۶.۱ نیم حلقه‌ها و جبرهای مجموعه‌ها

یک نیم حلقه از مجموعه‌ها ساده‌ترین خانواده از مجموعه‌ها است که می‌توان تئوری اندازه را برای آن بیان کرد.

تعریف ۵۰. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. خانواده S از زیرمجموعه‌های X را یک نیم حلقه نامیم هرگاه سه شرط زیر برای خانواده S برقرار باشد

الف) $\emptyset \in S$.

ب) تحت اشتراک متناهی بسته باشد. یعنی اگر $A,B\in S$ آنگاه $A\cap B\in S$.

ج) برای هر دو مجموعه در S، تفاضل آنها را بتوان به صورت یک تعداد متناهی از عناصر متمایز (مجزا) S نوشت. یعنی اگر $A,B\in S$ آنگاه $C_1, C_2, \dots, C_n$ در S (وابسته به A و B) وجود داشته باشند به طوری که

$$A\setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i,$$

و برای $i\neq j$، $C_i\cap C_j=\emptyset$.

تعریف ۵۱. فرض کنید S یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی X است. زیرمجموعه A از X را یک مجموعه سیگمایی (σ-مجموعه) نسبت به S (یا به طور ساده‌تر σ-مجموعه) نامیم، هرگاه دنباله متمایز $\{A_n\}_1^{\infty}$ از عناصر S وجود داشته باشد به طوری که $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

توضیح ۵۲. اگر $A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ که در آن $A_1,\dots,A_n\in S$ و برای $i\neq j$، $A_i\cap A_j=\emptyset$ آنگاه A یک σ-مجموعه است. زیرا برای $k>n$ قرار می‌دهیم $A_k=\emptyset$ داریم

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

درضمن، به سادگی از تعریف (۵۰) نتیجه می شود که برای هر زوج از عناصر نیم حلقه S مانند A و B، مجموعه $A \setminus B$ یک σ- مجموعه است.

خواص اساسی σ- مجموعه ها در قضیه بعد بیان شده است.

قضیه ۵۲. فرض کنید S یک نیم حلقه از زیرمجموعه های مجموعه ناتهی X است. در این صورت

الف) اگر $A, A_1, \ldots, A_n \in S$ آنگاه $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ را می توان به شکل یک اجتماع متناهی از عناصر دو به دو متمایز S نوشت و در نتیجه یک σ- مجموعه است،

ب) برای هر دنباله $\{A_n\}_1^\infty$ از عناصر S، مجموعه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ یک σ- مجموعه است.

ج) اجتماع های تعداد شمارا و اشتراک های تعداد متناهی از σ- مجموعه ها، σ- مجموعه اند.

اثبات. الف) استقرا روی n. برای $n=1$ حکم طبق تعریف نیم حلقه برقرار است. حال فرض کنید حکم برای n برقرار است. فرض کنید $A, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \in S$ از فرض استقرا نتیجه می شود که عناصر $B_1, \ldots, B_K$ از عناصر S وجود دارند به طوری که

$$B = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{K} B_i ,$$

برای $i \neq j$، $B_i \cap B_j = \emptyset$. بنابراین

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = B \setminus A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{K} (B_i \setminus A_{n+1}).$$

از شرط (ج) تعریف (۵۰)، هر $B_i \setminus A_{n+1}$ را می توان به صورت اجتماع تعدادی متناهی از عناصر متمایز در S نوشت. چون برای $i \neq j$، $B_i \cap B_j = \emptyset$ به سادگی دیده می شود که $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ را می توان به صورت اجتماعی از تعداد متناهی عناصر متمایز S نوشت، که این (الف) را نتیجه می دهد.

ب) فرض کنید $\{A_n\}_1^\infty \subset S$. قرار می‌دهیم $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. مجموعه A را می‌توان به صورت $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ نوشت که در آن

$$B_1=A_1,$$

$$B_{n+1}=A_{n+1}\setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad n\geq 1.$$

به وضوح برای $i\neq j$، $B_i\cap B_j=\emptyset$ و طبق (الف)، هر B_i یک σ-مجموعه است. حال به سادگی دیده می‌شود که A یک σ-مجموعه است.

ج) از (ب) و قسمت (ب) تعریف (۵۰) حکم حاصل می‌شود.

توضیح ۵۴. قسمت (ب) قضیه (۵۳) را می‌توان به صورت زیر بررسی کرد. اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از عناصر S باشد آن‌گاه دنباله دو به دو متمایز $\{C_n\}$ در S وجود دارد به طوری که $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ و برای هر n، عدد صحیح مثبت مانند k وجود دارد که $C_n\subset A_k$.

تعریف ۵۵. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک خانواده ناتهی از زیرمجموعه‌های یک مجموعه ناتهی X است. خانواده $\mathcal{A}$ را یک جبر مجموعه‌ها (یا به طور ساده‌تر یک جبر) نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند

الف) اگر $A,B\in\mathcal{A}$ آن‌گاه $A\cap B\in\mathcal{A}$.

ب) اگر $A\in\mathcal{A}$ آن‌گاه $A^c\in\mathcal{A}$.

خواص اساسی یک جبر در قضیه بعد آورده شده‌اند.

قضیه ۵۶. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{A}$ یک جبر روی X است. در این صورت

الف) $\phi, X\in\mathcal{A}$.

ب) جبر $\mathcal{A}$ تحت اجتماع‌ها و اشتراک‌های تعداد متناهی عضو $\mathcal{A}$ بسته است.

ج) $\mathcal{A}$ یک نیم‌حلقه است:

اثبات. الف) چون $\mathcal{A}$ ناتهی است پس $A\in\mathcal{A}$ وجود دارد. بنابراین $A^c\in\mathcal{A}$
در نتیجه $\phi=A\cap A^c\in\mathcal{A}$ و $X=\phi^c\in\mathcal{A}$.

ب) فرض کنید $A,B\in\mathcal{A}$. در این صورت

$$A\cup B=(A^c\cap B^c)^c\in\mathcal{A},$$

و می‌توان با استقراء به سادگی حکم را نتیجه گرفت.

ج) تنها کافی است شرط (ج) از تعریف (۵۰) را بررسی کنیم. اگر $A,B\in\mathcal{A}$ آنگاه $A\setminus B=A\cap B^c\in\mathcal{A}$.

مثال ۱. فرض کنید $X\neq\phi$. خانواده $\mathcal{A}=\{\phi,X\}$ یک جبر از مجموعه‌ها است. این جبر (نسبت به رابطه شمول) کوچکترین جبر ممکن است.

مثال ۲. فرض کنید $X\neq\phi$. خانواده $\mathcal{A}=P(X)$ یک جبر از مجموعه‌ها است. این جبر (نسبت به رابطه شمول) بزرگترین جبر ممکن است.

مثال ۳. فرض کنید $a,b\in\mathbb{R}$، $a\le b$. اگر $a=b$ آنگاه $[a,b)=\phi$ و به طور معمول

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\},\qquad (a<b).$$

خانواده $\mathcal{S}=\{[a,b): a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$ یک نیم‌حلقه از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ است. اما یک جبر نیست، زیرا $[0,1)\in\mathcal{S}$ و $[2,3)\in\mathcal{S}$ ولی $[0,1)\cup[2,3)\notin\mathcal{S}$.

مثال ۴. فرض کنید $\mathcal{S}$ خانواده تمام زیرمجموعه‌های A از $\mathbb{R}^n$ است به طوری که

$$A=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n),\qquad a_i\le b_i,\quad i=1,2,\dots,n.$$

(اگر برای یک i، $a_i = b_i$، آن‌گاه $[a_i, b_i) = \phi$ و در نتیجه $A = \phi$.) در این صورت که یک نیم حلقه از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ است. برای بررسی آن، تنها کافی است شرط (ج) تعریف (۵۰) را بررسی کنیم. اثبات این شرط‌ها نیز بر اساس اتحاد زیر برای مجموعه‌های A، B، C و D است:

$$A \times B \setminus C \times D = [(A \setminus C) \times B] \cup [(A \cap C) \times (B \setminus D)] \qquad (۱)$$

که در آن اجتماع در طرف راست بین مجموعه‌های متمایز است. برای بررسی شرط (ج) تعریف (۵۰) از استقراء روی n استفاده می‌کنیم. برای $n=1$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای n صحیح است، نشان می‌دهیم مجموعه‌ای به صورت

$$[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \times [a_{n+1}, b_{n+1}) \setminus [c_1, d_1) \times \cdots \times [c_n, d_n) \times [c_{n+1}, d_{n+1})$$

را می‌توان به فرم اجتماعی متناهی از مجموعه‌های متمایز در خانواده $n+1$ بعدی نوشت، با فرض

$$A = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n), \qquad B = [a_{n+1}, b_{n+1}),$$
$$C = [c_1, d_1) \times \cdots \times [c_n, d_n), \qquad D = [c_{n+1}, d_{n+1}),$$

در (۱) و استفاده از فرض استقراء حکم حاصل می‌شود.

مفهومی بین نیم حلقه‌ها و جبرها وجود دارد که حلقه مجموعه‌ها است.

تعریف ۵۷. یک حلقه از مجموعه‌ها (یا به طور ساده یک حلقه) خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌ها است مانند R به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

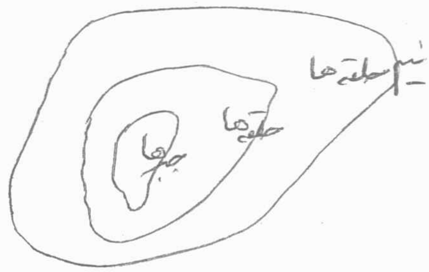
الف) اگر $A, B \in R$ آن‌گاه $A \cup B \in R$.

ب) اگر $A, B \in R$ آن‌گاه $A \setminus B \in R$.

هر حلقه از مجموعه‌ها، شامل مجموعه تهی است زیرا از ناتهی بودن حلقه R نتیجه می‌شود که $A \in R$ وجود دارد پس $\phi = A \setminus A \in R$.

واضح است که هر جبر از مجموعه‌ها یک حلقه است و حلقه R لزوماً نیم حلقه است، زیرا

اگر $A, B \in R$ آنگاه $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ نشان می‌دهد که $A \cap B \in R$. پس



تعریف ۵۸. جبر $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی X را یک σ-جبر نامیم، هرگاه $\mathcal{A}$ تحت اجتماع هر خانواده شمارا از عناصر $\mathcal{A}$ بسته باشد، یعنی اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از عناصر جبر $\mathcal{A}$ باشد آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

توضیح ۵۹. رابطه $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$ نتیجه می‌دهد که هر σ-جبر از مجموعه‌ها تحت عمل اشتراک شمارا بسته است. زیرا برای $A_n \in \mathcal{A}$ داریم $A_n^c \in \mathcal{A}$. حال اگر $\{A_n\}_1^{\infty}$ دنباله‌ای شمارا از عناصر $\mathcal{A}$ باشد آنگاه $A_n^c \in \mathcal{A}$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{A}$. پس

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}.$$

تعریف ۶۰. هر خانواده از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی X مانند $\mathcal{F}$ در کوچکترین σ-جبری (نسبت به رابطه شمول) که اشتراک تمام σ-جبرهای شامل $\mathcal{F}$ است، قرار دارد. این کوچکترین σ-جبر را σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{F}$ نامند.

توضیح ۶۱. در تعریف (۵۸) می‌توان گفت که جبر $\mathcal{A}$ یک σ-جبر است هرگاه تحت اجتماع شمارای مجموعه‌های دوبدو متمایز از $\mathcal{A}$ بسته باشد. زیرا فرض کنید $\{A_i\}_1^{\infty} \subset \mathcal{A}$. قرار می‌دهیم

$$B_k = A_k \setminus \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right] = A_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)^c,$$

B_k ها متعلق به $\mathcal{A}$ اند، و دوبدو متمایزند و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

مثال ۵۰. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه است. در این صورت $P(X)$ و $\{\emptyset, X\}$ σ-جبرند. اگر X ناشمارا باشد، آنگاه

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : \text{شمارا است یا } E^c \text{ شمارا است } E\}$$

یک σ-جبر است. $\mathcal{A}$ را σ-جبر مجموعه‌های شمارا یا هم‌شمارا نامند. در این حالت، اگر $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ باشد آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ شمارا است هرگاه هر E_i شمارا باشد، در غیر این صورت هم‌شمارا است.

همان طور که در تعریف (۶۰) آمده است، به سادگی می‌توان دید که اشتراک هر خانواده از σ-جبرها روی X یک σ-جبر است. بنابراین اگر $\mathcal{A}$ هر زیرمجموعه‌ای از $P(X)$ باشد آنگاه کوچکترین σ-جبر $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ شامل $\mathcal{A}$، یعنی اشتراک تمام σ-جبرهای شامل $\mathcal{A}$ وجود دارد و $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ منحصربفرد است. $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ را σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{A}$ نامیدیم.

لم ۶۲. اگر $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ آنگاه $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

اثبات. $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ یک σ-جبر شامل $\mathcal{A}$ است، بنابراین شامل $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ نیز می‌باشد.

تعریف ۶۳. فرض کنید X یک فضای متریک یا در حالت کلی‌تر یک فضای توپولوژیک است. σ-جبر تولید شده توسط خانواده مجموعه‌های باز در X (یا به طور معادل، مجموعه‌های بسته در X) را σ-جبر بورل روی X نامیم و با $\mathcal{B}_X$ نمایش می‌دهیم. عناصر این σ-جبر را مجموعه‌های بورل گوئیم. بنابراین $\mathcal{B}_X$ شامل مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک‌های شمارای مجموعه‌های باز، اجتماع‌های شمارای مجموعه‌های بسته و به همین ترتیب الی آخر است.

توضیح ۶۴. یک اشتراک شمارای مجموعه‌های باز را یک مجموعه G_δ نامند. اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته را یک مجموعه F_σ نامند. اجتماع شمارای مجموعه‌های G_δ را مجموعه $G_{\delta\sigma}$

را اشتراک شمارایی از مجموعه‌های F_σ را یک مجموعه $F_{\sigma\delta}$ نامند.

σ-جبر برل روی $\mathbb{R}$ نقشی اساسی در مباحث ما دارد. برای رجوع مناسب به این σ-جبر می‌توان آن را به طرق مختلفی تولید کرد.

قضیه ۴۵. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ به هر یک از روش‌های زیر تولید می‌شود:

الف) فواصل باز: $\mathcal{A}_1=\{(a,b) : a<b\}$.

ب) فواصل بسته: $\mathcal{A}_2=\{[a,b] : a<b\}$.

ج) فواصل نیم‌باز: $\mathcal{A}_3=\{(a,b] : a<b\}$ یا $\mathcal{A}_4=\{[a,b) : a<b\}$.

د) فواصل باز نامتناهی: $\mathcal{A}_5=\{(a,\infty) : a\in\mathbb{R}\}$ یا $\mathcal{A}_6=\{(-\infty,a) : a\in\mathbb{R}\}$.

ه) فواصل بسته نامتناهی: $\mathcal{A}_7=\{[a,\infty) : a\in\mathbb{R}\}$ یا $\mathcal{A}_8=\{(-\infty,a] : a\in\mathbb{R}\}$.

اثبات. عناصر $\mathcal{A}_j$ برای $j\neq 3,4$ باز یا بسته‌اند و عناصر $\mathcal{A}_3$ و $\mathcal{A}_4$ مجموعه‌های G_δ هستند ($(a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a,b+\frac{1}{n})$) طبق لم ( )؛

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}_j)\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\qquad \forall j$$

زیرا همگی مجموعه‌های برل هستند. از طرف دیگر هر مجموعه باز در $\mathbb{R}$ اجتماع شمارایی از فواصل باز است، پس طبق لم (۴۲)؛

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{M}(\mathcal{A}_1).$$

حال با نشان دادن اینکه تمام فواصل باز در $\mathcal{M}(\mathcal{A}_j)$ قرار دارند (تمرین) و با استفاده از لم (۴۲) نتیجه می‌شود که $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{M}(\mathcal{A}_j)$ برای $j\geq 2$ است. به عنوان مثال

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\tfrac{1}{n},b-\tfrac{1}{n}]\in\mathcal{M}(\mathcal{A}_2).$$

تعریف ۴۶. فرض کنید $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک خانواده اندیس شده از مجموعه‌های ناتهی است و $X=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ و $\pi_\alpha : X\to X_\alpha$ نگاشت‌های مختصات است. اگر $\mathcal{M}_\alpha$ یک σ-جبر روی

X_α برای هر α باشد، σ-جبر حاصل ضرب روی X، σ-جبر تولید شده توسط

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha):\ E_\alpha\in\mathcal{A}_\alpha,\ \alpha\in A\}$$

است. این σ-جبر را با نماد $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$ نمایش می دهیم. اگر $A=\{1,2,\dots,n\}$، این σ-جبر را با نماد $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}_n$ یا $\bigotimes_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i$ نمایش می دهیم.

قضیه ۶۷. اگر A شمارا باشد آن گاه $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$ یک σ-جبر تولید شده توسط

$$\{\prod_{\alpha\in A}E_\alpha:\ E_\alpha\in\mathcal{A}_\alpha\},$$

است.

اثبات. اگر $E_\alpha\in\mathcal{A}_\alpha$ آن گاه $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)=\prod_{\beta\in A}E_\beta$ که در آن برای $\beta\neq\alpha$ داریم $E_\beta=X_\beta$ است. از طرف دیگر $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$. حال نتیجه از لم (۶۲) حاصل می شود.

قضیه ۶۸. فرض کنید برای $\alpha\in A$، $\mathcal{M}(\mathcal{A}_\alpha)$ توسط $\mathcal{A}_\alpha$ تولید شده باشد. در این صورت $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}(\mathcal{A}_\alpha)$ به وسیله خانواده $\mathcal{F}_1=\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha):\ E_\alpha\in\mathcal{A}_\alpha,\ \alpha\in A\}$ تولید می شود. اگر مجموعه A شمارا باشد و برای هر α، $X_\alpha\in\mathcal{A}_\alpha$، در این صورت $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}(\mathcal{A}_\alpha)$ توسط خانواده $\mathcal{F}_2=\{\prod_{\alpha\in A}E_\alpha:\ E_\alpha\in\mathcal{A}_\alpha\}$ تولید می شود.

اثبات. به وضوح $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\subset\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}(\mathcal{A}_\alpha)$. از طرف دیگر برای هر α خانواده $\{E\subset X_\alpha:\ \pi_\alpha^{-1}(E)\in\mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\}$ یک σ-جبر روی X_α است که شامل $\mathcal{A}_\alpha$ می باشد و بنابراین شامل $\mathcal{M}(\mathcal{A}_\alpha)$ است. به عبارت دیگر برای هر α، $E\in\mathcal{M}(\mathcal{A}_\alpha)$، $\pi_\alpha^{-1}(E)\in\mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$ و بنابراین $\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}(\mathcal{A}_\alpha)\subset\mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. قسمت دوم حکم مشابه اثبات قضیه (۶۷) است.

قضیه ۶۹. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ فضاهای متریک و $X=\prod_{j=1}^{n}X_j$ با متر حاصل ضرب است، در این صورت $\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{B}_{X_j}\subset\mathcal{B}_X$. اگر X_j ها جدایی پذیر باشند آن گاه $\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{B}_{X_j}=\mathcal{B}_X$.

اثبات. طبق قضیه (۶۸)، $\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{B}_{X_j}$ توسط مجموعه‌های $\pi_j^{-1}(U_j)$ برای $1\le j\le n$ تولید می‌شود که در آن U_jها در X_j باز اند. چون این مجموعه‌ها در X باز هستند، از لم (۶۲) نتیجه می‌شود که

$$\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{B}_{X_j}\subset\mathcal{B}_X .$$

حال فرض کنید X_jها جدایی‌پذیر اند و $\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ یک مجموعه چگال شمارش‌پذیر در X_j برای $1\le j\le n$ است و $\mathcal{A}_j$ خانواده گوی‌هایی به شعاع‌های گویا و مراکز در x_j^k هستند. در این صورت هر مجموعه باز در X_j اجتماعی از عناصر $\mathcal{A}_j$ است، در واقع اجتماعی شمارش‌پذیر، زیرا $\mathcal{A}_j$ها شمارش‌پذیر اند. علاوه بر آن، مجموعه نقاطی در X که مختصات آنها x_j^kها می‌باشند یک زیرمجموعه چگال شمارا از X است و گوی‌های به شعاع‌های r در X به صورت حاصل‌ضرب گوی‌های به شعاع r در X_jها هستند. در نتیجه $\mathcal{B}_{X_j}$ توسط $\mathcal{A}_j$ و $\mathcal{B}_X$ توسط $\{E_1\times\cdots\times E_n : E_j\in\mathcal{A}_j\}$ تولید می‌شوند. بنابراین طبق قضیه (۶۸)

$$\mathcal{B}_X=\bigotimes_{j=1}^{n}\mathcal{B}_{X_j} .$$

نتیجه. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}=\bigotimes_1^n\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

تعریف ۷۰. یک خانواده مقدماتی، خانواده $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X است به طوری که

الف) $\emptyset\in\mathcal{A}$.

ب) اگر $E,F\in\mathcal{A}$ آنگاه $A\cap B\in\mathcal{A}$.

ج) اگر $A\in\mathcal{A}$ آنگاه A^c به صورت اجتماع تعداد متناهی از عناصر متمایز $\mathcal{A}$ است.

قضیه ۷۱. اگر $\mathcal{E}$ یک خانواده مقدماتی باشد، خانواده $\mathcal{A}$ شامل اجتماع‌های تعداد متناهی از عناصر متمایز $\mathcal{E}$ یک جبر است.

اثبات. برای سادگی نمادگذاری، فرض کنید که اگر $E\in\mathcal{E}$ آنگاه E^c اجتماع دو عنصر

تمایز $\mathcal{E}$ است. (که شامل حالت $E^c \in \mathcal{E}$ نیز هست زیرا $E^c = E^c \cup \emptyset$). اگر $A, B \in \mathcal{E}$ باشند و $B^c = C_1 \cup C_2$ ($C_1, C_2 \in \mathcal{E}$ تمایزند) آن‌گاه

$$A \setminus B = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2),$$

و

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B,$$

که در آن اجتماع‌ها تمایزند، بنابراین $A \cup B \in \mathcal{A}$. حال با توجه به استقرا دیده می‌شود که اگر $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ باشند آن‌گاه $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$، زیرا از فرض استقرا می‌توان فرض کرد که $A_1, \dots, A_{n-1}$ تمایزند، بنابراین

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} (A_j \setminus A_n)\right) \cup A_n,$$

که یک اجتماع از عناصر تمایز است، بنابراین تحت اجتماع متناهی بسته می‌باشد. برای اثبات اینکه $\mathcal{A}$ تحت متمم بسته است، فرض کنید $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ و $A_j^c = B_j^1 \cup B_j^2$ (که در آن B_j^1 و B_j^2 تمایزند). در این صورت

$$\left(\bigcup_1^n A_j\right)^c = \bigcap_1^n (B_j^1 \cup B_j^2)$$
$$= \bigcup \{B_1^{k_1} \cap \dots \cap B_n^{k_n} : k_1, \dots, k_n = 1, 2\} \in \mathcal{A}.$$

تعریف ۷۲. خانواده τ از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک توپولوژی در X گوییم هرگاه

الف) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$.

ب) اگر $A_1, \dots, A_n \in \tau$ آن‌گاه $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.

ج) اگر $\{A_\alpha\}$ یک خانواده دلخواه از عناصر τ باشد (متناهی، شمارا یا ناشمارا) آن‌گاه $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

اگر τ یک توپولوژی در X باشد، گوییم X یک فضای توپولوژیک است و عناصر τ را مجموعه‌های باز در X گوییم.