B|<\varepsilon$ یعنی $A=B$ و بنابراین حد مستقل از انتخاب دنباله است. این نشان می‌دهد که $\int_a^\infty f(x)dx$ موجود است. یعنی $\int_a^\infty f(x)dx$ موجود می‌باشد.

از قضیه (۶۹) و نامساوی $\left|\int_a^t f(x)\,dx\right| \le \int_a^t |f(x)|\,dx$ برای $a<t$ نتیجه می‌شود که اگر تابع $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ روی هر زیربازه‌ی بسته از $[a,\infty)$ انتگرال‌پذیر ریمان بوده و $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ موجود باشد آنگاه $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز موجود است. اما عکس آن صحیح نیست. یعنی توابعی چون f وجود دارند که انتگرال‌های ریمان ناسره $\int_a^\infty f(x)\,dx$ موجود ند ولی $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ وجود ندارد. به عنوان مثال تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ با $f(0)=1$ روی $[0,\infty)$ را در نظر بگیرید. خواهیم دید که $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)dx=\frac{\pi}{2}$ اما $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ وجود ندارد. زیرا برای هر k داریم

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,dx=\frac{2}{k\pi}$$

پس

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

پس $\int_0^\infty (|\sin x|/x)\,dx$ در $\mathbb{R}$ وجود ندارد.

اگر انتگرال ریمان ناسره یک تابع موجود باشد، طبیعی است که پرسیده شود آیا تابع انتگرال‌پذیر لبگ است یا خیر؟

در حالت کلی جواب منفی است. در هر حال اگر انتگرال ریمان ناسره قدر مطلق تابع موجود باشد آنگاه تابع انتگرال‌پذیر لبگ است.

قضیه ۷۰. فرض کنید $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ روی هر زیربازه‌ی بسته از $[a,\infty)$ انتگرال‌پذیر ریمان است. در این صورت f انتگرال‌پذیر لبگ است اگر و تنها اگر انتگرال ریمان ناسره‌ی $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ موجود باشد. علاوه بر آن در این حالت داریم

$$\int f\,d\lambda=\int_a^\infty f(x)\,dx$$

اثبات. فرض کنید f روی $[a,\infty)$ انتگرال‌پذیر لبگ است. در این صورت f^+ نیز روی $[a,\infty)$ انتگرال‌پذیر لبگ است. فرض کنید $\{r_n\}$ دنباله‌ای از $[a,\infty)$ است به طوری که $\lim r_n=\infty$ برای هر n، قرار می‌دهیم

$$f_n(x)=\begin{cases} f^+(x) & x\in[a,r_n] \\ 0 & x\in(r_n,\infty)\end{cases}$$

آن گاه $\lim f_n(x)=f^+(x)$ و $0\le f_n(x)\le f^+(x)$ برای هر $x\in[a,\infty)$، علاوه بر آن از قضیه (۹۵) نتیجه می‌شود که $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر لبگ است به طوری که

$$\int f_n\,d\lambda=\int_a^{r_n} f^+(x)\,dx.$$

بنابراین از قضیه همگرایی قطع شده لبگ داریم

$$\int f^+\,d\lambda=\lim\int f_n\,d\lambda=\lim\int_a^{r_n} f^+(x)\,dx$$

پس $\int_a^\infty f^+(x)\,dx$ موجود است و $\int_a^\infty f^+(x)\,dx=\int f^+\,d\lambda$، به طور مشابه $\int_a^\infty f^-(x)\,dx$ موجود است و $\int_a^\infty f^-(x)\,dx=\int f^-\,d\lambda$، حال با توجه به $f=f^+-f^-$ و $|f|=f^++f^-$ نتیجه می‌شود که هر دو انتگرال ریمان ناسره $\int_a^\infty f(x)\,dx$ و $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ موجودند علاوه بر آن

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\int f\,d\lambda \quad , \quad \int_a^\infty |f(x)|\,dx=\int |f|\,d\lambda$$

حال فرض کنید انتگرال ریمان ناسره $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ موجود است. به وضوح

$$\lim\int_a^{a+n} |f(x)|\,dx=\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x)=\begin{cases} |f(x)| & x\in[a,a+n] \\ 0 & x\in(a+n,\infty)\end{cases} \qquad \forall n$$

داریم

$$0\le f_n(x)\uparrow |f(x)| \qquad \forall x\geq a$$

چون f_n انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a,a+n]$ است، پس f_n یک تابع بالایی روی $[a,\infty)$ برقرار در شرط

$$\int f_n\,d\lambda=\int_a^{a+n} f_n(x)\,dx=\int_a^{a+n} |f(x)|\,dx$$

می‌باشد، بنابراین طبق قضیه (۳۹)، $|f|$ یک تابع بالایی (و بنابراین انتگرال‌پذیر لبگ) است و $\int |f|\,d\lambda=\int_a^\infty |f(x)|\,dx$، حال انتگرال‌پذیری لبگ f از قضیه (۴۹) [illegible] اینکه

f تابعی اندازه‌پذیر است، حاصل می‌شود. اندازه‌پذیری f با توجه به اینکه f روی هر زیرفاصله بسته از $[a,\infty)$ اندازه‌پذیر است، بدست می‌آید.

قضیه زیر جهت تعریض جای lim و انتگرال بسیار قابل استفاده است.

قضیه ۷۱. فرض کنید (X,S,μ) یک فضای اندازه، J یک فاصله در $\mathbb{R}$ و تابع $f: X\times J\to \mathbb{R}$ تابعی است که $f(\cdot,t)$ برای هر $t\in J$ اندازه‌پذیر است، همچنین فرض کنید تابع انتگرال‌پذیر g وجود دارد به طوری که برای تقریباً همه xها و تمام tهای متعلق به J

$$|f(x,t)|\le g(x)$$

اگر به ازای یک نقطه انباشتگی t_0 (احتمالاً شامل $\pm\infty$) از J تابع h وجود داشته باشد به طوری که برای تقریباً تمام xها، $\lim\limits_{t\to t_0} f(x,t)=h(x)$، آنگاه

الف) h تابعی انتگرال‌پذیر است و

ب) $\lim\limits_{t\to t_0}\int f(x,t)\,d\mu(x)=\int \lim\limits_{t\to t_0} f(x,t)\,d\mu(x)=\int h\,d\mu$

اثبات. فرض کنید $f: X\times J\to \mathbb{R}$ در فرضیات قضیه صدق کند و فرض کنید $\{t_n\}$ دنباله‌ای در J است به طوری که $\lim t_n=t_0$. قرار دهید

$$h_n(x)=f(x,t_n)\qquad \forall x\in X$$

داریم $|h_n|\le g$ a.e. و $h_n\to h$ a.e.. طبق قضیه (۴۹) هر h_n انتگرال‌پذیر است و با توجه به قضیه همگرایی تسلط شده لبگ، h نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\lim\int f(x,t_n)\,d\mu(x)=\lim\int h_n\,d\mu=\int h\,d\mu$$

و حکم حاصل می‌شود.

تعریف ۷۲. فرض کنید $f: X\times(a,b)\to\mathbb{R}$ یک تابع و $t_0\in(a,b)$ است. تابع خارج قسمتی تفاضلی در t_0 توسط

$$D_{t_0}(x,t) = \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}$$

برای هر $x \in X$ و هر $t \in (a,b)$ با $t \neq t_0$ تعریف می‌شود. برای ساختن D_{t_0} تعریف‌شده در تمام نقاط، برای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم $D_{t_0}(x,t_0)=0$. اگر $\lim_{t \to t_0} D_{t_0}(x,t)$ موجود باشد گوئیم مشتق جزئی f نسبت به t در (x,t_0) وجود دارد و با $(\partial f/\partial t)(x,t_0)$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) = \lim_{t \to t_0} D_{t_0}(x,t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}$$

قضیه ۷۲. فرض کنید (X,S,μ) یک فضای اندازه و $f: X \times (a,b) \to \mathbb{R}$ تابعی است که $f(\cdot,t)$ برای هر $t \in (a,b)$ انتگرال‌پذیر لبگ است. فرض کنید به ازای t_0 یی در (a,b) مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ برای تقریباً همه xها موجود است. همچنین فرض کنید تابع انتگرال‌پذیر g و همسایگی V از t_0 وجود دارند به طوری که برای تقریباً همه xها و هر $t \in V$،

$$|D_{t_0}(x,t)| \leq g(x)$$

در این صورت

الف) $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t_0)$ یک تابع انتگرال‌پذیر است و

ب) تابع $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ تعریف‌شده توسط $F(t) = \int f(x,t)\,d\mu(x)$ در t_0 مشتق‌پذیر است و

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,d\mu(x)$$

اثبات. برای هر نقطه x که در آن مشتق جزئی موجود نیست قرار می‌دهیم $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)=0$. در این صورت $\lim_{t \to t_0} D_{t_0}(x,t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ برای تقریباً همه xها برقرار است. طبق قضیه (۷۱)، $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t_0)$ یک تابع انتگرال‌پذیر است و وقتی $t \to t_0$ داریم

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \int \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\,d\mu(x)$$
$$= \int D_{t_0}(x,t)\,d\mu(x) \longrightarrow \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,d\mu(x)$$

این نشان می‌دهد که F در t_0 مشتق‌پذیر است و $F'(t_0) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)(x,t_0)\,d\mu(x)$.

محک جالبی برای کران‌دار بودن تابع خارج قسمتی تفاضلی $D_{t_0}(x,t)$ توسط یک تابع انتگرال‌پذیر وجود دارد که در کاربردها بسیار مفید است. این محک نیاز به وجود یک همسایگی V از t_0 دارد به طوری که

الف) مشتق جزئی $(\frac{\partial f}{\partial t})(x,t)$ برای هر $t\in V$ و تقریباً هر x موجود باشد و

ب) تابع انتگرال‌پذیر g با شرط $|(\frac{\partial f}{\partial t})(x,t)| \le g(x)$ برای هر $t\in V$ و تقریباً هر x وجود دارد.

اگر دو شرط بالا برقرار باشد آنگاه طبق قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود که برای هر $t\in V$ و تقریباً هر x،

$$|D_{t_0}(x,t)| \le g(x).$$

به عنوان کاربردهایی از دو قضیه (۷۱) و (۷۳)، تعدادی از انتگرال‌های ریمان نابسره کلاسیک را به دست می‌آوریم.

مثال ۲. (اویلر) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

حل. وجود انتگرال ریمان نابسره از نامساوی‌های

$$0\le e^{-x^2}\le e^{-x}, \quad x\ge 1$$

و $\int_1^\infty e^{-x}dx = e^{-1}$ حاصل می‌شود. همچنین، از $e^{-x^2}\ge 0$ برای هر x، نتیجه می‌شود که انتگرال یک انتگرال لبگ روی $[0,\infty)$ است. حال توابع

$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2, \qquad g(t)=\int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}dx \qquad t\ge 0$$

را در نظر می‌گیریم و مشتق‌های توابع بالا به طور مجزا تعیین می‌کنیم. برای f از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. پس

$$f'(t)=2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx, \qquad t>0$$

برای g، مشاهده می‌شود که برای هر $x\in[0,1]$ و هر $t>0$ در هر همسایگی کراندار از نقطهٔ ناصفری مانند $t_0>0$ داریم

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{(x^2+1)}\right)\right| = \left|-2te^{-t^2(x^2+1)}\right| \leq M$$

ثابت M را بسته به انتخاب همسایگی t است. طبق قضیه (۷۴) و با توجه به اینکه انتگرال های لبگ، انتگرال های ریمان هستند، داریم

$$g'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\right)dx = -2e^{-t^2}\int_0^1 t e^{-x^2t^2}dx \qquad t>0$$

با جایگزینی $u=xt$ (برای $t>0$) داریم

$$g'(t) = -2e^{-t^2}\int_0^t e^{-u^2}du = -2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx \qquad t>0$$

بنابراین $f'(t)+g'(t)=0$ برای هر $t>0$ پس برای هر $t>0$ داریم

$$f(t)+g(t)=c$$

حال از پیوستگی f و g نتیجه می‌شود که برای هر $t\geq 0$

$$f(t)+g(t)=c$$

بالاخص

$$c = f(0)+g(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

پس برای $t\geq 0$ داریم $f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4}$. حال چون

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} = 0 \qquad \forall x$$

و

$$\left|\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1} \qquad \forall t>0,\ \forall x$$

از قضیه (۷۱) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

پس

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{t\to\infty} f(t) + \lim_{t\to\infty} g(t) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2$$

یعنی

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال ۳. برای هر $t\in\mathbb{R}$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xt)\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$$

حل. قرار می‌دهیم

$$F(t)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xt)\,dx \qquad t\in\mathbb{R}$$

چون

$$|e^{-x^2}\cos(2xt)|\le e^{-x^2}\qquad \forall x,\ \forall t$$

پس انتگرال ریمان ناسره موجود است و علاوه بر آن که انتگرال لبگ روی $[0,\infty)$ است.

حال رابطه زیر برای هر $x\geq 0$ و هر $t\in\mathbb{R}$ برقرار است

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}[e^{-x^2}\cos(2xt)]\right|=|-2xe^{-x^2}\sin(2xt)|\le 2xe^{-x^2}=g(x)$$

با توجه به اینکه g روی $[0,\infty)$ مثبت است و انتگرال ریمان ناسره $\int_0^\infty g(x)\,dx$ موجود است (مقدار آن برابر ۱ است) نتیجه می‌شود که g روی $[0,\infty)$ انتگرال‌پذیر لبگ است. بنابراین از قضیه (۷۴) (و تذکر بعد از آن) نتیجه می‌شود که

$$F'(t)=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}[e^{-x^2}\cos(2xt)]\,dx=-2\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin(2xt)\,dx$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$-2\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin(2xt)\,dx=e^{-x^2}\sin(2xt)\Big|_0^\infty-2t\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xt)\,dx$$

$$=-2t\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xt)\,dx.$$

بنابراین برای هر t، $F'(t)=-2tF(t)$. با حل این معادله دیفرانسیل داریم

$$F(t)=F(0)\,e^{-t^2}$$

طبق مثال (۲)

$$F(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

پس

$$F(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$$

در مثال بعد، مقدار $\frac{\sin x}{x}$ را در $x=0$ برابر 1 فرض کرده ایم.

مثال ۴. اگر $t \geq 0$ آنگاه

$$\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} t$$

حل. حالت های $t>0$ و $t=0$ را جداگانه مدنظر قرار می دهیم.

حالت I) $t>0$. برای هر $t>0$ ثابت داریم

$$\left|e^{-xt}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \leq e^{-xt} \qquad \forall x \geq 0$$

بنابراین انتگرال ریمان نا سره به عنوان یک انتگرال لبگ روی $[0,\infty)$ وجود دارد. قرار می دهیم

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx \qquad t>0$$

در این صورت F در خواص زیر صدق می کند

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0 \qquad (۲)$$

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \qquad t>0 \qquad (۳)$$

برای بررسی درستی (۲)، توجه می کنیم که اگر

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x\in[0,1] \\ e^{-x} & x\in(1,\infty) \end{cases}$$

آنگاه g روی $[0,\infty)$ انتگرال پذیر لبگ است و برای هر x و هر $t>1$ داریم

$$\left|e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\right| \leq g(x)$$

از طرف دیگر، داریم

$$\lim_{t\to\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \forall x>0$$

بنابراین از قضیه (۷۱)

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0.$$

برای بررسی درستی (۳)، نخست توجه می کنیم که برای هر $x>0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\right] = -e^{-xt}\frac{\sin x}{x}$$

و برای $a>0$ ثابت، نامساوی

$$\left|e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\right| \le e^{-ax}$$

به ازای هر $t \ge a$ و هر $x \ge 0$ برقرار است. طبق قضیه (۷۴) برای هر $t > a$ (و هر $a > 0$)

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-xt}\sin x\,dx$$

برقرار است که در آن تساوی برقرار است زیرا انتگرال ریمان ناسره یک انتگرال لبگ است. بنابراین

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-xt}\sin x\,dx \qquad \forall t > 0$$

پس

$$\int_0^r e^{-xt}\sin x\,dx = -\frac{e^{-rt}(t\sin r + \cos r)}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}$$

وقتی $r \to \infty$ داریم

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \qquad t > 0$$

حال با انتگرال گیری از (۳) داریم

$$F(t) - F(c) = -\int_c^t \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}c - \tan^{-1}t$$

با فرض $c \to \infty$ نتیجه می شود که

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}t$$

حالت II) $t = 0$، در این حالت $\frac{\sin x}{x}$ انتگرال پذیر لبگ نیست، به هر حال انتگرال ریمان ناسره $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ موجود است. زیرا اگر $t > s > 0$ آنگاه با انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\int_s^t \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_s^t - \int_s^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{\cos s}{s} - \frac{\cos t}{t} - \int_s^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

و در نتیجه

$$\left|\int_s^t \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \int_s^t \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{s}$$

طبق قضیه (۴۹)، $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ موجود است، بالاخص $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0$

حال برای هر n، تعریف می‌کنیم

$$f_n(t)=\int_0^n e^{-xt}\,\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad t\geq 0$$

و توجه داریم که رابطه

$$|f_n(n)| \leq \int_0^n e^{-xn}\,dx = \frac{1}{n}\left(1-e^{-n^2}\right)\leq \frac{1}{n}$$

نتیجه می‌دهد $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(n)=0$. طبق قضیه (۷۳)

$$f_n'(t)=-\int_0^n e^{-xt}\sin x\,dx=\frac{e^{-nt}(t\sin n+\cos n)-1}{1+t^2}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(t)=-\frac{1}{1+t^2} \qquad t>0$$

همچنین

$$|f_n'(t)|\leq \left(1+(1+t)e^{-t}\right)/(1+t^2) \qquad \forall t>0$$

و تابع سمت راست نامساوی بالا برای $\{f_n'\}$ یک تابع انتگرال‌پذیر لبگ روی $[0,\infty)$ است.
قرار می‌دهیم $g_n=f_n'\chi_{[0,n]}$، دنباله $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر لبگ روی $[0,\infty)$ است. همچنین، از $|g_n|\leq|f_n'|$ و $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(t)=-\frac{1}{1+t^2}$ برای $0<t$
طبق قضیه همگرایی تسلط شده لبگ داریم

$$\lim\int_0^\infty g_n(t)\,dt=\lim\int_0^n f_n'(t)\,dt=-\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{\pi}{2}$$

زیرا

$$\int_0^n f_n'(t)\,dt=f_n(x)-f_n(0)$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=\frac{\pi}{2}$، حال نتیجه با فرض $n\to\infty$ در روابط زیر به دست می‌آید.

$$\int_0^{n+1}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^n\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$=f_n(0)+\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

۹.۲ تقریب توابع انتگرال پذیر

نوع خاصی از مسئله تقریب که معمولاً در آنالیز مدنظر قرار می‌گیرد به شرح زیر است.

برای تابع انتگرال پذیر f، خانواده $\mathcal{F}$ از توابع انتگرال پذیر و $\varepsilon>0$ داده شده، چه وقت تابع $g\in\mathcal{F}$ وجود دارد به طوری که $\int|f-g|d\mu<\varepsilon$.

از تعریف یک تابع انتگرال پذیر، نتیجه زیر به روشنی به دست می‌آید.

قضیه ۷۴. فرض کنید f تابعی انتگرال پذیر و $\varepsilon>0$ داده شده است. آن گاه تابع پله‌ای φ وجود دارد به طوری که $\int|f-\varphi|d\mu<\varepsilon$.

فرض کنید $\mathcal{L}$ خانواده تمام توابع پله‌ای مانند φ است که برای آنها مجموعه‌های $A_1,\dots,A_n\in S$ با اندازه متناهی و اعداد حقیقی $a_1,\dots,a_n$ (همگی وابسته به φ) وجود دارند به طوری که $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$. در این صورت $\mathcal{L}$ یک فضای توابع است.

قضیه ۷۵. فرض کنید f تابعی انتگرال پذیر است. برای $\varepsilon>0$ داده شده تابع $\varphi\in\mathcal{L}$ وجود دارد به طوری که $\int|f-\varphi|d\mu<\varepsilon$.

اثبات. ابتدا فرض کنید $f=\chi_A$ که در آن A مجموعه‌ای اندازه پذیر با $\mu^*(A)<\infty$ است. دنباله متناهی $\{A_n\}$ در S را انتخاب می‌کنیم به طوری که $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\mu^*(A)+\varepsilon$$

قرار دهید $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و توجه داریم که دنباله $\{\varphi_n\}$ در $\mathcal{L}$ تولید شده توسط $\varphi_n=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}$ در $\varphi_n\uparrow\chi_B$ برقرار است. حال n را انتخاب می‌کنیم به طوری که $\int(\chi_B-\varphi_n)d\mu<\varepsilon$.

در نتیجه

$$\int|\chi_B-\varphi_n|d\mu \le \int|\chi_B-\chi_A|d\mu+\int|\chi_B-\varphi_n|d\mu$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_n)-\mu^*(A)\right]+\int(\chi_B-\varphi_n)d\mu$$
$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

که نتیجه مطلوب را در این حالت خاص به دست می‌دهد.

حال حالت کلی را در نظر می‌گیریم. طبق قضیه (۷۴) تابع پله‌ای ψ وجود دارد به طوری که $\int|f-\psi|d\mu<\varepsilon$. فرض کنید $\psi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$ نمایش استاندارد ψ است، قرار دهید $c=\max\{|a_1|,\dots,|a_n|\}$. برای هر i $(1\le i\le n)$ تابع $\psi_i\in L$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که $\int|\chi_{A_i}-\psi_i|d\mu<\frac{\varepsilon}{nc}$ و قرار می‌دهیم $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\psi_i\in L$. در نتیجه

$$\int|f-\varphi|d\mu\le\int|f-\psi|d\mu+\int|\psi-\varphi|d\mu$$
$$<\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}|a_i|\int|\chi_{A_i}-\psi_i|d\mu$$
$$<\varepsilon+nc\frac{\varepsilon}{nc}=\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

در قضیه زیر، توابع انتگرال‌پذیر را به وسیله توابع پیوسته تقریب می‌زنیم. اگر X یک فضای توپولوژیک و $f:X\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، آنگاه بستار مجموعه زیر را محمل f نامیم و با $\operatorname{supp} f$ نمایش می‌دهیم

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{x\in X: f(x)\neq 0\}}$$

اگر $\operatorname{supp} f$ فشرده باشد آنگاه گوییم f با محمل فشرده است.

قضیه ۷۶. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده هاسدورف است و فرض کنید μ یک اندازه برل منظم روی X است. اگر f تابعی انتگرال‌پذیر نسبت به فضای اندازه $(X,\mathcal{B},\mu)$ باشد آنگاه برای $\varepsilon>0$ داده شده، تابع پیوسته $g:X\to\mathbb{R}$ با محمل فشرده وجود دارد به طوری که $\int|f-g|d\mu<\varepsilon$.

اثبات. طبق قضیه (۷۵)، بدون کم شدن از کلیت بحث، می‌توان فرض کرد که f

تابع مشخصه یک مجموعه برل با اندازه متناهی است. پس فرض کنید $f=\chi_A$ که در آن A مجموعه‌ای برل با $\mu(A)<\infty$ است. چون μ یک اندازه برل منظم است، پس مجموعه فشرده K وجود دارد به طوری که $K\subset A$ و $\mu(K)-\mu(A)<\varepsilon$ و مجموعه باز V وجود دارد بطوری که $A\subset V$ و $\mu(V)-\mu(A)<\varepsilon$. بنابراین تابع پیوسته $g:X\to[0,1]$ (و در نتیجه اندازه‌پذیر برل) با محمل فشرده وجود دارد به طوری که

$$g(x)=1 \qquad x\in K$$

و $\operatorname{supp} g\subset V$. به وضوح g انتگرال‌پذیر است و

$$|\chi_A-g|\le\chi_V-\chi_K$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int|\chi_A-g|\,d\mu &\le\int(\chi_V-\chi_K)\,d\mu\\ &=\mu(V)-\mu(K)<2\varepsilon.\end{aligned}$$

در قضیه زیر یکی از خاصیت‌های مهم توابع انتگرال‌پذیر ریمان تعریف شده روی $\mathbb{R}$ را بیان می‌کنیم که معمولاً به آن لم ریمان-لبگ گویند.

قضیه ۷۷. ریمان-لبگ. اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\int f(x)\sin(nx)\,d\lambda(x)=0$$

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که نامساوی

$$|f(x)\cos(nx)|\le|f(x)|$$

برای هر x برقرار است. با توجه به این نامساوی قضیه (۴۹) نتیجه می‌شود که برای هر n تابع $f(x)\cos(nx)$ تابعی انتگرال‌پذیر لبگ است، حال از قضیه (۷۵) نتیجه می‌شود که کافی است توابع به فرم $\chi_{[a,b)}$ را در نظر بگیریم. بنابراین، فرض کنید $f=\chi_{[a,b)}$. در این حالت انتگرال‌های لبگ، انتگرال‌های ریمان هستند و وقتی $n\to\infty$ داریم

$$\left|\int f(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| = \left|\int_a^b \cos(nx)\,dx\right| = \frac{1}{n}\left|\sin(nb)-\sin(na)\right| \le \frac{2}{n} \to 0$$

به طور مشابه $\lim_{n\to\infty}\int f(x)\sin(nx)\,d\lambda(x)=0$.

تعریف ۷۸. یک دنباله از توابع انتگرال پذیر $\{f_n\}$ را همگرا در میانگین به تابعی مانند f گوییم هرگاه $\lim\int|f_n-f|\,d\mu=0$

قضیه ۷۹. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع انتگرال پذیر است. اگر f تابعی انتگرال پذیر باشد به طوری که $\lim\int|f_n-f|\,d\mu=0$ آن گاه زیردنباله $\{f_{n_k}\}$ از $\{f_n\}$ وجود دارد به طوری که $f_{n_k}\xrightarrow{a.e.} f$.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon>0$. برای هر n قرار می دهیم

$$E_n=\{x\in X : |f_n(x)-f(x)|\ge\varepsilon\}$$

هر یک از E_n ها مجموعه هایی اندازه پذیر با اندازه متناهی اند (قضیه (۴۷)). چون برای هر n، $\varepsilon\chi_{E_n}\le|f_n-f|$ پس برای هر n داریم

$$\varepsilon\mu^*(E_n)\le\int|f_n-f|\,d\mu$$

بنابراین $\lim\mu^*(E_n)=0$ بنابراین $f_n\xrightarrow{\mu_1} f$. حال نتیجه مورد نظر از قضیه (۳۱) حاصل می شود.

نکته ۸۰. یک دنباله از توابع انتگرال پذیر که همگرا در میانگین به تابعی است، لزوماً همگرای نقطه وار به تابع نیست.