دانشکده مهندسی کامپیوتر
گروه معماری

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

محاسبات عددی

میان ترم

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس : رسول دلیرروی فرد

تاریخ : ۱۴۰۳/۹/۳
وقت : ۱۰۰ دقیقه

فقط از ۱۰ سؤال ذیل به ۵ سؤال پاسخ دهید

۱- می‌خواهیم مقدار تقریبی $\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{2}$ را با محاسبات میانی ۴ رقم اعشار تعیین کنیم. حاصل جمع تقریبی و مقدار خطای مطلق آن چقدر است؟ بر اساس خطای مطلق بدست آمده نتیجه جمع از چه دقتی برخوردار است؟ خطای نسبی و درصد حاصل جمع را تعیین کنید.

۲- نسبت خطای نسبی دو فرمول $f_1(x,y)=\sqrt{x+y}$, $f_2(x,y)=(x+y)^2$ در هر نقطه (x,y) چیست؟

۳- تعداد ریشه معادله $f(x)=x^4-x+\sin(x)=0$ را در صفحه مختصات مختلط واقع در دایره $|z|=2$ تعیین کنید.

بسط تیلور تابع سینوس چنین است : $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\ldots$

۴- با استفاده از روش نیوتن- رافسون، معادله $f(x)=x^4-x+\sin(x)=0$ را با نقطه شروع $x_0=0/5$ و با دقت ۱ رقم اعشار حل کنید.

۵- چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x)=\sin^2(\frac{\pi}{2}x)$ را در نقاط $x=0,1,2$ ، با استفاده از روش لاگرانژ بیابید و کران خطایی برای آن تعیین کنید.

۶- ارتباط مشتق دوم با خطایی از مرتبه h^3 چیست؟ (**لازم نیست که این رابطه برحسب y_i ها تعیین شود**) سپس برای تابع $f(x)=\sin^2(\frac{\pi}{2}x)$ و نقاط $x_1=0, x_2=0/5, x_3=1, x_4=1/5, x_5=2$ و رابطه‌ای که در اینجا بدست آورده‌اید، مشتق دوم را در نقطه $x_1=0$ تعیین کنید.

۷- جواب تقریبی معادله دیفرانسیل $y'=\frac{1}{x+y}$ را با شرایط اولیه $y(0)=1$ و با نرخ رشد $h=0/1$ در بازه $[0,0/5]$ بر اساس روش اویلر ساده تعیین کنید.

۸- جواب تقریبی معادله دیفرانسیل $y''=xy$ را با شرایط اولیه $y(0)=1, y'(0)=-1$ و با نرخ رشد $h=0/5$ بر اساس روش اویلر نقطه وسط تعیین کرده و مقدار $y(1)$ را بدست آورید.

۹- انتگرال $\int_2^3 \frac{1}{x-1}dx$ را با روش سیمسون مرکب و با دقت دو رقم اعشار تقریب بزنید. سپس کران خطا را بدست آورید.

۱۰- قاعده انتگرال گیری ذیل را در نظر بگیرید :

$$\int_0^{6a} f(x)dx \simeq \omega_1 f(a)+\omega_2 f(3a)+\omega_3 f(5a)$$

که در آن a عددی ثابت و معلوم است.

الف- مطلوبست محاسبه ω_i ها .

ب- آیا این فرمول برای چندجمله‌ایهای درجه ۳ نیز صادق است؟

موفق باشید

روش نیوتن- رافسون معمولی : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

روابط درونیابی لاگرانژ :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i \quad , \quad L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad , \quad i = 0,1,\ldots,n$$

$$E(x) = \frac{\phi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon) \quad , \quad \phi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

روابط میان اپراتور تفاضل مستقیم و مشتق:

$$\Delta = hD + \frac{h^2}{2!}D^2 + \frac{h^3}{3!}D^3 + \ldots \, , \quad D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - + \ldots\right)$$

روش اویلر ساده برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول :

$$y' = f(x,y) \rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

روش اویلر نقطه وسط برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول :

$$y' = f(x,y) \rightarrow y_{i+0.5} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \quad , \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+0.5}, y_{i+0.5})$$

روش انتگرال گیری سیمسون مرکب :

$$A = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad ,$$

$$E = -\frac{(\Delta x)^5}{180} n\, f^{(4)}(\varepsilon)$$