IRAN LOGEX 2015
سومین نمایشگاه بین المللی لجستیک ، زنجیره تامین و توزیع
The 3rd International Logistics , Supply Chain & Distribution fair
ششمین کنفرانس ملی و چهارمین کنفراس بین المللی لجستیک و زنجیره تامین
The 6th National & 4th International Logistics & Supply Chain Conference
The 2nd Logistics National Award دومین دوره جایزه ملی لجستیک

# ارائه‌ی یک مدل مکان یابی-مسیریابی همراه با قیمت‌گذاری منطقه‌ای و یک روش ابتکاری جستجوی همسایگی متغیر

مصطفی ستاک[1][i]،محسن صادقی دستکی[2]، حسین کریمی[3]

[1]استادیار؛ گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی؛ setak@kntu.ac.ir

[2]دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی؛ Msadeghidastaki@mail.kntu.ac.ir

[2]دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی؛ hkarimi@mail.kntu.ac.ir

## چکیده

یکی از پرکاربردترین سیاست های قیمت گذاری، قیمت‌گذاری منطقه‌ای است که در ادبیات موضوع مکان‌یابی-مسیریابی توجه کمی به آن شده است. مقاله حاضر به بسررسی موضوع قیمت‌گذاری منطقه‌ای در مساله‌ی مکان‌یابی-مسیریابی پرداخته است. در این مساله شرکتی به دنبال تعیین قیمت، مسیر وسیله نقلیه و مکان دپو در هر منطقه با هدف بیشینه‌سازی سود است. یک مدل مبتنی بر جریان تعریف شده که مدل برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط بوده و همچنین بایک روش قطعه‌قطعه خطی، به شکل خطی تبدیل شده است. مدل پیشنهادی برای مثال‌های با ابعاد کوچک، به وسیله حل‌کننده‌های تجاری مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط، قابل حل است. به دلیل NP-hard بودن مساله، یک الگوریتم جستجوی همسایگی متغیربرای حل مسائل با ابعاد بزرگ توسعه داده شد و در نرم-فزار متلب پیاده‌سازی شده است. نتایج حاصل از حل مثال‌های بزرگ مربوط به مسائل مکان‌یابی-مسیریابی توسط رایانه، کارا بودن الگوریتمپیشنهادی را نشان می‌دهد.

## کلمات کلیدی

قیمت‌گذاری، قیمت‌گذاری منطقه‌ای، مساله‌ی مکان‌یابی-مسیریابی، جستجوی همسایگی متغیر.

# Providing a Location-routing problem under zone pricing and heuristic variable neighborhood search algorithm

**M. Setak, M. SadeghiDastaki, H. Karimi**

***ABSTRACT***

One of prevalent pricing policies that attract little attention in the literature of location-routing is zone pricing. This paper contributes zone pricing to location-routing problems. In this problem, a firm tries to determine price, vehicle route and location of depot in each zone due to maximizing its profit. A flow based model is defined and the resulting nonlinear mixed integer model is linearized by a piecewise linearization method. The proposed model can be solved by commercially available MIP-solvers to solve small-scale examples. Since the problem is NP-hard, a variable neighborhood search algorithm is developed for solving large-scale problems and implemented in MATLAB software. The results of computer trials on specially adapted large benchmark instances of the location-routing problem, confirm that the proposed variable neighborhood search algorithm can solve such instances efficiently.

***KEYWORDS***

Pricing, Zone pricing,Location-routing problem, Variable neighborhood search.

[i]مصطفی ستاک، آدرس: تهران، میدان ونک، خیابان ملاصدرا، خیابان پردیس، دانشکده‌ی صنایع و مکانیک دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

## ۱- مقدمه

یکی از مهمترین موضوعات در لجستیک پیشرو، فراهم کردن نیازهای مشتریان و تامین تقاضای آنها است. امروزه نه تنها کیفیت کالاهای عرضه شده، بلکه قیمت کالاها نیز دارای اهیمت بالایی برای مشتریان است؛ به عبارت دیگر شرکت‌ها به دنبال بهینه‌سازی ساختار شبکه‌ی خود و بهبود مسیر وسایل نقلیه و مکان احداث دپوهای خود با هدف بیشینه‌سازی سود می باشند. تحقیقات نشان می دهد که هزینه‌های توزیع، حدود ۱۰٪ از درآمد و بیشتر از ۴۵٪ از کل هزینه‌های لجستیکی شرکت‌ها را تشکیل می‌دهند؛ بنابراین یکپارچه‌سازی مکان‌یابی تسهیلات، مسیریابی وسایل نقلیه و قیمت‌گذاری محصولات به یکی از مهمترین موضوعات در بسیاری از کشورها تبدیل شده است[۱].

قیمت‌گذاری یک موضوع مهم در بسیاری از مسائل لجستیکی از قبیل مسیریابی وسایل نقلیه و مکان‌یابی تسهیلات است. شرکت‌ها می‌توانند از سیاست‌های قیمت‌گذاری متفاوتی در بازارها استفاده نمایند. سیاست‌های قیمت‌گذاری، وابسته به تحمیل یا عدم تحمیل هزینه‌های حمل ونقل، شامل قیمت کارخانه، تحویلی، تبعیض‌آمیز (تبعیضی) و منطقه‌ای می‌باشند. یکی از رایج‌ترین سیاست‌های قیمت-گذاری، قیمت‌گذاری منطقه‌ای است که به طور همزمان چندین قیمت تحویلی را برای مناطق از پیش تعیین شده‌ی بازار تعیین می نماید. این سیاست قیمت‌گذاری در بسیاری از شرکت‌ها مثل صنایع سوخت و سیمان کاربرد دارد. قیمت‌گذاری منطقه‌ای دارای مزیت‌های زیادی است. اولین مزیت قیمت‌گذاری منطقه‌ای، قابلیت کسب سطح بالایی از سود همانند قیمت‌گذاری تبیعض‌آمیز است. مزیت دیگر این سیاست، کارآمدی این سیاست در موقعیت‌های رقابتی است که از کاهش بیش از اندازه‌ی سود شرکت‌های موجود جلوگیری می‌کند[۲]. کلیه‌ی موارد ذکر شده دلایلی بر توجه شرکت‌ها به قیمت‌گذاری منطقه‌ای و کارآمدی آن در بسیاری از بازارها است.

مساله‌ی مکان‌یابی-مسیریابی در صنایعی مثل تحویل صورتحساب[۳]، طراحی شبکه‌های نوری[۴] و طراحی شبکه‌های ارتباطی[۵] و بسیاری از صنایع دیگر کاربرد دارد. به علاوه تعیین همزمان قیمت، مکان تسهیلات و مسیر وسایل نقلیه می‌تواند سودمند باشد. در نتیجه، یکپارچگی مسائل مکان‌یابی – مسیریابی و قیمت-گذاری منطقه‌ای می‌تواند باعث افزایش کارایی شرکت‌های توزیع شود.

در این مقاله، مولفان به بررسی یک مساله‌ی مکان‌یابی – مسیریابی همراه قیمت‌گذاری منطقه‌ای پرداخته‌اند. در این مساله، یک شرکت به دنبال توزیع محصولات خود در بین مشتریان است. این شرکت، بازار بزرگ مصرف کنندگان خود را به تعدادی منطقه تقسیم نموده و به دنبال تعیین همزمان قیمت بهینه، مکان بهینه‌ی یک دپو که باید در هر ناحیه احداث شود و مسیر بهینه‌ی وسیله‌ی نقلیه که در هر ناحیه، از دپو شروع شده و به آن ختم می شود، است. در واقع شرکت محصولات خود را از محل مرکزی خود به هر یک از دپوها در هر ناحیه انتقال می دهد، سپس در هر ناحیه، یک وسیله‌ی نقلیه، با یک سفر که از دپوی انتخاب شده، آغاز می‌شود و به همان دپو باز می گردد، به توزیع کالاها می‌پردازد. با فرض غیر خطی و درجه‌ی دوم بودن تابع تقاضا، یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط که مبتنی بر جریان‌های کالایی می باشد ارائه گردید. علاوه براین، مدل غیرخطی ارائه شده توسط یک روش قطعه‌قطعه خطی، تقریب زده شده و خطی گردید. اگر قیمت کالاها را در هر منطقه برابر با صفر در نظر بگیریم، مساله به وضوح به یک مساله‌ی مکان‌یابی-مسیریابی تبدیل شده که یک مساله‌ی NP-hard است[۶] برای حل این مشکل و با توجه به بزرگ بودن مسائل در دنیای واقعی، یک الگوریتم ابتکاری جستجوی همسایگی متغیر، همراه با چهار اپراتور برای جستجوی محلی، پیشنهاد شده است.

ادامه‌ی مقاله به صورت ذیل سازمان‌دهی شده است. در بخش دوم، به شرح مختصری بر بیشینه‌ی تحقیق پرداخته شده است. در بخش سوم، به معرفی مساله و مدل ریاضی آن پرداخته شده است. بخش چهارم الگوریتم پیشنهادی را معرفی و ارائه خواهد کرد. در بخش پنجم، نتایج حاصل از محاسبات عددی ارائه و تحلیل شده است. بخش آخر نیز، به بیان نتایج حاصل از تحقیق و ارائه‌ی پیشنهاداتی برای آینده تمرکز دارد.

## ۲- ادبیات موضوع

موضوع قیمت‌گذاری به صورت گسترده‌ای در زمینه‌ی مکان‌یابی تسهیلات بکار رفته است. ادبیات موجود در مساله‌ی مکان‌یابی قابل تقسیم به کارهای انجام شده در زمینه‌ی سیاست‌های قیمت‌گذاری قیمت کارخانه، تحویلی، تبعیض‌آمیز و منطقه‌ای است. همچنین این موضوع در حوزه‌ی مسیریابی وسایل نقلیه نیز وارد شده است. در ادامه به صورت مجزا به بررسی برخی از کارهای انجام شده در حوزه‌ی مکان-یابی-قیمت‌گذاری و مسیریابی–قیمت‌گذاری پرداخته خواهد شد.

### ۲-۱- مساله مکان‌یابی – قیمت‌گذاری

#### قیمت‌گذاری تحویلی

یکی از کارهای انجام شده در این زمینه، کار هنسن و همکاران[۷] است که یک مساله‌ی مکان‌یابی را همراه با تعیین قیمت محصولات و با هدف بیشینه‌سازی سود مورد بررسی قرار دادند. ابولیان و همکاران[۸] یک مساله‌ی مکان‌یابی رقابتی را در حالتی که تعدادی از تسهیلات جدید یک شرکت، قصد ورود به بازار را، دارند، همراه با تعیین قیمت تحویلی محصولات، مدل‌سازی و حل نمودند. با گسترش این زمینه، تحقیقات بیشتری در زمینه‌ی ارائه‌ی مدل و روش حل انجام

شد که می‌توان از تحقیق ابویی مهریزی و همکاران[۹] یاد کرد.

### قیمت‌گذاری تبعیض‌آمیز

در سال ۱۹۸۵، هیورتر و لدرر[۱۰] یک مدل مکان‌یابی را برای شرکتی که دارای یک تابع تولید بوده بکار بردند و قیمت‌های تبعیض-آمیز آن را نیز محاسبه نمودند. بعد از آن در سال ۱۹۸۹، همیلتون و همکاران[۱۱] یک مدل مکان‌یابی رقابتی همراه با تعیین قیمت را ارائه نمودند. همچنین پنین و همکاران[۱۲] نیز بر روی مدل‌های رقابتی کار نموده و یک مدل برنامه‌ریزی خطی دو سطحی ارائه دادند.

### قیمت‌گذاری کارخانه

در این روش قیمت‌گذاری، تعیین هزینه‌های حمل و نقل محصول بر عهده‌ی خود مشتریان است. بر این اساس، هنسن و همکاران[۷] و داسکی و لاپرته[۱۳] کارهایی را ارائه داده‌اند. علاوه براین پرز و همکاران [۱۷] نیز تحقیقی را در محیط رقابتی و مرتبط با این سیاست قیمت‌گذاری انجام داده‌اند.

### قیمت‌گذاری منطقه‌ای

در زمینه‌ی قیمت‌گذاری منطقه‌ای، تحقیقاتی توسط هنسن و همکاران[۷] و [۱۵] صورت گرفته است. آنها مدل و الگوریتمی را به منظور تعیین قیمت بهینه، مکان بهینه تسهیلات و تعداد بهینه مناطق بازار با هدف بیشینه‌سازی سود ارائه دادند.

### ۲-۲- مساله مسیریابی-قیمت‌گذاری

در زمینه‌ی لجستیک معکوس نیز، اراس و همکاران[۱۶]یک مساله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه را که در آن شرکتی به دنبال جمع-آوری کالاهای قابل بازیافت و تعیین قیمت یکسان برای آنها می‌باشد را مورد بررسی قرار دادند.

در قسمت بعد، یک مدل مبتنی بر جریان برای مساله‌ی مکان‌یابی-مسیریابی همراه با قیمت‌گذاری منطقه‌ای ارائه خواهد شد.

## ۳- طرح فرضیات و بیان مدل ریاضی

در این قسمت، قبل از ارائه‌ی مدل، به معرفی مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرهای تصمیم موردنیاز برای مدل‌سازی مساله می‌پردازیم.

مجموعه‌ها:

$K$ مجموعه مناطق

$I_k$ مجموعه مشتریان

$M_k$ مجموعه نقاط بالقوه برای احداث دپو

پارامترها:

$C_{i_k j_k}$ هزینه‌ی سفر از گره $i_k$ به گره $j_k$

$G_{i_k}$ هزینه‌ی راه‌اندازی برای احداث دپو در گره $i_k$

$C_{0m_k}$ هزینه‌ی سفر از شرکت به دپو $m_k$ s

$f_k(d_k)$ تابع تقاضا در منطقه $k$ و $d_k$ نشان دهنده‌ی کلیه‌ی متغیرهای مستقل مثل قیمت است

متغیرهای تصمیم:

$x_{i_k j_k}$ اگر وسیله‌ی نقلیه‌ی منطقه‌ی $k$، گره $j_k$ را بعد از گره $i_k$ ملاقات کند یک و در غیر این صورت، صفر

$Y_{m_k}$ اگر در مکان بالقوه $m_k$، دپو احداث شود یک و در غیر این صورت، صفر

$F^u{}_{i_k j_k}$ متغیر جریانی که نشان دهنده‌ی جریان کالا در کمان $(i, j)$ است که کالای $u$ ام را از گره ابتدایی $a_k$ (دپو) به گره $u$ در منطقه $k$ می برد

لازم به ذکر است که متغیر جریان $F^u{}_{i_k j_k}$ ، همان متغیری است که ونگ[۱۷] برای نوشتن محدودیت‌های جریان از آن استفاده نمود. با توجه به موارد ذکرشده در بالا، مدل برنامه‌ریزی غیرخطی مختلط به صورت ذیل ارائه شده است:

$$\max \sum_k f_k(d_k)W_k - \sum_{i_k}\sum_{j_k} C_{i_k j_k} X_{i_k j_k} - \sum_{i_k} G_{i_k} Y_{i_k} - \sum_{m_k} C_{0m_k} Y_{m_k} \quad (۱)$$

$$\sum_{\substack{i_k=1 \\ i_k \neq j_k}}^{N_k} X_{i_k j_k} = 1 \qquad \forall j_k \quad (۲)$$

$$\sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq i_k}}^{N_k} X_{i_k j_k} = 1 \qquad \forall i_k \quad (۳)$$

$$\sum_{m_k} Y_{m_k} = 1 \qquad \forall m_k \quad (۴)$$

$$F^u_{i_k j_k} \leq f_k(d_k) X_{i_k j_k} \qquad \forall i_k, j_k, \mathrm{i_k} \neq j_k \quad \forall \mathrm{u} \neq \mathrm{a}_k \quad (۵)$$

$$\sum_{j_k \neq \mathrm{a}_k}^{N_k} F^u_{\mathrm{a}_k j_k} - \sum_{j_k \neq \mathrm{a}_k}^{N_k} F^u_{j_k \mathrm{a}_k} = 1 \qquad \forall k, \forall \mathrm{u} \neq \mathrm{a}_k \quad (۶)$$

$$\sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq i_k}}^{N_k} F^u_{i_k j_k} - \sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq i_k}}^{N_k} F^u_{j_k i_k} = 0 \qquad \forall k, i_k, u \neq \mathrm{a}_k, \mathrm{i_k} \neq u \quad (۷)$$

$$\sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq u}}^{N_k} F^u_{u j_k} - \sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq u}}^{N_k} F^u_{j_k u} = -1 \qquad \forall k, \forall u \neq \mathrm{a}_k \quad (۸)$$

$$F^u{}_{i_k j_k} \geq 0 \qquad \forall i_k, j_k, u \quad (۹)$$

$$X_{i_k j_k} = \{0,1\} \qquad \forall i_k, j_k \quad (۱۰)$$

در این مدل، (۱) تابع هدف را نشان می‌دهد که سود شرکت را

بیشینه می‌کند. محدودیت‌های (۲) و (۳) تضمین می‌کنند که هر گره در هر منطقه، فقط یک بار ملاقات شود. محدودیت (۴) نشان می‌دهد که در هر منطقه باید یک و فقط یک، مکان بالقوه به عنوان دپو انتخاب شود. محدودیت (۵) بیشینه جریان قابل انتقال بین هر دو گره را در هر منطقه بیان می‌کند. حفظ و تبادل جریان بین گره‌ها توسط محدودیت‌های (۶)–(۸) مشخص می‌شود. محدودیت‌های (۹)-(۱۰) تعیین‌کننده‌ی علامت متغیرها می‌باشند؛ به عبارت دیگر، نشان‌دهنده‌ی مثبت بودن متغیر $F^u{}_{i_k j_k}$ و دودویی بودن متغیر $X_{i_k j_k}$ هستند.

محدودیت (۵) یک محدودیت غیرخطی است و می توان آن را با (۱۱) و (۱۲) جایگزین نمود. مقدار $M$ در (۱۲) می تواند بیشترین مقدار تقاضا در هر منطقه باشد.

$$F^u_{i_k j_k} \le f_k(d_k) \qquad \forall i_k, j_k,\ i_k \ne j_k,\ \forall u \ne a_k \qquad (۱۱)$$

$$F^u_{i_k j_k} \le M X_{i_k j_k} \qquad \forall i_k, j_k,\ i_k \ne j_k,\ \forall u \ne a_k \qquad (۱۲)$$

در این تحقیق تابع تقاضا به صورت تابع نامنفی (۱۳) در نظر گرفته شده است، در نتیجه (۱) و (۱۱) غیرخطی خواهند شد. برای از بین بردن عوامل غیرخطی می‌توان از یک روش قطعه‌قطعه خطی استفاده نمود.

$$f_k(d_k) = C_k - A_k W^2{}_k \quad , A_k > 1 \qquad (۱۳)$$

پارامتر، مجموعه و متغیر مورد نیاز برای خطی‌سازی (۱) و (۱۱) در ابتدا بیان خواهد شد و سپس نحوه خطی‌سازی به صورت تفضیلی برای (۱) توضیح داده خواهد شد. همچنین نتایج آن برای (۱۱) قابل تعمیم خواهد بود.

مجموعه:

$Q_k$ مجموعه بازه‌ها

پارامترها:

$Coeffs_{q_k}$ ضریب (شیب تابع) در بازه $q_k$ و در منطقه $k$

$Const_{q_k}$ مقدار ثابت (عرض از مبدا) در بازه $q_k$ و در منطقه $k$

$Lower_{q_k}$ حد پایین بازه $q_k$

$Upper_{q_k}$ حد بالا بازه $q_k$

متغیرهای تصمیم:

$Y'_{q_k}$ اگر بازه $q_k$ انتخاب شود یک و در غیراینصورت، صفر.

همچنین متغیر $W_k$ به متغیر $W_{kq_k}$ تغییر می‌یابد؛ بنابراین (۱) را می‌توان با جایگزین کردن با (۱۴)-(۱۸) خطی نمود. همچنین برای خطی‌سازی (۱۱) نیز، می توان به همین صورت عمل کرد.

$$\max \sum_k \Big( \sum_{q_k} (coeff_{q_k} W_{kq_k} + const_{q_k} Y'_{q_k}) \Big) - \sum_{i_k} \sum_{j_k} C_{i_k j_k} X_{i_k j_k} - \sum_{i_k} G_{i_k} Y_{i_k} - \sum_{m_k} C_{0m_k} Y_{m_k} \qquad (۱۴)$$

$$\sum_{q_k} Y'_{q_k} = 1 \qquad \forall k \qquad (۱۵)$$

$$W_{kq_k} \le upper(q_k) Y'_{q_k} \qquad \forall k, q_k \qquad (۱۶)$$

$$W_{kq_k} \ge lower(q_k) Y'_{q_k} \qquad \forall k, q_k \qquad (۱۷)$$

$$Y'_{q_k} = 0 \ \text{ or } \ 1 \qquad (۱۸)$$

برای برقراری ارتباط بین انتخاب دپو و قیمت مناسب در هر منطقه، می‌توان شکل تابع تقاضا را به صورت (۱۹) در نظر گرفت.

$$f_k(d_k) = C_k - A_k \Big(W_k + \sum_{m_k} (\alpha_k C_{0m_k}) Y_{m_k}\Big)^2 \qquad (۱۹)$$

$$, A_k > 1$$

ضریب $\alpha_k$ منجر به توزیع هزینه‌های حمل ونقل بر روی همه‌ی محصولات می‌شود و مقدار مناسب برای آن، می‌تواند معکوس حداکثر تقاضا در هر منطقه باشد. در نتیجه مقدار قیمت تحویلی در هر منطقه برابر با (۲۰) خواهد بود.

$$W_k + \sum_{m_k} (C_{0m_k} \alpha_k) Y_{m_k}) \qquad (۲۰)$$

با در نظر گرفتن (۱۹) به عنوان تابع تقاضای جدید، باز هم (۱) و (۱۱) غیرخطی خواهند شد. خطی‌سازی را برای (۱) توضیح داده و برای (۱۱) قابل تعمیم است. مقدار جدید درآمد برابر با (۲۱) است.

$$\sum_k f_k(d_k) W_k = \sum_k \Bigg( C_k W_k - A_k W_k{}^3 - A_k W_k \sum_{m_k} \big(C_{0m_k} \alpha_k\big)^2 Y^2{}_{m_k} - 2 A_k W^2{}_k \sum_{m_k} (C_{0m_k} \alpha_k) \Bigg) \qquad (۲۱)$$

با فرض $Y_{m_k} = Y^2{}_{m_k}$، می توان تمام متغیرهای $Y^2{}_{m_k}$ را حذف نموده و به جای آن $Y_{m_k}$ را قرار داد.

قضیه ۱: (۲۲)-(۲۵) با (۲۱) یکسان است.

$$\sum_k f_k(d_k) W_k = \sum_k \Bigg( C_k W_k - A_k W_k{}^3 - A_k \sum_{m_k} \big(C_{0m_k} \alpha_k\big)^2 r_{m_k} - 2 A_k \sum_{m_k} (C_{0m_k} \alpha_k) r^2{}_{m_k} \Bigg) \qquad (۲۲)$$

$$r_{m_k} \le M' Y_{m_k} \qquad \forall m_k \qquad (۲۳)$$

$$W_k \le r_{m_k} + M'(1 - Y_{m_k}) \qquad \forall k, m_k \qquad (۲۴)$$

$$r_{m_k} \ge 0 \qquad \forall k, m_k \qquad (۲۵)$$

بیشترین مقدار ممکن برای قیمت در هر ناحیه می‌تواند مقدار مناسبی برای $M'$ باشد.

اثبات: بدون اینکه خللی در مساله ایجاد شود، فرض می‌شود که $r_{m_k} = Y_{m_k} W_k$. از طرفی می‌دانیم که $r^2{}_{m_k} = Y_{m_k} W^2{}_k$، در نتیجه روابط (۲۲)-(۲۵) قابل محاسبه است.□

قضیه ۲: (۲۲) را می‌توان با (۲۶) تخمین زد.

$$\sum_{k} f_k(d_k) W_k \approx \sum_{k}\sum_{m_k}\sum_{q_k} Y_{m_k}(coeff_{q_k} W_{kq_k} + const_{q_k} Y'_{q_k}) \quad (۲۶)$$

اثبات: برای خطی سازی متغیر $W_k$ به متغیر $W_{kq_k}$ تغییر می‌یابد. از طرفی می‌دانیم که اگر $r_{m_k} = 0$ باشد آنگاه $W_k = 0$، در نتیجه (۲۲) برابر با صفر خواهد بود. چنانچه $r_{m_k} = W_k$ باشد آنگاه مقدار $W_k$ بزرگتر از صفر بوده و در نتیجه (۲۲) بزرگتر از صفر خواهد بود. □

قضیه ۳: (۲۷)-(۳۶) به خوبی (۲۶) را تخمین می‌زنند.

$$\sum_{k} f_k(d_k) W_k \approx \sum_{k}\sum_{m_k}\left(\sum_{q_k}(coeff_{q_k,m_k} r_{m_k q_k} + const_{q_k,m_k} t_{m_k q_k})\right) \quad (۲۷)$$

$$2t_{m_k q_k} \le Y'_{q_k} + Y_{m_k} \qquad \forall m_k, q_k \quad (۲۸)$$

$$\sum_{m_k}\sum_{q_k} t_{m_k q_k} = 1 \qquad \forall k \quad (۲۹)$$

$$W_{kq_k} \ge r_{m_k q_k} \qquad \forall k, m_k, q_k \quad (۳۰)$$

$$r_{m_k q_k} \le M' Y'_{q_k} \qquad \forall m_k, q_k \quad (۳۱)$$

$$r_{m_k q_k} \le M' Y_{m_k} \qquad \forall m_k, q_k \quad (۳۲)$$

$$W_{kq_k} \le r_{m_k q_k} + M'(2 - Y'_{q_k} - Y_{m_k}) \qquad \forall m_k, q_k \quad (۳۳)$$

$$r_{m_k q_k} \ge 0 \qquad \forall m_k, q_k \quad (۳۴)$$

$$t_{m_k q_k} = \{0,1\} \qquad \forall m_k, q_k \quad (۳۵)$$

$$W_{kq_k} \ge 0 \qquad \forall k, q_k \quad (۳۶)$$

اثبات: در (۲۶)، با تغییر متغیرهای $t_{m_k q_k} = Y_{m_k} Y'_{q_k}$ و $r_{m_k q_k} = Y_{m_k} W_{kq_k}$ در تابع هدف و اضافه کردن محدودیت‌های (۲۸)-(۳۶)، تابع درآمد (۲۶) خطی می‌شود و در نتیجه کل تابع هدف خطی خواهد شد. □

به طریق مشابه نیز می‌توان (۱۱) را خطی نمود. پس از تعریف کامل مساله و مدل‌سازی ریاضی آن، در ادامه به ارائه‌ی روشی ابتکاری برای حل مسائل در ابعاد بزرگ می‌پردازیم.

## ۴- روش حل پیشنهادی

رویکرد پیشنهادی برای حل مساله‌ی پیشنهادی، روشی بر مبنای الگوریتم فراابتکاری جستجوی همسایگی متغیر است. الگوریتم پیشنهادی دارای چهار گام بوده که در زیر، بخش‌های بعدی به تفضیل بیان خواهند شد.

### ۴-۱- گام اول: تولید جواب اولیه

برای حل مساله، الگوریتم نیازمند تولید جواب‌های اولیه‌ای شامل مسیر اولیه، قیمت اولیه و محل اولیه برای دپو در هر منطقه است.

### محاسبه‌ی مسیر اولیه

با توجه به این که در هر منطقه، کلیه‌ی مشتریان ملاقات می‌شوند، مسیر اولیه با استفاده از الگوریتم کلارک و رایت[۱۸]برای مساله فروشنده دوره‌گرد محاسبه شده است. گام‌های این الگوریتم عبارتند از:

۱) گره دلخواه $l_k$، به عنوان گره مرکزی در هر منطقه انتخاب می‌شود. سپس برای هرگره $i_k$، زیرتور $l_k - i_k - l_k$ تشکیل می‌شود.

۲) مقدار صرفه‌جویی برای هر دو گره $i_k, j_k$ با شرط $j_k \ne l_k$، $i_k \ne j_k, i_k \ne l_k$ و ادغام زیرتورهای $l_k - i_k - l_k$ و $l_k - j_k - l_k$ و تشکیل $l_k - i_k - j_k - l_k$، از (۳۷) به دست می‌آید.

$$S_{i_k j_k} = c_{i_k l_k} + c_{l_k j_k} - c_{i_k j_k} \quad (۳۷)$$

۳) مرتب کردن مقادیر صرفه‌جویی به ترتیب نزولی

۴) ادغام کردن زیرتور از طریق توجه به مقادیر صرفه‌جویی مربوط به هر دو گره. این کار تا جایی ادامه دارد که تمام گره‌ها در یک تور قرار بگیرند.

### محاسبه‌ی قیمت اولیه

تابع درآمد توسط (۳۸) نشان داده شده است. به منظور تعیین قیمت اولیه در هر منطقه، باید ابتدا بردار گرادیان (۳۹) محاسبه شود. سپس بهترین جواب‌ها (۴۰) قابل محاسبه می‌باشند.

$$R = \sum_{k} f_k(d_k) W_k \quad (۳۸)$$

$$\nabla R = \left(\frac{\partial R}{\partial W_1}, \frac{\partial R}{\partial W2}, \ldots, \frac{\partial R}{\partial W_k}\right) \quad (۳۹)$$

$$\nabla R = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial W_1} = 0 & \Rightarrow \quad W_1^* \\ \frac{\partial R}{\partial W2} = 0 & \Rightarrow \quad W_2^* \\ \vdots & \\ \frac{\partial R}{\partial W_k} = 0 & \Rightarrow \quad W_k^* \end{cases} \quad (۴۰)$$

### محاسبه‌ی دپوی اولیه

الگوریتم برای انتخاب یک دپو به عنوان دپو اولیه، ابتدا دو جایگشت تصادفی تولید می کند. یک جایگشت از مکان‌های بالقوه و دیگری، جایگشت تصادفی از ۱ تا $N_k$ است. پس از آن یکی‌یکی مولفه‌های جایگشت دوم با جایگشت اول مقایسه شده و به محض اولین تشابه، آن عدد به عنوان دپوی اولیه برای منطقه k انتخاب می‌شود.

### ۴-۲- گام دوم: جستجوی محلی

به منظور انجام جستجوی محلی، چهار عملگر معرفی شده است. این عملگرها بر روی هزینه‌های مسیر موثر بوده و باعث کاهش هزینه‌ها در هر منطقه می‌شود. در ادامه عملکرد هر عملگر به صورت جزئی در جدول ۱ توضیح داده خواهد شد.

**جدول ۱: عمگرها و تعریف آنها**

| عملگر | تعریف |
|---|---|
| 1-1 Move | این عملگر دو گره را در نظر گرفته، سپس اولین گره را به بعد از دومین گره در مسیر می برد |
| 1-Exchange | این عملگر، دو گره را در نظر گرفته و سپس جای آنها را در مسیر، با هم عوض می‌کند |
| 2-Exchange | این عملگر، دو گره و پیشنیازهای هر کدام را در نظر گرفته و سپس جای گره اول و پیشنیاز آن را، با گره دوم و پیشنیاز آن عوض می‌کند |
| 2-Opt | این عملگر، دو گره و پس‌نیازهای هر کدام را، در نظر می‌گیرد. سپس کمانی که هر کدام از آن دو گره را به پس‌نیازهای آنها متصل می نماید حذف می‌کند. پس از آن، دو گره را به هم و پس‌نیازهای آنها را نیز به هم وصل کرده و در انتها جهت زنجیره‌ی بین گره اول و پس‌نیاز آن و همچنین گره دوم و پس‌نیاز آن را برعکس می‌سازد |

در جدول ۲ سه ترکیب مختلف از بکارگیری عملگرها در این تحقیق، به صورت تفضیلی بیان شده است.

**جدول ۲: ترکیب‌ها و تعریف آنها**

| ترکیب | تعریف |
|---|---|
| I | در این روش یک عدد تصادفی بین ۱ و ۴ تولید می شود. با توجه به عدد تولید شده، حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد:<br>-اگر عدد تولید شده ۱ باشد، 1-1 Move اجرا خواهد شد<br>-اگر عدد تولید شده ۲ باشد، 2-Opt اجرا خواهد شد<br>-اگر عدد تولید شده ۳ باشد، 1-Exchange اجرا خواهد شد<br>-اگر عدد تولید شده ۴ باشد، 2-Exchange اجرا خواهد شد |
| II | در این روش یک عدد تصادفی بین ۱ و ۴ تولید می شود. با توجه به عدد تولید شده، حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد:<br>-اگر عدد تولید شده، ۱ باشد، 1-Exchange اجرا خواهد شد<br>-اگر عدد تولید شده، ۲ باشد، به ترتیب 1-Exchange و 1-1 Move اجرا خواهند شد<br>-اگر عدد تولید شده، ۳ باشد، به ترتیب 1-Exchange، 1-1 Move و 2-Opt اجرا خواهند شد<br>-اگر عدد تولید شده، ۴ باشد، به ترتیب 1-Exchange، 1-1 Move، 2-Opt و 2-Exchange اجرا خواهند شد |
| III | در این ترکیب به ترتیب 1-Exchange، 1-1 Move، 2-Opt و 2-Exchange اجرا خواهند شد |

پس از هر بار بهبود مسیرها، الگوریتم با تولید یک عدد تصادفی بین ۱ و تعداد مکان‌های بالقوه، یک مکان را به عنوان دپو انتخاب می‌کند. حال الگوریتم به منظور بهبود تابع هدف به دنبال یک $W_{kq_k}$ می‌گردد که بیشترین مقدار در (۲۷) را داشته باشد.

### ۴-۳- به روزسانی جواب‌ها و بررسی شرایط پایان الگوریتم

متغیر $Z^{best}$ نشان‌دهنده‌ی بهترین جواب شناخته شده است. در ابتدای الگوریتم، این متغیر برابر با اولین مقدار تابع هدف محاسبه شده است؛ و در هر تکرار اگر جواب بهینه بهبود یافت ($Z^{new} > Z^{best}$)، مقدار این متغیر به روز خواهد شد ($Z^{best} = Z^{new}$).

در این مرحله شرط پایان الگوریتم بررسی خواهد شد. متغیر $l_{\max}$ نشان‌دهنده‌ی حداکثر تعداد دفعات اجرای جستجوی محلی است. اگر $l < l_{\max}$ باشد، الگوریتم به گام دوم باز می‌گردد و $l = l + 1$، در غیر اینصورت الگوریتم به گام چهارم خواهد رفت.

### ۴-۴- گام چهارم: نمایش جواب‌ها

در این مرحله، پس از ارضای شرایط پایان، الگوریتم به پایان رسیده و جواب‌ها به نمایش گذاشته می‌شود.

## ۵- آزمایشات محاسباتی

الگوریتم پیشنهادی در نرم‌افزار MATLAB 2012a پیاده‌سازی شده و در یک رایانه همراه با مشخصات، پردازشگر هفت هسته‌ای با سرعت ۲,۱ گیگاهرتز و حافظه‌ی جانبی ۶ گیگابایت به اجرا در آمده است. مدل پیشنهادی با استفاده از حل‌کننده‌ی CPLEX 12.2 حل شده است تا مبنایی برای مقایسه‌ی کارایی مدل و الگوریتم پیشنهادی باشد. در این بخش، نتایج محاسباتی مربوط به یک مجموعه از مسائل مکان‌یابی-مسیریابی ارائه خواهند شد. ۵۰ نقطه (گره) در بازار موجود است که از این بین، یک گره مربوط به محل مرکزی شرکت است که در مبدا مختصات واقع است و سایر نقاط به صورت تصادفی در صفحه پخش شده‌اند. همچنین، فاصله‌ی بین نقاط به صورت اقلیدسی در نظر گرفته شده است. کل بازار شامل ۳ منطقه می‌باشد که تعداد مشتریان در سه منطقه به ترتیب برابر با ۱۵، ۱۵ و ۱۹ است. همچنین تعداد مکان‌های بالقوه برای هر یک از مناطق به ترتیب برابر ۵، ۵ و ۷ است. همچنین مقادیر مربوط به پارامترهای تابع تقاضا عبارتنداز:

$$C_1 = \alpha_1 = 100, C_2 = \alpha_2 = 200, C_3 = \alpha_3 = 300, A_k = 2$$

نتایج عددی حاصل از حل مثال‌های عدی توسط الگوریتم و مدل پیشنهادی، در جدول ۳ آمده است. ستون «جواب دقیق» نشان‌دهنده‌ی جواب دقیق محاسبه شده توسط حل‌کننده‌ی CPLEX 12.2 است. و ستون «زمان»، مدت زمان حل توسط هر یک از روش‌ها را بیان می‌کند. ستون "RG" بیانگر خطای نسبی الگوریتم پیشنهادی است که از (۳۸) محاسبه می‌شود.

$$\text{RG} = \frac{|\text{جواب الگوریتم} - \text{جواب دقیق}|}{\text{جواب دقیق}} \qquad (۳۸)$$

**جدول ۳: نتایج عددی حاصل از حل مثال‌های عددی**

| مثال | مدل ریاضی | | الگوریتم پیشنهادی (نوع I) | | الگوریتم پیشنهادی (نوع II) | | الگوریتم پیشنهادی (نوع III) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | جواب دقیق | زمان (ثانیه) | RG | زمان (ثانیه) | RG | زمان (ثانیه) | RG | زمان (ثانیه) |
| ۱ | ۶۸۴.۲۹۵ | ۳۹۶.۵۵۳ | ۰.۰۰۶۹۶ | ۵.۳۹۱ | ۰.۰۱۶۶۷ | ۴.۱۷ | ۰.۰۱۸۵۲ | ۶.۳۰۱ |
| ۲ | ۱۱۷۴.۹۹۲ | ۱۶۵.۹۲۲ | ۰.۰۱۸۳ | ۵.۵۸ | ۰.۰۱۶۵۹ | ۴.۳۴۸ | ۰.۰۳۱۶۵ | ۶.۵۲۵ |
| ۳ | ۱۲۹۳.۳ | ۳۳۶.۴۰۵ | ۰.۰۰۵۳۷ | ۵.۴۶۳ | ۰.۰۰۳۹۴ | ۴.۳۷ | ۰.۰۰۳۳۲ | ۵.۲۸۲ |
| ۴ | ۹۱۶.۹۷۸ | ۳۱۰.۱۳۲ | ۰.۰۰۳۹ | ۵.۳۲۴ | ۰.۰۰۱۶۷ | ۴.۳۷۸ | ۰.۰۰۴۳۱ | ۵.۳۰۸ |
| ۵ | ۶۰۴.۸۷۳ | ۶۲۳.۶۲۶ | ۰.۰۴۸۳۹ | ۳.۹۷۹ | ۰.۰۲۴۰۴ | ۴.۴۴ | ۰.۰۳۰۷۷ | ۵.۳۷۷ |
| ۶ | ۹۳۰.۱۹۸ | ۲۳۹.۶۷۷ | ۰.۰۱۵۶۴ | ۳.۹۸۸ | ۰.۰۰۵۲ | ۴.۵۴ | ۰.۰۰۰۱۸ | ۵.۳۸ |
| ۷ | ۴۶۴.۶۵۲ | ۱۸۷.۶۳۶ | ۰.۰۲۶۵۵ | ۴.۰۴۱ | ۰.۰۲۶۵۵ | ۴.۴۸۱ | ۰.۰۲۶۵۵ | ۴.۴۸۶ |
| ۸ | ۱۰۷۴.۶۲۵ | ۳۰۷.۵۳۹ | ۰.۰۲۰۸۷ | ۴.۱۹ | ۰.۰۰۹۲۴ | ۴.۴۷۹ | ۰.۰۲۲۵۴ | ۵.۴۱۱ |
| ۹ | ۱۱۷۸.۲۲۹ | ۲۴۲.۵۰۳ | ۰.۰۰۹۷ | ۴.۰۵۳ | ۰.۰۱۱۳۱ | ۴.۳۴۳ | ۰.۰۰۹۷ | ۵.۳۸۴ |
| ۱۰ | ۶۷۱ | ۵۴۵.۴۷۱ | ۰.۰۹۴۶۵ | ۴.۱۷ | ۰.۰۲۲۴۵ | ۴.۲۸۵ | ۰.۰۱۶۰۸ | ۵.۶۴۷ |
| ۱۱ | ۲۹۹ | ۴۲۵.۵۲۵ | ۰.۰۷۹۱۶ | ۴.۱۴۵ | ۰.۰۷۹۱۶ | ۴.۱۹۹ | ۰.۱۰۱۳۲ | ۵.۵۶۵ |
| ۱۲ | ۸۷۹.۰۹۳ | ۲۵۱.۱۶۳ | ۰.۰۱۰۱۸ | ۴.۱۸۵ | ۰.۰۱۰۱۸ | ۴.۳۴۹ | ۰.۰۱۰۱۸ | ۵.۴۴ |
| ۱۳ | ۹۴۵.۲۱۶ | ۲۳۶.۷۲۲ | ۰.۰۳۲۲۸ | ۴.۱۵۴ | ۰.۰۱۹۶۶ | ۴.۱۹۸ | ۰.۰۱۱۵۹ | ۵.۵۱ |
| ۱۴ | ۱۳۱۵.۰۱۴ | ۵۵۹.۱۱۳ | ۰.۰۱۰۴۳ | ۴.۱۲۶ | ۰.۰۰۹۸۲ | ۴.۲۹۱ | ۰.۰۰۹۶۷ | ۵.۴۵۸ |
| ۱۵ | ۸۳۴.۰۲۳ | ۳۷۸.۹۷۶ | ۰.۰۱۷۵۷ | ۴.۱۰۹ | ۰.۰۰۴۰۲ | ۴.۳۰۴ | ۰.۰۱۱۱۴ | ۵.۴۶۹ |
| ۱۶ | ۵۷۸.۷۸۸ | ۲۲۴.۴۳۷ | ۰.۰۱۳۱۴ | ۴.۱ | ۰.۰۱۳۱۴ | ۴.۲۲ | ۰.۰۵۰۱۹ | ۵.۴۵۲ |
| ۱۷ | ۱۲۴۶.۱۱۵ | ۲۹۰.۰۹۶ | ۰.۰۱۳۴۱ | ۴.۰۴۱ | ۰.۰۰۷۸۸ | ۴.۲۸۲ | ۰.۰۰۷۵۶ | ۵.۴۷۵ |
| ۱۸ | ۴۷۰.۲۱۲ | ۲۴۵.۴۶۸ | ۰.۰۶۸۵۹ | ۴.۰۳۹ | ۰.۰۶۵۷۷ | ۴.۲۶۱ | ۰.۰۶۵۷۷ | ۵.۴۲۳ |
| ۱۹ | ۱۲۴۲.۴۷۳ | ۲۳۱.۰۰۸ | ۰.۰۳۶۶۸ | ۴.۲۰۲ | ۰.۰۱۴۷۱ | ۴.۳۱۸ | ۰.۰۱۹۸۶ | ۵.۴۸۲ |
| ۲۰ | ۹۳۲.۹۵۳ | ۳۶۷.۹۶۴ | ۰.۰۳۷۵۷ | ۴.۳۴۷ | ۰.۰۱۰۹۴ | ۴.۲۳۲ | ۰.۰۰۱۹۵ | ۵.۴۶۴ |
| ۲۱ | ۱۵۶۶.۷۲۲ | ۴۴۹.۴۰۸ | ۰.۰۱۵۰۸ | ۴.۴۷۲ | ۰.۰۰۹۶۵ | ۴.۲۹۳ | ۰.۰۰۹۶۵ | ۵.۷۳۷ |
| ۲۲ | ۸۱۷.۹۶۷ | ۲۶۵.۴۰۶ | ۰.۰۱۵۰۱ | ۴.۲۰۸ | ۰.۰۰۷۴۲ | ۴.۴۷۱ | ۰.۰۰۶۵۲ | ۵.۷۰۹ |
| ۲۳ | ۶۱۰.۱۹۹ | ۳۴۰.۴۹۳ | ۰.۰۲۹۶۷ | ۴.۳۵۹ | ۰.۰۱۹۰۹ | ۶.۴۰۶ | ۰.۰۲۸۴۹ | ۵.۶۲۵ |
| ۲۴ | ۱۵۶۹.۷۸۲ | ۲۳۸.۶۶۹ | ۰.۰۱۱۷۱ | ۴.۴۰۹ | ۰.۰۲۷۳۸ | ۵.۷۹۸ | ۰.۰۱۱۷۱ | ۵.۵۵۹ |
| ۲۵ | ۱۱۷۲.۶۸۲ | ۲۸۹.۳۳۲ | ۰.۰۲۳۶۱ | ۴.۳۳۴ | ۰.۰۲۳۷۸ | ۴.۴۶۵ | ۰.۰۱۷۵۵ | ۵.۶۴۱ |
| ۲۶ | ۴۴۸.۵۹۹ | ۳۷۸.۸۹۶ | ۰.۰۴۲۳۳ | ۴.۳۷۷ | ۰.۰۳۷۲۱ | ۵.۰۹۸ | ۰.۰۳۲۳۳ | ۵.۵۸۸ |
| ۲۷ | ۹۴۷.۸۱۳ | ۳۰۸.۶۸۶ | ۰.۰۳۰۲۷ | ۴.۳۰۲ | ۰.۰۰۰۰۸ | ۴.۴۷۵ | ۰.۰۰۳۸۴ | ۵.۳۸۸ |
| ۲۸ | ۷۲۷.۳۱۷ | ۴۷۹.۷۵۹ | ۰.۰۳۵۱۷ | ۴.۲۳۳ | ۰.۰۰۱۱۵ | ۴.۵۰۸ | ۰.۰۱۱۱۹ | ۵.۷۱۹ |
| ۲۹ | ۱۳۱۷.۱۴۲ | ۱۰۰۱.۲۵۳ | ۰.۰۱۱۴۲ | ۴.۲۲ | ۰.۰۰۰۸۷ | ۴.۶۸۹ | ۰.۰۰۱۵۵ | ۵.۸۳ |
| ۳۰ | ۸۸۰.۹۶ | ۶۱۰.۶۶۳ | ۰.۰۰۴۷۷ | ۴.۱۷ | ۰.۰۰۴۷۷ | ۴.۶۲۷ | ۰.۰۰۴۷۷ | ۵.۸۷۱۳ |
| میانگین | | | ۰.۰۲۶۲۸ | | ۰.۰۱۶۸۱ | | ۰.۰۱۹۳۵ | |

آزمون فرض (جفتی) آماری به منظور تحلیل نتایج و مقایسه‌ی مدل و الگوریتم پیشنهادی در سطح معنی‌داری ۰٫۰۵بکار گرفته شده‌اند. آزمون‌های انجام شده در نرم‌افزار MINITAB 16 انجام شده‌اند. نتایج حاصل از آزمون فرض‌های جفتی در جدول ۴ آمده است. میانگین خطای نسبی در تمام مثال‌های حل شده، برای هر یک از سه ترکیب پیشنهادی، به ترتیب برابر با ۰٫۰۲۶۲۸،۰٫۰۱۶۸۱ و ۰٫۰۱۹۳۵ است که بیانگر عملکرد خوب الگوریتم در محاسبه‌ی جواب‌ها است. مقادیر میانگین خطای نسبی و همچنین نتایج آزمون‌های فرض آماری نشان‌دهنده‌ی برتری نسبی ترکیب II بر ترکیب III و I و همچنین برتری ترکیب III بر I است. براساس نتایج، واضح است که اگر تصمیم گیرنده عامل زمان را به عنوان فاکتور کلیدی انتخاب، در نظر بگیرد، ترکیب II و I بر ترکیب III و مدل پیشنهادی برتری دارد.

## ۶- نتیجه و جمع‌بندی

این تحقیق به بررسی مساله‌ی مکان‌یابی-مسیریابی به همراه قیمت‌گذاری منطقه‌ای پرداخته که در آن یک شرکت به دنبال تصمیم-گیری در مورد مکان بهینه‌ی دپو، مسیر بهینه‌ی وسیله‌ی نقلیه و قیمت محصولات در هر منطقه با هدف بیشینه‌سازی سود خود می‌باشد.

**جدول ۴: خروجی‌های نرم‌افزار MINITAB: نتایج آزمون‌های فرض (جفتی) آماری**

| فرض صفر | P-value |
|---|---|
| زمان حل الگوریتم (نوع I) کمتر یا مساوی مدل | ۱،۰۰۰ |
| زمان حل الگوریتم (نوع II) کمتر یا مساوی مدل | ۱،۰۰۰ |
| زمان حل الگوریتم (نوع III) کمتر یا مساوی مدل | ۱،۰۰۰ |
| زمان حل الگوریتم نوع II کمتر یا مساوی الگوریتم نوع I | ۰،۱۰۸ |
| زمان حل الگوریتم نوع II کمتر یا مساوی الگوریتم نوع III | ۱،۰۰۰ |
| زمان حل الگوریتم نوع I کمتر یا مساوی الگوریتم نوع III | ۱،۰۰۰ |
| خطای نسبی الگوریتم نوع II کمتر یا مساوی نوع I | ۰،۹۹۸ |
| خطای نسبی الگوریتم نوع II کمتر یا مساوی نوع III | ۰،۹۱۱ |
| خطای نسبی الگوریتم نوع I کمتر یا مساوی نوع III | ۰،۰۳۱ |

جهت مقایسه‌ی عملکرد مدل و الگوریتم پیشنهادی، تعدادی آزمون-های فرض جفتی بر روی نتایج حاصل از حل مثال‌های عددی انجام شده که برتری نسبی الگوریتم بر مدل پیشنهادی را نشان می‌دهد.

همچنین سه ترکیب مختلف برای انجام جستجوی محلی پیشنهاد شده است که براساس تحلیل‌های انجام گرفته، ترکیب پیشنهادی دوم، دارای کمترین مقدار خطای نسبی می‌باشد. در نتیجه، با توجه به ۳۰ مثال عددی تولید شده، عملکرد الگوریتم از لحاظ صحت و دقت، قابل پذیرش بوده و این الگوریتم می تواند به طرز کارایی برای حل مثال‌های بزرگ مورد استفاده قرار گیرد.

به عنوان پیشنهاداتی برای تحقیقات آینده، می توان مساله مکان-یابی-مسیریابی به همراه قیمت‌گذاری منطقه‌ای را در موقعیت رقابتی در نظر گرفت. در این حالت شرکت مذکور به دنبال ورود به بازاری است که تعدادی شرکت در آن حضور دارند و این شرکت باید قیمت، دپو و مسیر بهینه را در هر منطقه تعیین نماید. موضوع دیگری که می‌تواند عنوانی برای تحقیقات آتی به شمار آید، ارائه‌ی مدل‌هایی است که بتوانند قیمت کالاها را براساس کیفیت آنها تعیین نمایند.

## ۷- مراجع


[۱] Christian, R. C., " Physical distribution: key to improved volume and profits", Journal of Marketing, No, 29, pp. 65-70, 1965.

[۲] Phlips, L., *The economics of price discrimination*, Cambridge University Press, 1983.

[۳] Lin, C., Chow, C. & Chen, A., "A location-routing-loading problem for bill delivery services". Computers & Industrial Engineering, No, 43, pp. 5-25, 2002.

[۴] Lee, Y., Kim, S.-I., Lee, S. & Kang, K., "A location-routing problem in designing optical internet access with WDM systems", Photonic Network Communications, No, 6, pp. 151-160, 2003.

[۵] Billionnet, A., Elloumi, S. & Grouz djerbi, L., "Designing radio-mobile access networks based on synchronous digital hierarchy rings", Computers & Operations Research, No, 32, pp. 379-394, 2005.

[۶] Tuzun, D. & Burke, L. I., "A two-phase tabu search approach to the location routing problem", European Journal of Operational Research, No, 116, pp. 87-99, 1999.

[۷] Hansen, P., Peeters, D. & Thisse, J.-F., "The profit-maximizing Weber problem. Location", Science, No, 3, pp. 67-85, 1995.

[۸] Aboolian, R., Berman, O. & Krass, D., "Optimizing pricing and location decisions for competitive service facilities charging uniform price", Journal of the Operational Research Society, No, 59, pp. 1506-1519, 2008.

[۹] Abouee-mehrizi, H., Babri, S., Berman, O. & Shavandi, H., "Optimizing capacity, pricing and location decisions on a congested network with balking", Mathematical Methods of Operations Research, No, 74, pp. 233-255, 2011.

[۱۰] Hurter JR, A. P. & Lederer, P. J., "Spatial duopoly with discriminatory pricing", Regional Science and Urban Economics, No, 15, pp. 541-553, 1985.

[۱۱] Hamilton, J. H., Thisse, J.-F. & Weskamp, A., "Spatial discrimination: Bertrand vs. Cournot in a model of location choice", Regional Science and Urban Economics, No, 19, pp. 87-102, 1989.

[۱۲] Panin, A. A., Pashchenko, M. & Plyasunov, A. V., "Bilevel competitive facility location and pricing problems", Automation and Remote Control, No, 75, pp. 715-727, 2014.

[۱۳] Dasci, A. & Laporte, G., "Location and pricing decisions of a multistore monopoly in a spatial market", Journal of Regional Science, No, 44, pp. 489-515, 2004.

[۱۴] Perez, M. D. G., Hernández, P. F. & Pelegrín, B. P., "On price competition in location-price models with spatially separated markets", Top, No, 12, pp. 351-374, 2004.

[۱۵] Hansen, P., Peeters, D. &Thisse, J. F., "Facility location under zone pricing", Journal of Regional Science, No, 37, pp. 1-22, 1997.

[۱۶] Aras, N., Aksen, D. & Tuğrul tekin, M., "Selective multi-depot vehicle routing problem with pricing", Transportation Research Part C: Emerging Technologies, No, 19, pp. 866-884, 2011.

[۱۷] Wong, R. T., "Integer programming formulations of the traveling salesman problem", *Proceedings of the IEEE international conference of circuits and computers*, pp. 149-152, 1980.

[۱۸] Clarke, G. U. & Wright, J. W., "Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points", Operations Research, No, 12, pp. 568-581, 1964.