میدان مغناطیسی حاصل از یک سلنوئید کروی

محمدرضا امانی و سپند علی مدد سلطانی

دکتر هادی علی اکبریان

مقدمه

یک سلنوئید کروی شامل حلقه های حامل جریان است که به صورت موازی با هم بر روی یک مغزی کروی پیچیده شده اند. برای محاسبه میدان مغناطیسی حاصل کل سلنوئید در یک نقطه ی دلخواه باید میدان مغناطیسی حاصل از تک تک حلقه ها را محاسبه نموده و سپس با برایندگیری از آن ها میدان کل در آن نقطه محاسبه می شود.

محاسبه میدان حاصل از یک حلقه

کافی است میدان حاصل از یک حلقه که محور آن بر روی z و مرکز آن به ارتفاع z_0 از مبدأ است را با استفاده از قانون بیو ساوار محاسبه کرد.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\overrightarrow{dl} \times \vec{R}}{|R|^3}$$

می توان دریافت که شعاع حلقه (b) با ارتفاع آن رابطه زیر را دارد:

$$b = \sqrt{B^2 - z_0^2}$$

المان dl را از حلقه انتخاب می کنیم.

$$\overrightarrow{dl} = b d\varphi' \hat{a}_\varphi$$

$$\overrightarrow{dl} = (-b \sin(\varphi)\, \hat{a}_x + b \cos(\varphi) \hat{a}_y) d\varphi'$$

بردار مکان r که فاصله ی نقطه ی مورد نظر $P(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ از مبدا مختصات برای محاسبه میدان می باشد.

$$\vec{r} = r_. \hat{a}_r + \theta_. \hat{a}_\theta + \varphi_. \hat{a}_\varphi$$

$$\vec{r} = r_. \sin(\theta_.)\cos(\varphi_.)\,\hat{a}_x + r_. \sin(\theta_.)\cos(\varphi_.)\,\hat{a}_y + r_. \cos(\theta_.)\,\hat{a}_z$$

بردار مکان r' نشان دهنده فاصله المان dl ازمبدأ مختصات می باشد.

$$\overrightarrow{r'} = b\hat{a}_\rho + \theta\hat{a}_\theta + z_. \hat{a}_z$$

$$\overrightarrow{r'} = \sqrt{B^۲ - z_.^۲}\cos(\varphi')\,\hat{a}_x + \sqrt{B^۲ - z_.^۲}\sin(\varphi')\,\hat{a}_y + z_. \hat{a}_z$$

با تفریق $\vec{r}$ و $\overrightarrow{r'}$ از هم به $\vec{R}$ یعنی فاصله $P(r_., \theta_., \varphi_.)$ تا المان حلقه می رسیم.

$$\vec{R} = \vec{r} - \overrightarrow{r'}$$

$$\begin{aligned}\vec{R} = {} & \left(r_. \sin(\theta_.)\cos(\varphi_.) - \sqrt{B^۲ - z_.^۲}\cos(\varphi')\right)\hat{a}_x + \\ & \left(r_. \sin(\theta_.)\sin(\varphi_.) - \sqrt{B^۲ - z_.^۲}\sin(\varphi')\right)\hat{a}_y + \\ & \left(r_. \cos(\theta_.) - z_.\right)\hat{a}_z\end{aligned}$$

$$|R| = \sqrt{\left(r_. \sin(\theta_.)\cos(\varphi_.) - \sqrt{B^۲ - z_.^۲}\cos(\varphi')\right)^۲ + \left(r_. \sin(\theta_.)\sin(\varphi_.) - \sqrt{B^۲ - z_.^۲}\sin(\varphi')\right)^۲ + \left(r_. \cos(\theta_.) - z_.\right)^۲}$$

با ضرب خارجی $\vec{R}$ و $\overrightarrow{dl}$ به دست می آید که:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dl} \times \vec{R} = {} & -\cos(\varphi')\sqrt{B^۲ - z_.^۲}(z_. - r_. \cos(\theta_.))d\varphi' \quad \hat{a}_x + \\ & -\sin(\varphi')\sqrt{B^۲ - z_.^۲}(z_. - r_. \cos(\theta_.))d\varphi' \quad \hat{a}_y + \\ & \left(-\cos(\varphi_. - \varphi')\, r_. \sin(\theta_.)\sqrt{B^۲ - z_.^۲} + B^۲ - z_.^۲\right)d\varphi' \quad \hat{a}_z\end{aligned}$$

با جایگذاری روابط به دسته آمده در قانون بیو ساوار میدان مغناطیسی در نقطه حاصل از یک حلقه با ارتفاع $z_.$ به دست می آید.

$$\vec{B}_x =$$

$$\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\frac{-\cos(\varphi')\sqrt{B^2-z_\circ^2}(z_\circ - r_\circ\cos(\theta_\circ))d\varphi'}{\left((r_\circ\sin(\theta_\circ)\cos(\varphi_\circ)-\sqrt{B^2-z_\circ^2}\cos(\varphi'))^2+(r_\circ\sin(\theta_\circ)\sin(\varphi_\circ)-\sqrt{B^2-z_\circ^2}\sin(\varphi'))^2+(r_\circ\cos(\theta_\circ)-z_\circ)^2\right)^{3/2}}\hat{a}_x$$

$$\vec{B}_y =$$

$$\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\frac{-\sin(\varphi')\sqrt{B^2-z_\circ^2}(z_\circ - r_\circ\cos(\theta_\circ))d\varphi'}{\left((r_\circ\sin(\theta_\circ)\cos(\varphi_\circ)-\sqrt{B^2-z_\circ^2}\cos(\varphi'))^2+(r_\circ\sin(\theta_\circ)\sin(\varphi_\circ)-\sqrt{B^2-z_\circ^2}\sin(\varphi'))^2+(r_\circ\cos(\theta_\circ)-z_\circ)^2\right)^{3/2}}\hat{a}_y$$

$$\vec{B}_z =$$

$$\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\int_\circ^{2\pi}\frac{(-\cos(\varphi_\circ-\varphi')\,r_\circ\sin(\theta_\circ)\sqrt{B^2-z_\circ^2}+B^2-z_\circ^2)\,d\varphi'}{\left((r_\circ\sin(\theta_\circ)\cos(\varphi_\circ)-\sqrt{B^2-z_\circ^2}\cos(\varphi'))^2+(r_\circ\sin(\theta_\circ)\sin(\varphi_\circ)-\sqrt{B^2-z_\circ^2}\sin(\varphi'))^2+(r_\circ\cos(\theta_\circ)-z_\circ)^2\right)^{3/2}}\hat{a}_z$$

تعمیم به کل حلقه ها

اگر مرکز سلنوئید کروی به شعاع B بر روی مبدأ مختصات باشد، ارتفاع مرکز حلقه ها $(z_\circ)$ بین $-B$ و B می باشد.

$$-B < z_\circ < B$$

حال اگر قطر کره را n قسمت (تعداد حلقه ها) به صورت مساوی تقسیم کنیم ارتفاع هر حلقه را می توان از رابطه ی زیر به دست آورد:

$$z_{\circ_i} = B - i\left(\frac{2B}{n}\right)$$

$$i = 1,2,3,\dots,n$$

$$z_{\circ_i} = B - i\left(\frac{2B}{n}\right)$$

$$\vec{B}_{x_{total}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{B}_x(z_{\circ_i})$$

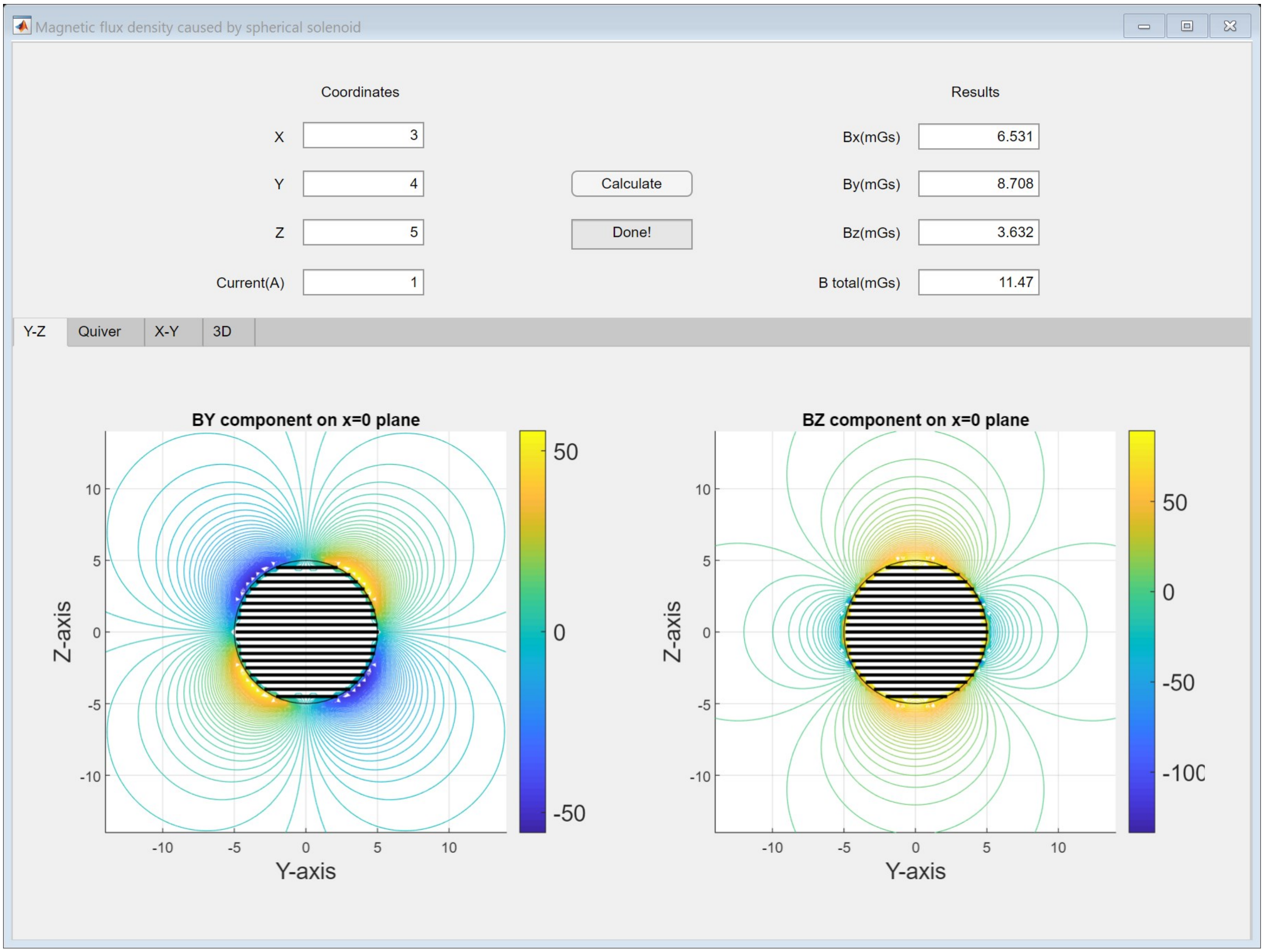
$$\vec{B}_{y_{total}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{B}_y(z_{\circ_i})$$

$$\vec{B}_{z_{total}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{B}_z(z_{\circ_i})$$

مثال: به دست آوردن میدان برای مختصات $P(۳,۴,۵)$ و جریان ثابت $I = ۱$ توسط برنامه که حاصل آن برابر:

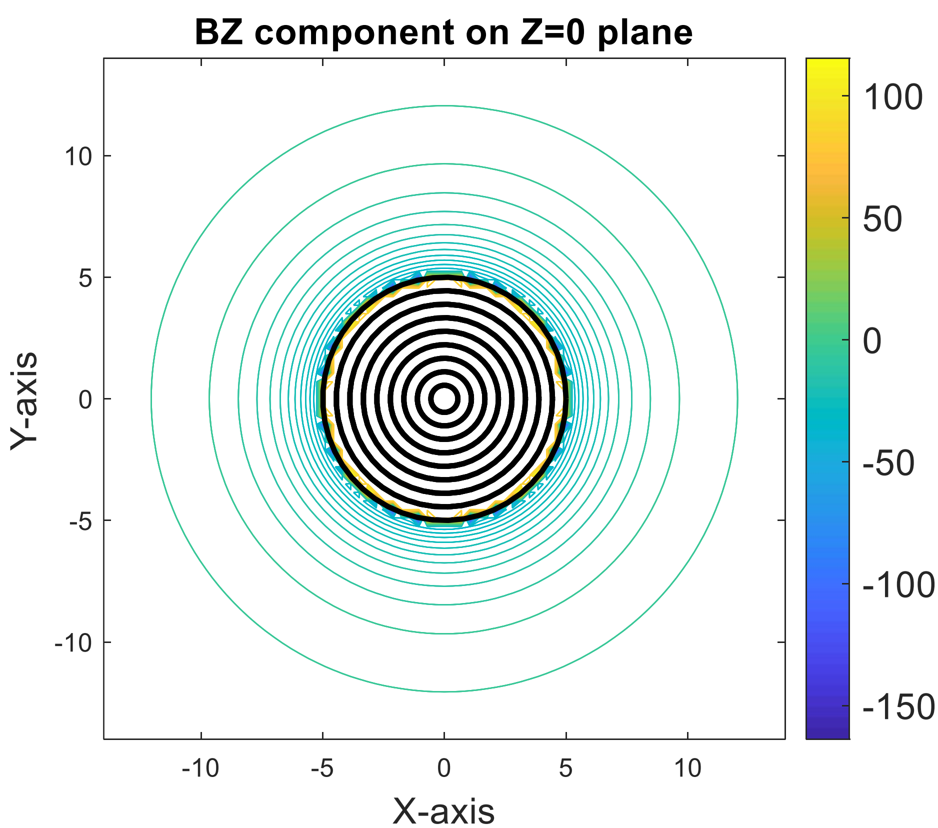
$$\vec{B} = ۶.۵۳۱\ \hat{a}_x + ۸.۷۰۸\ \hat{a}_y + ۳.۶۳۲\ \hat{a}_z\ mG$$

و برایند کل آن برابر $B_t = ۱۱.۴۷\ mG$ است.

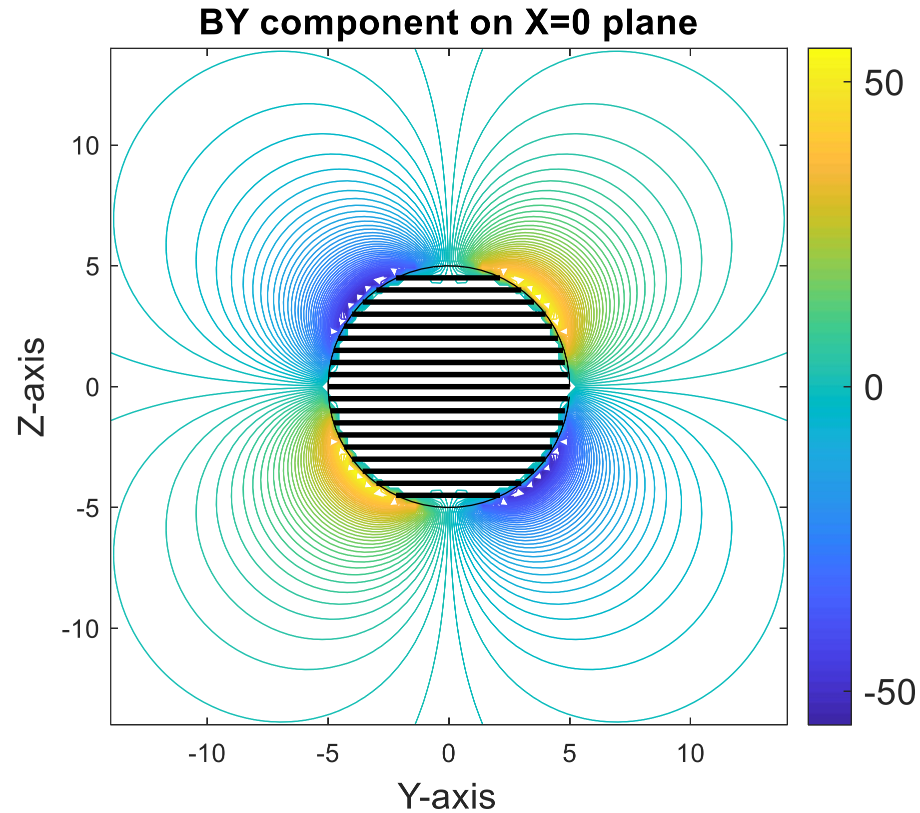


اشکال ۱ و ۲ و ۳ با استفاده از تابع تراز (contour) رسم شده اند. به طور مثال در شکل-۳، بین مقدار ماکزیمم و مینیمم مولفه BZ میدان ۱۰۰ سطح به فواصل مساوی تعیین شده اند (در این جا حدوداً بین ۱۲۰- تا ۷۰). حال با مقایسه ی تمامی مقادیر BZ بر روی صفحه مورد نظر با تقسیم بندی انجام شده، داده ها را سطح بندی می کنیم. هر خط نشان دهنده داده های موجود در همان سطوح ذکر شده می باشد که رنگ آن نشان دهنده مقدار میدان در آن نقاط است.

برای رسم نمودار contour مشابه با مثال ذکر شده در صفحه‌ی $x = a$ کافی است "۰" موجود در خط ۲۳ برنامه YZ_Plane_Graph.m و یا برای صفحه ی $z = a$ "۰" موجود در خط ۱۹ برنامه ی XY_Plane_Graph.m را به a دلخواه تغییر داد. *※ توجه: این برنامه ها به علت محاسبات بسیار زیاد ممکن است چندین ساعت به طول انجامند.※*

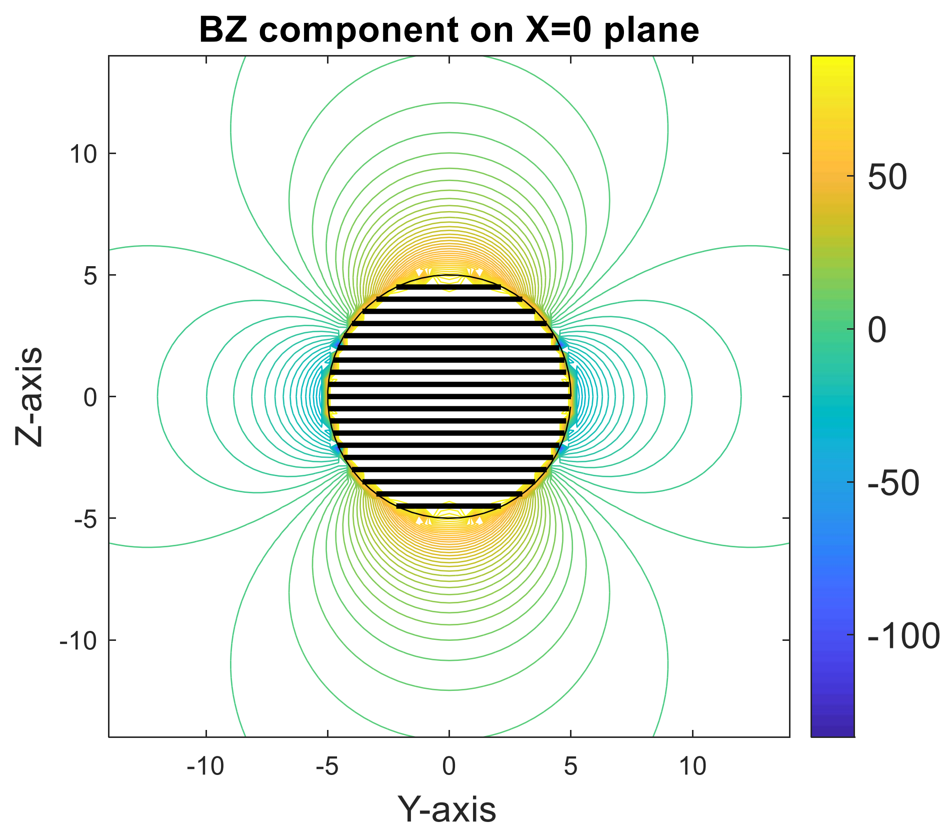


شکل-۱



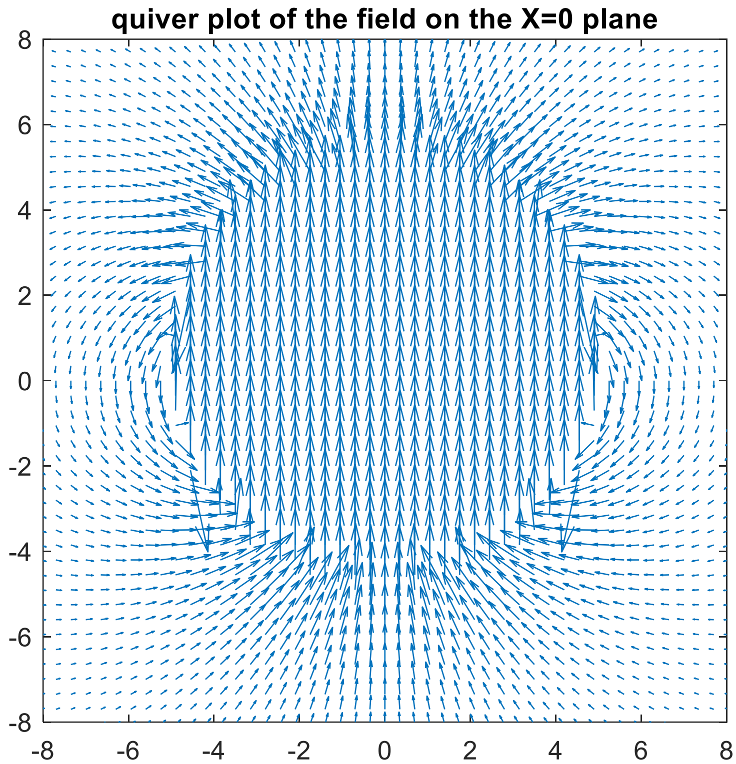
BY component on X=0 plane
Z-axis
Y-axis
10
5
0
-5
-10
50
-50

شکل-۲



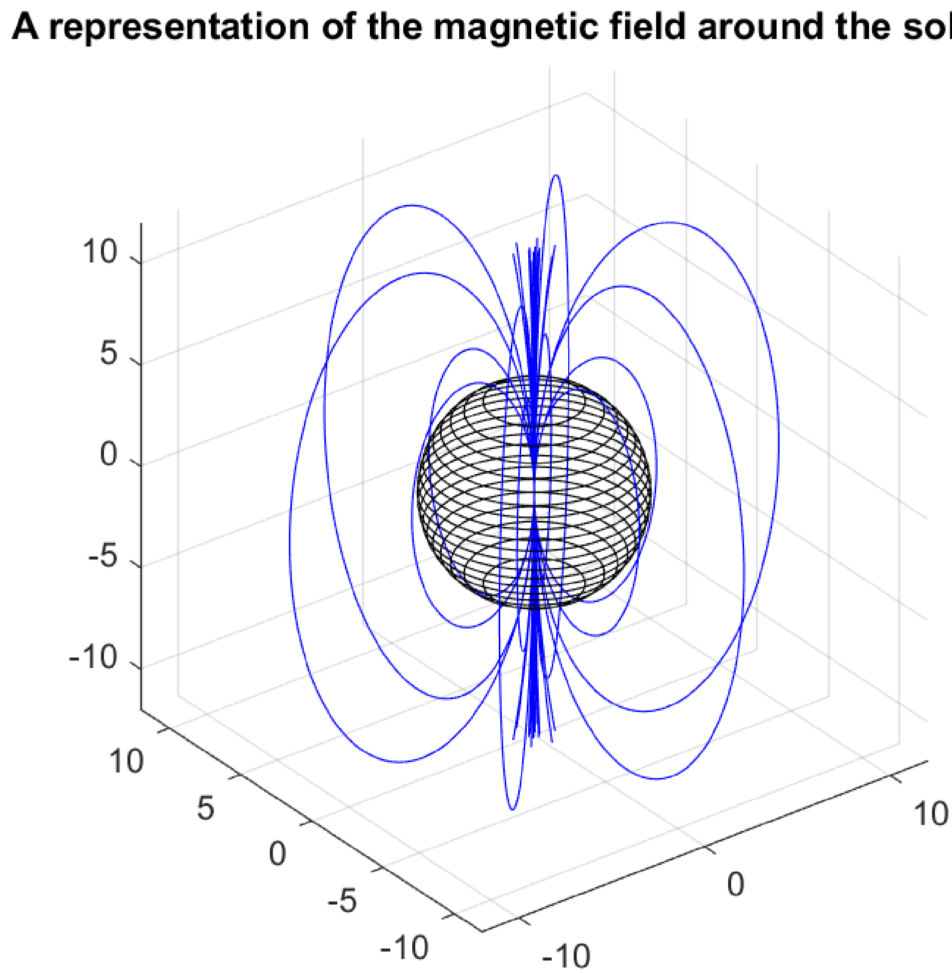
BZ component on X=0 plane
Z-axis
Y-axis
10
5
0
-5
-10
50
-50
-100

شکل-۳



شکل-۴

شکل-۴ نشان دهنده تابع سرعت (quiver) مولفه های BY و BZ در صفحه x=۰ می باشد. رسم این شکل برای صفحات دیگر x قبلا توضیح داده شد.(با تغییر در YZ_Plane_Graph.m)



شکل-۵

شکل-۵ فقط نشان دهنده شکل حدودی میدان پیرامون سلنوئید می باشد و مجزا از داده های برنامه اصلی است.