پاسخ تمرین سری اول

۱- مسئله ۱ از فصل ۱

$$(\pi\sqrt{5}, 7/026) \rightarrow Q - Q_1 = \pi\sqrt{5} - 7/026 \simeq -0/0012 \;,\; \frac{Q-Q_1}{Q} \simeq -1/69\times 10^{-4} \;,\; \frac{Q-Q_1}{Q}\times 100 \simeq -0/017\%$$

$$(\frac{\pi}{\sqrt{5}}, 1/404) \rightarrow Q - Q_1 = \frac{\pi}{\sqrt{5}} - 1/404 \simeq 9/63\times 10^{-4} \;,\; \frac{Q-Q_1}{Q} = 6/85\times 10^{-4} \;,\; \frac{Q-Q_1}{Q}\times 100 = 0/069\%$$

۲- مسئله ۲۰ از فصل ۱

$$f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ldots \rightarrow E = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$x = \frac{\pi}{11} \;,\; \varepsilon = 10^{-4} \rightarrow |E| \le 10^{-4} \rightarrow \frac{(\frac{\pi}{11})^{2n+2}}{(2n+2)!} \le 10^{-4} \rightarrow n \ge 2$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{5} \;,\; \varepsilon = 10^{-4} \rightarrow |E| \le 10^{-4} \rightarrow \frac{(\frac{\sqrt{2}}{5})^{2n+2}}{(2n+2)!} \le 10^{-4} \rightarrow n \ge 2$$

چون خطای مطلق کمتراز 10^{-4} است، و دقت سه رقم اعشار بوده ، محاسبات میانی را با ۴ رقم اعشار باید انجام داد ولی در این تعداد دقت خطا کم خواهد بود و لذا محاسبات میانی را با ۵ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$\cos(\frac{\pi}{11}) \simeq 1 - \frac{(\frac{\pi}{11})^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{11})^4}{4!} = 1 - 0/04078 + 0/00028 = 0/9595$$

$$\cos(\frac{\sqrt{2}}{5}) \simeq 1 - \frac{(\frac{\sqrt{2}}{5})^2}{2!} + \frac{(\frac{\sqrt{2}}{5})^4}{4!} = 1 - 0/04 + 0/003 = 0/9603$$

۳- مسئله ۱۴ از فصل ۲

الف-

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)}{2f'(x)}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 \rightarrow$$

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} - \frac{f'''(x)f'(x) - [f''(x)]^2}{2[f'(x)]^2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 - \frac{f''(x)}{f'(x)}\frac{f(x)}{f'(x)}\frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}$$

اگر x مقدار واقعی ریشه معادله f(x) = 0 باشد، در این صورت $\phi'(x) = 0$ برای بررسی مشتق دوم ، عبارت فوق را ساده تر می نویسیم.

$$\phi'(x) = -\frac{f'''(x)f'(x) + [f''(x)]^2}{2[f'(x)]^4} f^2(x) \rightarrow$$

$$\phi''(x) = -\frac{[f^{(4)}(x)f'(x) + f'''(x)f''(x) + 2f''(x)f'''(x)][f'(x)]^4 - 4[f'(x)]^3 f''(x)[f'''(x)f'(x) + [f''(x)]^2]}{2[f'(x)]^8} f^2(x)$$

$$- \frac{f'''(x)f'(x) + [f''(x)]^2}{2[f'(x)]^4} 2f(x)f'(x)$$

اگر x مقدار واقعی ریشه معادله f(x) = 0 باشد، در این صورت $\phi''(x)=۰$ برای بررسی مشتق سوم ، عبارت فوق را ساده تر می نویسیم.

$$\phi''(x)=-\frac{[f^{(۴)}(x)f'(x)f'(x)-f''(x)f'''(x)f'(x)-۴[f''(x)]^{۳}}{۲[f'(x)]^{۵}}f^{۲}(x)-\frac{f'''(x)f'(x)+[f''(x)]^{۲}}{[f'(x)]^{۳}}f(x)$$

$$\begin{aligned}\phi'''(x)=&-\frac{\left[[f^{(۴)}(x)f'(x)f'(x)-f''(x)f'''(x)f'(x)-۴[f''(x)]^{۳}\right]'[f'(x)]^{۵}}{۲[f'(x)]^{۱۰}}f^{۲}(x)\\&+\frac{۵[f'(x)]^{۴}\left[[f^{(۴)}(x)f'(x)f'(x)-f''(x)f'''(x)f'(x)-۴[f''(x)]^{۳}\right]}{۲[f'(x)]^{۱۰}}f^{۲}(x)\\&-\frac{[f^{(۴)}(x)f'(x)f'(x)-f''(x)f'''(x)f'(x)-۴[f''(x)]^{۳}}{۲[f'(x)]^{۵}}۲f(x)f'(x)\\&-\frac{\left[f'''(x)f'(x)+[f''(x)]^{۲}\right]'[f'(x)]^{۳}-۳[f'(x)]^{۲}\left[f'''(x)f'(x)+[f''(x)]^{۲}\right]}{[f'(x)]^{۶}}f(x)\\&-\frac{f'''(x)f'(x)+[f''(x)]^{۲}}{[f'(x)]^{۳}}f'(x)\end{aligned}$$

اگر x مقدار واقعی ریشه معادله f(x) = 0 باشد، در این صورت $\phi'''(x)=-\frac{f'''(x)f'(x)+[f''(x)]^{۲}}{[f'(x)]^{۳}}f'(x)\neq ۰$ پس درجه همگرایی ۳ است.

ب- $f(x)=x^{۲}-۵\rightarrow f'(x)=۲x\rightarrow f''(x)=۲\rightarrow \phi(x)=x-\frac{x^{۲}-۵}{۲x}-\frac{۲}{۴x}\left[\frac{x^{۲}-۵}{۲x}\right]^{۲}=\frac{x^{۲}+۵}{۲x}-\frac{(x^{۲}-۵)^{۲}}{۸x^{۳}}$

$$\phi(x)=\frac{۳x^{۴}+۳۰x^{۲}-۲۵}{۸x^{۳}}\rightarrow x_{n+۱}=\frac{۳x_n^{۴}+۳۰x_n^{۲}-۲۵}{۸x_n^{۳}}\quad ,\quad x_{۰}=۵\rightarrow x_{۱}=۲/۶۰۰۰۰۰۰\rightarrow x_{۲}=۲/۲۳۹۵۰۸۴\rightarrow$$
$$x_{۳}=۲/۲۳۶۰۶۸۰\rightarrow x_{۴}=۲/۲۳۶۰۶۸۰$$

پس ریشه با دقت ۶ رقم اعشار برابر ۲/۲۳۶۰۶۸ است (محاسبات میانی با ۷ رقم اعشار انجام شده است)

۴-

$$f(x)=\cos(x)ch(x)+۱\rightarrow f'(x)=-\sin(x)ch(x)+\cos(x)sh(x)\rightarrow$$
$$f''(x)=-\cos(x)ch(x)-\sin(x)sh(x)-\sin(x)sh(x)+\cos(x)ch(x)=-۲\sin(x)sh(x)$$
$$|f''(x)f(x)|<|f'(x)|^{۲}\xrightarrow{x_{۰}=۰}۰<۰\quad no\qquad |f''(x)f(x)|<|f'(x)|^{۲}\xrightarrow{x_{۰}=-۵}۳۱۳۸<۸۵۰۳$$
$$f''(x)f(x)|<|f'(x)|^{۲}\xrightarrow{x_{۰}=-۸}۶۳۶۶۳۶<۲۸۶۱۱۱۳$$

نقطه ۸- مناسب ترین است چون در شرط همگرایی نسبت طرف راست به چپ دورتر است.

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{\cos(x_n)ch(x_n)+۱}{-\sin(x_n)ch(x_n)+\cos(x_n)sh(x_n)}$$
$$x_{۰}=-۸\rightarrow x_{۱}=-۷/۸۷۲۴\rightarrow x_{۲}=-۷/۸۵۵۱\rightarrow x_{۳}=-۷/۸۵۴۸$$

پس ریشه با دقت ۳ رقم اعشار برابر است با ۷/۸۵۵- (محاسبات میانی با ۴ رقم اعشار)

دستور fsolve :

با اجرای دستورالعمل ذیل :

```
>> x = fsolve(@(x) cos(x)*cosh(x)+1,-8)
```

نتیجه ذیل حاصل خواهد شد :

```
ans =

   -7.8548
```

مقایسه این نتیجه با ریشه مسئله ۴ نشان از دقت گفته شده در مسئله ۴ دارد.