دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

الگوریتم دو روبی برای مسأله K امین کوتاهترین مسیر

گردآوری و تهیه: حسین کریمی

سر آغاز

- گاهی اوقات دانستن، دومین، سومین و ... کوتاه ترین مسیر از اهمیت خاصی برخوردار می شود.
- برای مثال در شرکتهای حمل و نقلی، در صورت بسته شدن مسیری به دلایلی همانند حوادث پیش بینی نشده، از دومین کوتاه ترین مسیر استفاده خواهد شد.
- الگوریتم های متفاوتی همانند، الگوریتم تعمیم یافته دانتزیک، الگوریتم تعمیم یافته فلوید و الگوریتم دو روبی برای حل این مسأله وجود دارد.

جمع و کمینه تعمیم یافته

- اگر دو بردار $a=(a_1,a_2,...,a_k)$ و $b=(b_1,b_2,...,b_k)$ موجود باشند، آنگاه میتوان موارد زیر را تعریف کرد.
- کمینه تعمیم یافته که با علامت + نشان می دهند: $a+b=\min_k(a_i,b_i:i=1,2,...,k)$
- جمع تعمیم یافته که با علامت $\times$ نشان می دهند: $a\times b=\min_k(a_i,b_j:i,j=1,2,...,k)$

- مثال: کمینه و جمع تعمیم یافته دو بردار روبرو را بدست آورید: $a=(1,3,4,8)$ $b=(3,5,7,16)$

$$a+b=\min_4(1,3,4,8,3,5,7,16)=(1,3,4,5)$$

$$a\times b=\min_4(1+3,1+5,1+7,1+16,3+3,3+5,3+7,3+16,...)=(4,6,7,8)$$

تعاریف اولیه

- تعریف: K امین کوتاهترین کمان بین i و j به صورت $d_{ij}^{0}=(d_{ij1}^{0},d_{ij2}^{0},\dots,d_{ijk}^{0},)$ تعریف می شود.
- با داشتن تعریف بالا، ماتریس کوتاهترین کمان بین تمامی نقاط را D^0 می نامند.
- ماتریس بالا مثلثی برای ماتریس D^0: اگر $i \geq j$ باشد، آنگاه $d_{ij}^{0}=\infty$ شود.
- ماتریس پایین مثلثی برای ماتریس D^0: اگر $i \leq j$ باشد، آنگاه $d_{ij}^{0}=\infty$ شود.
- مثال: ماتریس روبرو را بالا مثلثی و پایین مثلثی کنید.

$$D^{0}=\begin{bmatrix}(0,1) & (6,10) & (2,9)\\ (1,8) & (0,\infty) & (3,\infty)\\ (\infty,\infty) & (2,4) & (0,\infty)\end{bmatrix}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

جواب مثال

$$L = \begin{bmatrix} (\infty,\infty) & (\infty,\infty) & (\infty,\infty) \\ (1,8) & (\infty,\infty) & (\infty,\infty) \\ (\infty,\infty) & (2,4) & (\infty,\infty) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} (\infty,\infty) & (6,10) & (2,9) \\ (\infty,\infty) & (\infty,\infty) & (3,\infty) \\ (\infty,\infty) & (\infty,\infty) & (\infty,\infty) \end{bmatrix}$$

الگوریتم دو روبی

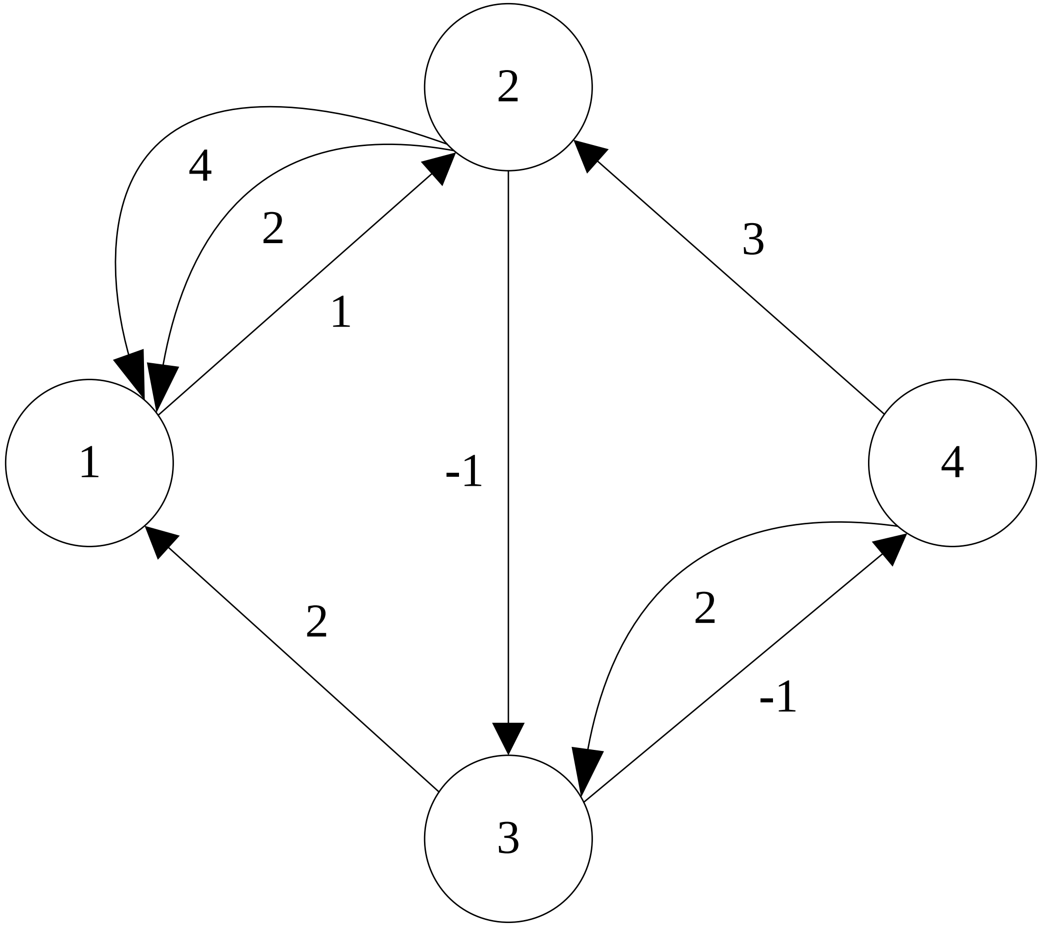
این الگوریتم توسط Shier در سال 1974 مطرح شده است.

- گام اول: ارزش دهی آغازی و تشکیل ماتریس D^0
- گام دوم: تشکیل ماتریس های L و U
- گام سوم: روبیدن رو به عقب را مطابق رابطه روبرو انجام دهید: $d_l^{2r+1} = (d_l^{2r+1} \times L) + d_l^{2r}$
- گام چهارم: روبیدن رو به جلو را مطابق رابطه روبرو انجام دهید: $d_l^{2r+2} = (d_l^{2r+2} \times U) + d_l^{2r+1}$

- در روابط بالا $r = (0,1,2,\dots)$ (شمارنده تکرارهای الگوریتم) و $l = (1,2,\dots,n)$ (شمارنده تعداد گره ها)
- گام های سوم و چهارم را تا هنگامی که تغییری در جواب روابط روبیدن به عقب و جلو حاصل نشود، تکرار کنید.

مثال الگوریتم دو روبی

- مثال: سه کوتاهترین مسیر را بین نقطه 1 و دیگر نقاط با الگوریتم دو روبی بیابید.



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

حل مثال: گام اول

- گام اول: ابتدا ماتریس D^0 را تشکیل می دهیم.

$$D^0 = \begin{bmatrix} (0,\infty,\infty) & (1,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \\ (2,4,\infty) & (0,\infty,\infty) & (-1,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \\ (2,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (0,\infty,\infty) & (-1,\infty,\infty) \\ (\infty,\infty,\infty) & (3,\infty,\infty) & (2,\infty,\infty) & (0,\infty,\infty) \end{bmatrix}$$

حل مثال: گام دوم

- گام دوم: ماتریسهای L و U را تشکیل می دهیم.

$$L = \begin{bmatrix} (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \\ (2,4,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \\ (2,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \\ (\infty,\infty,\infty) & (3,\infty,\infty) & (2,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} (\infty,\infty,\infty) & (1,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \\ (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (-1,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \\ (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (-1,\infty,\infty) \\ (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) & (\infty,\infty,\infty) \end{bmatrix}$$

حل مثال: گام سوم

- گام سوم: روبیدن رو به عقب را مطابق رابطه بیان شده انجام می دهیم.

$$d_{14}^{2r+1} = d_{14}^{2r} \to d_{14}^{1} = d_{14}^{0} = \infty$$

$$d_{13}^{2r+1} = (d_{14}^{2r+1} \times L_{43} + d_{13}^{2r}) \to d_{13}^{1} = (d_{14}^{1} \times (2,\infty,\infty) + d_{13}^{0}) = \infty$$

$$d_{12}^{2r+1} = (d_{14}^{2r+1} \times L_{42} + d_{13}^{2r+1} \times L_{32} + d_{12}^{2r}) \to d_{12}^{1} = (d_{14}^{1} \times (3,\infty,\infty) + d_{13}^{1} \times \infty + d_{12}^{0}) = (1,\infty,\infty)$$

$$d_{11}^{2r+1} = (d_{14}^{2r+1} \times L_{41} + d_{13}^{2r+1} \times L_{31} + d_{12}^{2r+1} \times L_{21} + d_{11}^{2r}) \to$$
$$d_{11}^{1} = (d_{14}^{1} \times \infty + d_{13}^{1} \times (2,\infty,\infty) + d_{12}^{1} \times (2,4,\infty) + d_{11}^{0}) = (3,5,\infty) + (0,\infty,\infty) = (0,3,5)$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

حل مثال: گام چهارم

- گام چهارم: روبیدن رو به جلو را مطابق رابطه بیان شده انجام می دهیم.

$$d_{11}^{2r+2} = d_{11}^{2r+1} \rightarrow d_{11}^{2} = d_{11}^{1} = (0,3,5)$$

$$d_{12}^{2r+2} = (d_{11}^{2r+2} \times U_{12}) + d_{12}^{2r+1} \rightarrow d_{12}^{2} = (d_{11}^{2} \times (1,\infty,\infty)) + d_{12}^{1} = (1,4,6) + (1,\infty,\infty) = (1,4,6)$$

$$d_{13}^{2r+2} = (d_{11}^{2r+2} \times U_{13} + d_{12}^{2r+2} \times U_{23} + d_{13}^{2r+1}) \rightarrow d_{13}^{2} = (d_{11}^{2} \times \infty + d_{12}^{2} \times (-1,\infty,\infty) + d_{13}^{1}) = (0,3,5)$$

$$d_{14}^{2r+2} = (d_{11}^{2r+2} \times U_{14} + d_{12}^{2r+2} \times U_{24} + d_{13}^{2r+2} \times U_{34} + d_{14}^{2r+1}) \rightarrow$$
$$d_{14}^{2} = (d_{11}^{2} \times \infty + d_{12}^{2} \times \infty + d_{13}^{2} \times (-1,\infty,\infty) + d_{14}^{1}) = (-1,2,4) + \infty = (-1,2,4)$$

نتیجه نهایی حل

	d_{11}^r	d_{12}^r	d_{13}^r	d_{14}^r		
	$(0,\infty,\infty)$	$(1,\infty,\infty)$	(∞,∞,∞)	(∞,∞,∞)		
$r=0$	$(0,3,5)$	$(1,\infty,\infty)$	(∞,∞,∞)	(∞,∞,∞)	$\leftarrow$	*Backward*
$r=0$	$(0,3,5)$	$(1,4,6)$	$(0,3,5)$	$(-1,2,4)$	$\rightarrow$	*Forward*
$r=1$	$(0,2,3)$	$(1,2,4)$	$(0,1,3)$	$(-1,2,4)$	$\leftarrow$	*Backward*
$r=1$	$(0,2,3)$	$(1,2,3)$	$(0,1,2)$	$(-1,0,1)$	$\rightarrow$	*Forward*
$r=2$	$(0,2,3)$	$(1,2,3)$	$(0,1,2)$	$(-1,0,1)$	$\leftarrow$	*Backward*

تمـریـن

نکته: اگر الگوریتم دو روبی m بار تکرار شود، آنگاه پیچیدگی آن $O(m^4)$ است. اما از آنجایی که عموما این الگوریتم زود همگرا می شود. زمان حل آن کم خواهد بود.

- برای شبکه مثال مطرح شده، دو کوتاه ترین مسیر از تمامی گره ها را برای گره 2 محاسبه نمایید.