دانشکده مهندسی کامپیوتر
گروه معماری

تاریخ: ۱۴۰۳/۱۰/۳۰
وقت : ۲ ساعت

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

# محاسبات عددی

## پایان ترم

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس : رسول دلیرروی فرد

## فقط از ۱۰ سؤال ذیل به ۶ سؤال پاسخ دهید

۱ – با استفاده از روش حذفی گوس- جردن، بر حسب مقادیر مختلف $a$، در وجود یا عدم جواب دستگاه معادلات مقابل بحث کنید و درصورت وجود جواب، آن را بدست آورید.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + ax_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = -3 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

۲- با استفاده از روش گرادیان مزدوج، دستگاه معادلات خطی مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

**یک مرحله کافی است.(مرحله ۱)** نقطه شروع $(0,1,0)$ را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & a \\ 2 & 3 & a \\ 2 & a & 3 \end{bmatrix}$$

۳- در صورت امکان ماتریس $A$ را با روش کروت بصورت LU تجزیه کنید.

۴- با استفاده از روش Leverrier-Faddeev، معادله مشخصه، دترمینان، معکوس ماتریس و عدد شرطی ماتریس $A$ بر اساس نرم بینهایت به ازای $a = 5$ بدست آورید.

۵- با استفاده از روش نیوتن- رافسون برای تعیین جواب دستگاه معادلات غیر خطی مقابل کدامیک از نقاط شروع $x_1 = 0/8,\ x_2 = 0/4$ یا $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مناسب است؟چرا؟ سپس با نقطه شروع مناسب تعیین شده و با **محاسبات میانی ٤ رقم اعشار**، جواب این دستگاه را بدست آورید.
**۳ مرحله کافی است.** پس از ۳ مرحله در مورد دقت نتیجه بدست آمده چه می‌توان گفت؟

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 2 \\ \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = -1 \end{cases}$$

۶- با استفاده از روش تندترین شیب و دستگاه معادلات سوال ۵ را با نقطه شروع $x_1 = 0/8\ ,\ x_2 = 0/4$ حل کنید. **یک مرحله کافی است.** آیا به دقت خاصی رسیده اید؟چرا؟

۷- بهترین برازش کمترین توانهای دوم تابع $y = ax + \frac{b}{x}$ را نسبت به مجموعه نقاط $(-1,-3)$ و $(0/5,0)$ و $(1,2)$ بیابید. سپس مجموع مربعات خطای وزن داده شده را بدست آورید.

۸- تابع $y = \frac{1}{ax^2 + b}$ را نسبت به داده $(0,-1)$ ، $(\sqrt{2},1)$ ، $(1/5,0/8)$ برازش حداقل مربعات کرده ، بطوریکه وزن نقطه $x = 1/5$ برابر ۲ باشد.

۹- با استفاده از روش سیمپلکس ، تابع $f = x_1 + 3x_2 + 8x_3$ را نسبت به شرایط مقابل ماکزیمم کنید. سپس دوگان مسئله را تعریف کرده و جواب آن را ارائه کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 100 \\ 5x_1 + 8x_3 \le 400 \\ \forall x_i \ge 0 \end{cases}$$

۱۰- تابع $f = x^2 + y^2 + z^2$ را نسبت به قید $xy + yz = 100$ بهینه سازی کنید. این مقدار کمینه است یا بیشینه؟ چرا؟

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ۱۳۰۷

مدرس : رسول دلیرروی فرد

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

# محاسبات عددی

پایان ترم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گروه معماری

تاریخ: ۱۴۰۳/۱۰/۳۰

وقت : ۲ ساعت

روابط روش گرادیان مزدوج برای Ax=b :

مرحله صفر : $C = C^{-1} = I\ ,\ r^{(0)} = b - Ax^{(0)}\ ,\ w = C^{-1}r^{(0)}\ ,\ v^{(1)} = C^{-t}w\ ,\ \alpha = \langle w, w\rangle$

مرحله kام :

$$\begin{cases} ۱)\ u = Av^{(k)} \rightarrow t_k = \dfrac{\alpha}{\langle v^{(k)}, u\rangle} \Rightarrow x^{(k)} = x^{(k-1)} + t_k v^{(k)} \\ ۲)\ r^{(k)} = r^{(k-1)} - t_k u \rightarrow w = C^{-1}r^{(k)} \rightarrow \beta = \langle w, w\rangle \rightarrow s_k = \dfrac{\beta}{\alpha} \rightarrow \\ \qquad v^{(k+1)} = C^{-t}w + s_k v^{(k)} \\ ۳)\ \alpha = \beta \end{cases}$$

روابط روش کروت : $u_{ii} = ۱ : i = ۱,۲,\dots,n\ ,\ l_{i۱} = a_{i۱} : i = ۱,۲,\dots,n\ ,\ u_{۱j} = \dfrac{a_{۱j}}{l_{۱۱}} : j = ۲,\dots,n$

$$l_{im} = a_{im} - \sum_{k=۱}^{m-۱} l_{ik}u_{km} : i = m,\dots,n\ ,\ u_{mj} = \frac{a_{mj} - \sum_{k=۱}^{m-۱} l_{mk}u_{kj}}{l_{mm}} : j = m+۱,\dots,n$$

روابط روش Leverrier-Faddeev:

$$A_۱ = A \rightarrow p_۱ = \frac{۱}{۱}tr(A_۱)\ ,\ A_۲ = A(A_۱ - p_۱I) \rightarrow p_۲ = \frac{۱}{۲}tr(A_۲)$$

$$A_n = A(A_{n-۱} - p_{n-۱}I) \rightarrow p_n = \frac{۱}{n}tr(A_n)$$

نرم بینهایت ماتریس : $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|$

روابط روش نیوتن-رافسون :

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h_n \dfrac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + k_n \dfrac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} = -f(x_n, y_n) \\ h_n \dfrac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial x} + k_n \dfrac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial y} = -g(x_n, y_n) \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n + h_n\ ,\ y_{n+1} = y_n + k_n$$

روابط تندترین شیب

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \rightarrow g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2\ ,\ F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \hat{\alpha}z\ :\ z = \frac{\nabla g(x^{(k-1)})}{\|\nabla g(x^{(k-1)})\|}\ ,\ \nabla g = 2J^TF\ ,\ h(\alpha) = g\left(x^{(k-1)} - \alpha z\right)$$

$$h(\alpha) = h_۱ + (h_۲ - h_۱)\left(\frac{\alpha}{\alpha_۲ - \alpha_۱}\right) + \frac{h_۳ - ۲h_۲ + h_۱}{۲}\left(\frac{\alpha}{\alpha_۲ - \alpha_۱}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha_۲ - \alpha_۱} - ۱\right)$$