پاسخ تمرین سری سوم

۱- مسئله ۵ از فصل ۵

چون تابع دو ضابطه ای است، باید حداکثر خطای ممکن برای تقریب انتگرال هر ضابطه تعیین کرد بطوریکه مجموع این دو برابر ۰/۰۱ باشد. به عنوان مثال فرض کنید حداکثر خطای ممکن برای تقریب انتگرال هر ضابطه برابر ۰/۰۰۵ باشد.

$$I_۱=\int_۰^۲ \sin(x)dx \to f(x)=\sin(x)\to f'(x)=\cos(x)\to f''(x)=-\sin(x)\to f'''(x)=-\cos(x)$$

$$\to f^{(۴)}(x)=\sin(x)\to M_۴=\max|f^{(۴)}(x)|\Big|_{x\in[۰,۲]}=\sin(۲)=۰/۹۱$$

$$n\ge\sqrt[۴]{\frac{M_۴(b-a)^۵}{۱۸۰\Delta I}}=\sqrt[۴]{\frac{۰/۹۱(۲-۰)^۵}{۱۸۰(۰/۰۰۵)}}=۲/۳۸\to n\ge ۴\to \Delta x=\frac{۲-۰}{۴}=۰/۵$$

$$A_۱=\frac{\Delta x}{۳}[f(۰)+۴f(۰/۵)+۲f(۱)+۴f(۱/۵)+f(۲)]=\frac{۱}{۶}[۰+۱/۹۱۸+۱/۶۸۳+۳/۹۹۰+۰/۹۰۹]=۱/۴۱۷$$

$$I_۲=\int_{-۱}^۰(x+۲)^{۰/۵}dx\to f(x)=(x+۲)^{۰/۵}\to f'(x)=۰/۵(x+۲)^{-۰/۵}\to f''(x)=-۰/۲۵(x+۲)^{-۱/۵}\to$$

$$f'''(x)=۰/۳۷۵(x+۲)^{-۲/۵}\to f^{(۴)}(x)=-۰/۹۳۷۵(x+۲)^{-۳/۵}\to M_۴=\max|f^{(۴)}(x)|\Big|_{x\in[۰,۲]}=۰/۹۳۷۵$$

$$n\ge\sqrt[۴]{\frac{M_۴(b-a)^۵}{۱۸۰\Delta I}}=\sqrt[۴]{\frac{۰/۹۳۷۵(۰-(-۱))^۵}{۱۸۰(۰/۰۰۵)}}=۱/۰۴\to n\ge ۲\to \Delta x=\frac{۰-(-۱)}{۲}=۰/۵$$

$$A_۲=\frac{\Delta x}{۳}[f(-۱)+۴f(-۰/۵)+f(۰)]=\frac{۱}{۶}[۱+۴/۸۹۹+۱/۴۱۴]=۱/۲۱۹\Rightarrow A=۲/۶۳۶$$

$$I=\int_۰^۲\sin(x)dx+\int_{-۱}^۰(x+۲)^{۰/۵}dx=-\cos(x)\Big|_۰^۲+\frac{۲}{۳}(x+۲)^{۱/۵}\Big|_{-۱}^۰=-\cos(۲)+۱+\frac{۲}{۳}(\sqrt{۸}-۱)=۲/۶۳۵۰۹۸\to$$

$$E=۰/۰۰۰۹$$

۲- الف- $\int_۰^۱ f(\sqrt{t})dt=\omega_۰ f(۰)+\omega_۱ f'(۰)+\omega_۲ f(۱)\ ,\ f(t)=۱\to ۱=\omega_۰+\omega_۲\ \boxed{۱}$

$$\int_۰^۱ f(\sqrt{t})dt=\omega_۰ f(۰)+\omega_۱ f'(۰)+\omega_۲ f(۱)\ ,\ f(t)=۱\to ۱=\omega_۰+\omega_۲\ \boxed{۱}$$

$$f(t)=t\to\int_۰^۱\sqrt{t}dt=۰+\omega_۱+\omega_۲\to\frac{۲}{۳}t^{۱/۵}\Big|_۰^۱=\omega_۱+\omega_۲\to\frac{۲}{۳}=\omega_۱+\omega_۲\ \boxed{۲}$$

$$f(t)=t^۲\to\int_۰^۱ tdt=\omega_۲\to ۰/۵=\omega_۲\ \boxed{۳}\xrightarrow{\boxed{۱},\boxed{۲}}\omega_۰=۰/۵\ ,\ \omega_۱=\frac{۱}{۶}$$

$$\int_۰^۱ f(\sqrt{t})dt=۰/۵f(۰)+\frac{۱}{۶}f'(۰)+۰/۵f(۱)\quad ,\quad f(t)=t^۳\to I=\int_۰^۱ f(\sqrt{t})dt=\int_۰^۱\sqrt{t^۳}dt=\frac{۲}{۵}t^{۲/۵}\Big|_۰^۱=۰/۴$$

$$I_۲=۰+۰+۰/۵=۰/۵\to I-I_۲=Cf^{(۳)}(\varepsilon)\to -۰/۱=۶C\to C=-\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow E=\frac{-۱}{۶۰}f^{(۳)}(\varepsilon)$$

ب- $I=\int_{-۱}^۳\sin(x^۲)dx\xrightarrow{x=۴t-۱}I=۴\int_۰^۱\sin((۴t-۱)^۲)dt\to f(t)=۴\sin((۴t-۱)^۲)\to f'(t)=۳۲(۴t-۴)\cos((۴t-۱)^۲)$

$$f^{(۴)}(t)=۴(۳۲t-۸)^{۴}\sin((۴t-۱)^{۲})-۵۱۲(۳۲t-۸)^{۲}\cos((۴t-۱)^{۲})-۱۲۲۸۸\sin((۴t-۱)^{۲})$$
$$-۴(۳۲t-۸)(۲۰۴۸t-۵۱۲)\cos((۴t-۱)^{۲})$$

$$\max f^{(۴)}(t)\Big|_{-۱}^{۱}=۹۴۴۹۱\rightarrow|E|\leq ۱۵۷۵$$

چون حداکثر خطای مطلق بسیار بزرگ است، نتیجه حتی از دقت یک رقم اعشار هم برخوردار نخواهد بود.

$$I=۴\int_{۰}^{۱}\sin((۴t-۱)^{۲})dt=۲\sin(۱)+\frac{۱}{۶}(-۱۲۸)\cos(۱)+۲\sin(۹)$$
$$I=۱/۶۸-۱۱/۵۳+۰/۸۲=-۹/۰۳$$

۳-

$$\begin{cases}x_{۱}-ax_{۲}=۱۰\\ ۲x_{۱}+ax_{۲}+x_{۳}=-۱۰\\ -x_{۱}+۳x_{۳}=۱۰\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}۱&-a&۰&۱۰\\ ۲&a&۱&-۱۰\\ -۱&۰&۳&۱۰\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۱&-a&۰&۱۰\\ ۰&۳a&۱&-۳۰\\ ۰&-a&۳&۲۰\end{bmatrix}\xrightarrow{۳a\neq۰}\begin{bmatrix}۱&-a&۰&۱۰\\ ۰&۱&\frac{۱}{۳a}&\frac{-۱۰}{a}\\ ۰&-a&۳&۲۰\end{bmatrix}$$

$$\text{if } a\neq۰ \text{ then}\begin{bmatrix}۱&۰&\frac{۱}{۳}&۰\\ ۰&۱&\frac{۱}{۳a}&\frac{-۱۰}{a}\\ ۰&۰&\frac{۱۰}{۳}&۱۰\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&\frac{۱}{۳}&۰\\ ۰&۱&\frac{۱}{۳a}&\frac{-۱۰}{a}\\ ۰&۰&۱&۳\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰&-۱\\ ۰&۱&۰&\frac{-۱۱}{a}\\ ۰&۰&۱&۳\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_{۱}=-۱\\ x_{۲}=\frac{-۱۱}{a}\\ x_{۳}=۳\end{cases}$$

$$\text{if } a=۰ \text{ then}\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱۰\\ ۰&۰&۱&-۳۰\\ ۰&۰&۳&۲۰\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱۰\\ ۰&۰&۱&-۳۰\\ ۰&۰&۱&\frac{۲۰}{۳}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱۰\\ ۰&۰&۰&\frac{-۱۱۰}{۳}\\ ۰&۰&۱&\frac{۲۰}{۳}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$r(A)=۲\neq r(Ab)=۳\Rightarrow \text{no answer}$$

$$\begin{cases}x_{۱}-x_{۲}=۱۰\\ ۲x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}=-۱۰\\ -x_{۱}+۳x_{۳}=۱۰\end{cases}\rightarrow A=\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\ ۲&۱&۱\\ -۱&۰&۳\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}۱۰\\ -۱۰\\ ۱۰\end{bmatrix},x=\begin{bmatrix}۰\\ -۱۰\\ ۲\end{bmatrix}\rightarrow C=C^{-۱}=I,$$ ۴-

$$r^{(۰)}=b-Ax^{(۰)}=\begin{bmatrix}۱۰\\ -۱۰\\ ۱۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\ ۲&۱&۱\\ -۱&۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ -۱۰\\ ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ -۲\\ ۴\end{bmatrix},w=C^{-۱}r^{(۰)}=\begin{bmatrix}۰\\ -۲\\ ۴\end{bmatrix},v^{(۱)}=C^{-t}w=\begin{bmatrix}۰\\ -۲\\ ۴\end{bmatrix},\alpha=\langle w,w\rangle=۲۰$$

$$k=۱:\ u=Av^{(۱)}=\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\ ۲&۱&۱\\ -۱&۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ -۲\\ ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۲\\ ۱۲\end{bmatrix},t_{۱}=\frac{\alpha}{\langle v^{(۱)},u\rangle}=\frac{۲۰}{۴۴}=۰/۴۵۵,$$

$$x^{(۱)} = x^{(۰)} + t_۱ v^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۰ \\ ۲ \end{bmatrix} + ۰/۴۵۵ \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۰/۹۱۰ \\ ۳/۸۲۰ \end{bmatrix}, r^{(۱)} = r^{(۰)} - t_۱ u = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \\ ۴ \end{bmatrix} - ۰/۴۵۵ \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۹۱۰ \\ -۲/۹۱۰ \\ -۱/۴۶۰ \end{bmatrix},$$

$$w = C^{-۱} r^{(۱)} = \begin{bmatrix} -۰/۹۱۰ \\ -۲/۹۱۰ \\ -۱/۴۶۰ \end{bmatrix}, \beta = \langle w, w \rangle = ۱۱/۴۲۸, s_۱ = \frac{\beta}{\alpha} = ۰/۵۱۷$$

$$v^{(۲)} = C^{-t} w + s_۱ v^{(۱)} = \begin{bmatrix} -۰/۹۱۰ \\ -۲/۹۱۰ \\ -۱/۴۶۰ \end{bmatrix} + ۰/۵۱۷ \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۹۱۰ \\ -۴/۰۵۲ \\ ۰/۸۲۴ \end{bmatrix}$$

$$k = ۲ : a = \beta = ۱۱/۴۲۸, u = Av^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۹۱۰ \\ -۴/۰۵۲ \\ ۰/۸۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۱۴۲ \\ -۵/۰۴۸ \\ ۳/۳۸۲ \end{bmatrix}, t_۲ = \frac{\alpha}{\langle v^{(۲)}, u \rangle} = \frac{۱۱/۴۲۸}{۲۰/۳۸۲} = ۰/۵۶۱$$

$$, x^{(۲)} = x^{(۱)} + t_۲ v^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۰/۹۱۰ \\ ۳/۸۲۰ \end{bmatrix} + ۰/۵۶۱ \begin{bmatrix} -۰/۹۱۰ \\ -۴/۰۵۲ \\ ۰/۸۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۵۱۱ \\ -۱۳/۱۸۳ \\ ۴/۲۸۲ \end{bmatrix}$$

با مقایسه نتیجه مرحله ۱ و ۲، در مورد هیچکدام از متغیرها هنوز به دقتی نرسیدیم.

دستور integral :

مسئله ۱ :

با اجرای دستورالعملهای ذیل :

```
f1=@(x) sin(x)
f2=@(x) sqrt(x)
integral(f1,0,2)+integral(f2,-1,0)
```

جواب برابر است با : ۲/۶۳۵۱ در مقایسه با نتایج مسئله اول ، می توان دریافت که روش سیمسون از دقت ۲ رقم اعشار هم برخوردار است.

مسئله ۲ :

با اجرای دستورالعملهای ذیل :

```
f=@(x)sin(x.^2)
integral(f,-1,3)
```

جواب برابر است با ۱/۰۸۳۸ در مقایسه با نتیجه مسئله دوم ، نتیجه سوال ۲ ، از دقتی برخوردار نیست.