پاسخ تمرین سری دوم

۱-

$$\Delta = hD + \frac{h^{۲}}{۲!}D^{۲} + \frac{h^{۳}}{۳!}D^{۳} + \ldots \to \Delta \propto h \to \Delta^{۷} \propto h^{۷} \;,\; D^{۵} = \frac{۱}{h^{۵}}\left(\Delta - \frac{\Delta^{۲}}{۲} + \frac{\Delta^{۳}}{۳} - + \ldots\right)^{۵} \to$$

$$D^{۵} = \frac{۱}{h^{۵}}\left(\Delta^{۲} + (-\frac{\Delta^{۲}}{۲})^{۲} + ۲(\Delta)(-\frac{\Delta^{۲}}{۲}) + ۲(\Delta)(\frac{\Delta^{۳}}{۳}) + \ldots\right)\left(\Delta - \frac{\Delta^{۲}}{۲} + \frac{\Delta^{۳}}{۳} - + \ldots\right)^{۳}$$

$$D^{۵} = \frac{۱}{h^{۵}}\left(\Delta^{۲} - \Delta^{۳} + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^{۴} + \ldots\right)\left(\Delta^{۲} - \Delta^{۳} + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^{۴} + \ldots\right)\left(\Delta - \frac{\Delta^{۲}}{۲} + \frac{\Delta^{۳}}{۳} - + \ldots\right) \to$$

$$D^{۵} = \frac{۱}{h^{۵}}\left(\Delta^{۴} - ۲\Delta^{۵} + \frac{۳۴}{۱۲}\Delta^{۶} + \ldots\right)\left(\Delta - \frac{\Delta^{۲}}{۲} + \frac{\Delta^{۳}}{۳} - + \ldots\right) \to D^{۵} = \frac{۱}{h^{۳}}(\Delta^{۵} - ۲/۵\Delta^{۶}) \to y_i^{(۵)} = \frac{۱}{h^{۵}}(\Delta^{۵}y_i - ۲/۵\Delta^{۶}y_i)$$

$$\Delta^{۵}y_i = y_{i+۵} - ۵y_{i+۴} + ۱۰y_{i+۳} - ۱۰y_{i+۲} + ۵y_{i+۱} - y_i \;,\; \Delta^{۶}y_i = y_{i+۶} - ۶y_{i+۵} + ۱۵y_{i+۴} - ۲۰y_{i+۳} + ۱۵y_{i+۲} - ۶y_{i+۱} + y_i$$

$$y_i^{(۵)} = \frac{-۲/۵y_{i+۶} + ۱۶y_{i+۵} - ۴۲/۵y_{i+۴} + ۶۰y_{i+۳} - ۴۷/۵y_{i+۲} + ۲۰y_{i+۱} - ۳/۵y_i}{h^{۵}}$$

۲- مسئله ۱۴۸ از فصل ۳

روش اسپلاین طبیعی :

$$s(x) = \begin{cases} a_{۰}x^{۳} + b_{۰}x^{۲} + c_{۰}x + d_{۰} & : ۰ \le x \le ۱ \\ a_{۱}x^{۳} + b_{۱}x^{۲} + c_{۱}x + d_{۱} & : ۱ \le x \le ۳ \end{cases} \to \begin{cases} a_{۰}(۱)^{۳} + b_{۰}(۱)^{۲} + c_{۰}(۱) + d_{۰} = ۰/۵ \\ a_{۱}(۱)^{۳} + b_{۱}(۱)^{۲} + c_{۱}(۱) + d_{۱} = ۰/۵ \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_{۰}(۰)^{۳} + b_{۰}(۰)^{۲} + c_{۰}(۰) + d_{۰} = ۱ \\ a_{۱}(۳)^{۳} + b_{۱}(۳)^{۲} + c_{۱}(۳) + d_{۱} = ۰/۲۵ \end{cases} \to d_{۰} = ۱ \;,\; \begin{cases} ۳a_{۰}(۱)^{۲} + ۲b_{۰}(۱) + c_{۰} = ۳a_{۱}(۱)^{۲} + ۲b_{۱}(۱) + c_{۱} \\ ۶a_{۰}(۱) + ۲b_{۰} = ۶a_{۱}(۱) + ۲b_{۱} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۶a_{۰}(۰) + ۲b_{۰} = ۰ \\ ۶a_{۱}(۳) + ۲b_{۱} = ۰ \end{cases} \to b_{۰} = ۰,\; b_{۱} = -۹a_{۱} \;,\begin{cases} a_{۰} + c_{۰} = -۰/۵ \\ a_{۱} + b_{۱} + c_{۱} + d_{۱} = ۰/۵ \end{cases} ,\; \begin{cases} ۳a_{۰} + c_{۰} = ۳a_{۱} + ۲b_{۱} + c_{۱} \\ ۶a_{۰} = ۶a_{۱} + ۲b_{۱} \end{cases}$$

$$۶a_{۰} = ۶a_{۱} + ۲(-۹a_{۱}) \to ۶a_{۰} = -۱۲a_{۱} \to a_{۱} = -۰/۵a_{۰} \;,\; \begin{cases} a_{۱} + b_{۱} + c_{۱} + d_{۱} = ۰/۵ \\ ۲۷a_{۱} + ۹b_{۱} + ۳c_{۱} + d_{۱} = ۰/۲۵ \end{cases} \to$$

$$۲۶a_{۱} + ۸b_{۱} + ۲c_{۱} = -۰/۲۵ \;,\; ۳a_{۰} + c_{۰} = ۳(-۰/۵a_{۰}) + ۲(-۹)(-۰/۵a_{۰}) + c_{۱} \to -۴/۵a_{۰} + c_{۰} = c_{۱}$$

$$۲۶(-۰/۵a_{۰}) + ۸(-۹)(-۰/۵a_{۰}) + ۲(-۴/۵a_{۰} + c_{۰}) = -۰/۲۵ \to -۱۴a_{۰} + ۲c_{۰} = -۰/۲۵ \;, a_{۰} + c_{۰} = -۰/۵ \to$$

$$c_{۰} = -\frac{۹}{۱۶} \;,\; a_{۰} = \frac{۱}{۱۶} \;,\; a_{۱} = -\frac{۱}{۳۲} \;,\; b_{۱} = \frac{۹}{۳۲} \;,\; c_{۱} = -\frac{۲۷}{۳۲},\; d_{۱} = \frac{۳۵}{۳۲} \Rightarrow$$

$$s(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۱۶}x^{۳} - \frac{۹}{۱۶}x + ۱ & : ۰ \le x \le ۱ \\ -\frac{۱}{۳۲}x^{۳} + \frac{۹}{۳۲}x^{۲} - \frac{۲۷}{۳۲}x + \frac{۳۵}{۳۲} & : ۱ \le x \le ۳ \end{cases} \to f'(۱) \simeq \frac{۳}{۱۶} - \frac{۹}{۱۶} = \frac{-۳}{۸} \;,\; f'(۲) \simeq -\frac{۱۲}{۳۲} + \frac{۳۶}{۳۲} - \frac{۲۷}{۳۲} = -\frac{۳}{۳۲}$$

$$f(x) = (x+۱)^{-۱} \to f'(x) = -(x+۱)^{-۲} \to f'(۱) = -۰/۲۵ \;,\; f'(۲) = -\frac{۱}{۹}$$

$$E(۱) = -۰/۲۵ - \frac{-۳}{۸} = ۰/۱۲۵ \;,\; E(۲) = -\frac{۱}{۹} - \frac{-۳}{۳۲} = -۰/۰۱۷$$

روش لاگرانژ :

$$L_0(x)=\prod_{j=0,\, j\neq i}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}=\frac{x-1}{0-1}\,\frac{x-3}{0-3}=\frac{1}{3}(x-1)(x-3)$$

$$L_1(x)=\prod_{j=1,\, j\neq i}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_1-x_j)}=\frac{x-0}{1-0}\,\frac{x-3}{1-3}=\frac{-1}{2}x(x-3)$$

$$L_2(x)=\prod_{j=2,\, j\neq i}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_2-x_j)}=\frac{x-(0)}{3-(0)}\,\frac{x-1}{3-1}=\frac{1}{6}x(x-1)\ ,\ P(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x)y_i\rightarrow$$

$$P(x)=(1)\frac{1}{3}(x-1)(x-3)+(0/5)\frac{-1}{2}x(x-3)+(0/25)\frac{1}{6}x(x-1)=\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{8}x+1$$

$$P'(x)=\frac{1}{4}x-\frac{5}{8}\rightarrow P'(1)=-\frac{3}{8}\ ,\ P'(2)=-\frac{1}{8}$$

$$E(1)=-\frac{3}{8}-\frac{-3}{8}=0\ ,\ E(2)=-\frac{1}{8}-\frac{-3}{32}=-0/125$$

۳- قسمت پ مسئله ۱ از فصل ۴

روش اویلر ساده دارای خطایی از مرتبه ۲ است. لذا این خطا بطور میانگین برای این سوال با گام ۰/۲، $3h^2=3(0/2)^2=0/12$ است. پس برای این سوال دقت یک رقم اعشار را هم نداریم و کافی است محاسبات میانی را با یک رقم اعشار انجام دهیم، ولی در صورت سوال آمده که محاسبات را با ۴ رقم اعشار انجام دهیم.

$$y'=\cos(2x)+\sin(3y)=f(x,y)\ ,\ x\in[0,1]\ ,\ y(0)=1\ ,\ h=0/2$$

$$y_{i+1}\simeq y_i+hf(x_i,y_i)\rightarrow i=0\ :\ y_1=y(0/2)\simeq 1+0/2f(0,1)=1/2282$$

$$i=1\ :\ y_2=y(0/4)\simeq 1/2282+0/2f(0/2,1/2282)=1/3091$$

$$i=2\ :\ y_3=y(0/6)\simeq 1/3091+0/2f(0/4,1/3091)=1/3070$$

$$i=3\ :\ y_4=y(0/8)\simeq 1/3070+0/2f(0/6,1/3070)=1/2389$$

$$i=4\ :\ y_5=y(1)\simeq 1/2389+0/2f(0/8,1/2389)=1/1243$$

روش اویلر نقطه وسط دارای خطایی از مرتبه ۳ است. لذا این خطا بطور میانگین برای این سوال با گام ۰/۲، $3h^2=3(0/2)^3=0/024$ است. پس برای این سوال دقت یک رقم اعشار است و کافی است محاسبات میانی را با دو رقم اعشار انجام دهیم، ولی در صورت سوال آمده که محاسبات را با ۴ رقم اعشار انجام دهیم.

$$y'=\cos(2x)+\sin(3y)=f(x,y)\ ,\ x\in[0,1]\ ,\ y(0)=1\ ,\ h=0/2$$

$$y_{i+0/5}\simeq y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\rightarrow i=0\ :\ y_{0/5}=y(0/1)\simeq 1+0/1f(0,1)=1/1141$$

$$y_{i+1}\simeq y_i+hf(x_{i+0/5},y_{i+0/5})\rightarrow i=0\ :\ y_1=y(0/2)\simeq 1+0/2f(0/1,1/1141)=1/1561$$

$$i=1\ :\ y_{1/5}=y(0/3)\simeq 1/1561+0/1f(0/2,1/1561)=1/2161$$

$$i=1\ :\ y_2=y(0/4)\simeq 1/1561+0/2f(0/3,1/2161)=1/2241$$

$$i=۲:\ y_{۲/۵}=y(۰/۵)\simeq ۱/۲۲۴۱+۰/۱f(۰/۴,۱/۲۲۴۱)=۱/۲۴۳۲$$
$$i=۲:\ y_{۳}=y(۰/۶)\simeq ۱/۲۲۴۱+۰/۲f(۰/۵,۱/۲۱۶۱)=۱/۲۲۱۲$$
$$i=۳:\ y_{۳/۵}=y(۰/۷)\simeq ۱/۲۲۱۲+۰/۱f(۰/۶,۱/۲۲۱۲)=۱/۲۰۷۶$$
$$i=۳:\ y_{۴}=y(۰/۸)\simeq ۱/۲۲۱۲+۰/۲f(۰/۷,۱/۲۰۷۶)=۱/۱۶۲۶$$
$$i=۴:\ y_{۴/۵}=y(۰/۹)\simeq ۱/۱۶۲۶+۰/۱f(۰/۸,۱/۱۶۲۶)=۱/۱۲۵۸$$
$$i=۴:\ y_{۵}=y(۱)\simeq ۱/۱۶۲۶+۰/۲f(۰/۹,۱/۱۲۵۸)=۱/۰۷۰۴$$

۴- مسئله ۱۳ از فصل ۴

$$y''-۴y'+۴y=۰\ ,\ x\in[۰,۰/۲]\ ,\ y(۰)=۲\ ,\ y'(۰)=۱\ ,\ h=۰/۱$$

$$\begin{cases} y'=p=f_{۱}(x,y,p) \\ p'=۴p-۴y=f_{۲}(x,y,p) \end{cases} ,\ \begin{cases} y(۰)=۲ \\ p(۰)=۱ \end{cases}$$

چون در این روش در تعداد مراحل کم، خطا متناسب با توان پنجم h است، لذا بطور میانگین خطا برابر $۳h^{۵}=۰/۰۰۰۰۳$ بوده و از دقت ۴ رقم اعشار برخوردار خواهد بود. پس محاسبات میانی را با ۵ رقم اعشار انجام می‌دهیم. با بسط روش رانگ- کوتا مرتبه ۴ برای دو متغیر داریم :

$$\begin{cases} K_{۱}=hf_{۱}(x_i,y_i,p_i) \\ K_{۲}=hf_{۱}(x_i+\frac{۱}{۲}h\ ,y_i+\frac{۱}{۲}K_{۱}\ ,p_i+\frac{۱}{۲}L_{۱}\ ) \\ K_{۳}=hf_{۱}(x_i+\frac{۱}{۲}h\ ,y_i+\frac{۱}{۲}K_{۲}\ ,p_i+\frac{۱}{۲}L_{۲}) \\ K_{۴}=hf_{۱}(x_i+h\ ,y_i+K_{۳}\ ,p_i+L_{۳}) \\ y_{i+۱}=y_i+\frac{۱}{۶}[K_{۱}+۲K_{۲}+۲K_{۳}+K_{۴}] \end{cases} ,\ \begin{cases} L_{۱}=hf_{۲}(x_i,y_i,p_i) \\ L_{۲}=hf_{۲}(x_i+\frac{۱}{۲}h\ ,y_i+\frac{۱}{۲}K_{۱}\ ,p_i+\frac{۱}{۲}L_{۱}\ ) \\ L_{۳}=hf_{۲}(x_i++\frac{۱}{۲}h\ ,y_i+\frac{۱}{۲}K_{۲}\ ,p_i+\frac{۱}{۲}L_{۲}) \\ L_{۴}=hf_{۲}(x_i+h\ ,y_i+K_{۳}\ ,p_i+L_{۳}\ ) \\ p_{i+۱}=p_i+\frac{۱}{۶}[L_{۱}+۲L_{۲}+۲L_{۳}+L_{۴}] \end{cases} ,$$

$$i=۰: K_{۱}=۰/۱f_{۱}(۰,۲,۱)=۰/۱\ ,\ L_{۱}=۰/۱f_{۲}(۰,۲,۱)=-۰/۴$$
$$K_{۲}=۰/۱f_{۱}(۰+۰/۰۵\ ,۲+۰/۰۵\ ,۱-۰/۲)=۰/۰۸۰۰۰\ ,\ L_{۲}=۰/۱f_{۲}(۰+۰/۰۵\ ,۲+۰/۰۵\ ,۱-۰/۲)=-۰/۵۰۰۰۰$$
$$K_{۳}=۰/۱f_{۱}(۰+۰/۰۵,۲+۰/۰۴\ ,۱-۰/۲۵)=۰/۰۷۵۰۰\ ,\ L_{۳}=۰/۱f_{۲}(۰+۰/۰۵,۲+۰/۰۴\ ,۱-۰/۲۵)=-۰/۵۱۶۰۰$$
$$K_{۴}=۰/۱f_{۱}(۰+۰/۱\ ,۲+۰/۰۷۵,۱-۰/۵۱۶)=۰/۰۴۸۴۰\ ,\ L_{۴}=hf_{۲}(۰+۰/۱\ ,۲+۰/۰۷۵,۱-۰/۵۱۶)=-۰/۶۳۶۴۰$$
$$y_{۱}=y(۰/۱)=y_{۰}+\frac{۱}{۶}[K_{۱}+۲K_{۲}+۲K_{۳}+K_{۴}]=۲/۰۷۶۴۰$$
$$p_{۱}=p(۰/۱)=p_{۰}+\frac{۱}{۶}[L_{۱}+۲L_{۲}+۲L_{۳}+L_{۴}]=۰/۴۸۸۶۰$$

$$i=۱: K_{۱}=۰/۱f_{۱}(۰/۱,۲/۰۷۶۴,۰/۴۸۸۶)=۰/۰۴۸۸۶\ ,\ L_{۱}=۰/۱f_{۲}(۰/۱,۲/۰۷۶۴,۰/۴۸۸۶)=-۰/۶۳۵۱۲$$
$$K_{۲}=۰/۱f_{۱}(۰/۱+۰/۰۵\ ,۲/۰۷۶۴+۰/۰۲۴۴۳\ ,۰/۴۸۸۶-۰/۳۱۷۵۶)=۰/۰۱۷۱۰$$
$$L_{۲}=۰/۱f_{۲}(۰/۱+۰/۰۵\ ,۲/۰۷۶۴+۰/۰۲۴۴۳\ ,۰/۴۸۸۶-۰/۳۱۷۵۶)=-۰/۷۷۱۹۲$$
$$K_{۳}=۰/۱f_{۱}(۰/۱+۰/۰۵,۲/۰۷۶۴+۰/۰۰۸۵۵\ ,۰/۴۸۸۶-۰/۳۸۵۹۶)=۰/۰۱۰۲۶$$
$$L_{۳}=۰/۱f_{۲}(۰/۱+۰/۰۵,۲/۰۷۶۴+۰/۰۰۸۵۵\ ,۰/۴۸۸۶-۰/۳۸۵۹۶)=-۰/۷۹۲۹۲$$
$$K_{۴}=۰/۱f_{۱}(۰/۱+۰/۱,۲/۰۷۶۴+۰/۰۱۰۲۶,۰/۴۸۸۶-۰/۷۹۲۹۲)=-۰/۰۳۰۴۳$$
$$L_{۴}=hf_{۲}(۰/۱+۰/۱,۲/۰۷۶۴+۰/۰۱۰۲۶,۰/۴۸۸۶-۰/۷۹۲۹۲)=-۰/۹۵۶۳۹$$

$$y_{۲} = y(۰/۲) = y_{۱} + \frac{۱}{۶}[K_{۱} + ۲K_{۲} + ۲K_{۳} + K_{۴}] = ۲/۰۸۸۵۹$$

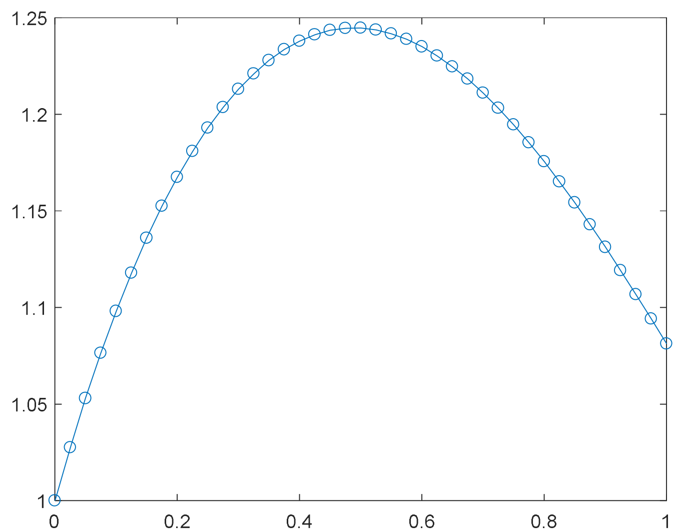
$$p_{۲} = p(۰/۲) = p_{۱} + \frac{۱}{۶}[L_{۱} + ۲L_{۲} + ۲L_{۳} + L_{۴}] = -۰/۲۹۸۲۷$$

دستور ode45 :

با تعریف تابع ذیل و اجرای دستورالعمل بعدی آن :

```
[x,y] = ode45(@(x,y) y*x^3-1.5*y, [0,2],1);
 plot(t,y,'-o')
```

منحنی جواب چنین خواهد بود :



با اجرای دستورالعمل size(x) ، متوجه می شویم که بردار X ، ۴۱ مقدار است. با بررسی مقدار x و y در نقاط مختلف داریم :

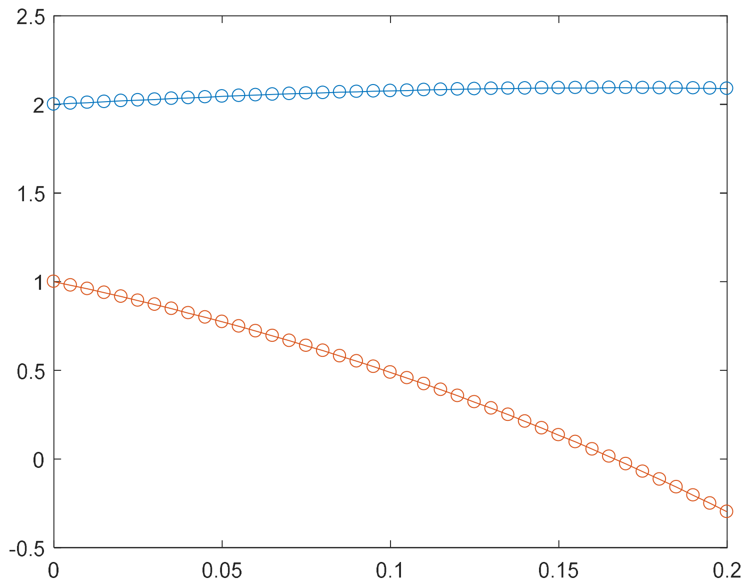
$$x(۴۱) = ۱ \rightarrow y(۴۱) = ۱/۰۸۱۲$$

مقایسه این نتیجه با نتیجه سوال ۳ ، نشان می دهد که حل دستی با روش اویلر ساده و نقطه وسط فقط یک رقم اعشار دقت دارد.

با تعریف تابع ذیل و اجرای دستورالعمل بعدی آن :

```
function dydt = vdp1(x,y)
dydt = [y(2);4*(y(2)-y(1))];
end
[x,y] = ode45(@vdp1,[1 1.2],[4;9]);
```

منحنی جواب چنین خواهد بود :



با اجرای دستورالعمل size(x) ، متوجه می شویم که بردار X ، ۴۱ مقدار است. با بررسی مقدار x و y در نقاط مختلف داریم :

$$x(۴۱) = ۰/۲ \rightarrow y(۴۱) = ۲/۰۸۸۵۵$$

مقایسه این نتیجه با نتیجه سوال ۴ ، نشان از دقت ۴ رقم اعشار برای سوال ۴ است.