پاسخ تمرین سری پنجم

۱- **مسئله ۲۲ از فصل ۹ کتاب روشهای محاسبات عددی با تابع** $y = a\sin(x) + b\cos(x) + c$

$(-۲,-۵),(-۱,-۳),(۰,۰),(۱,۳),(۲,۵)$, $f_۱ = \sin(x)$, $f_۲ = \cos(x)$, $f_۳ = ۱$

$$F = \begin{bmatrix} -\sin(۲) & \cos(۲) & ۱ \\ -\sin(۱)\sqrt{۲} & \cos(۱)\sqrt{۲} & ۱\sqrt{۲} \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ \sin(۱)\sqrt{۲} & \cos(۱)\sqrt{۲} & ۱\sqrt{۲} \\ \sin(۲) & \cos(۲) & ۱ \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۳\sqrt{۲} \\ ۰ \\ ۳\sqrt{۲} \\ ۵ \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$F^T F = \begin{bmatrix} -\sin(۲) & -\sin(۱)\sqrt{۲} & ۰ & \sin(۱)\sqrt{۲} & \sin(۲) \\ \cos(۲) & \cos(۱)\sqrt{۲} & ۱ & \cos(۱)\sqrt{۲} & \cos(۲) \\ ۱ & ۱\sqrt{۲} & ۱ & ۱\sqrt{۲} & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(۲) & \cos(۲) & ۱ \\ -\sin(۱)\sqrt{۲} & \cos(۱)\sqrt{۲} & ۱\sqrt{۲} \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ \sin(۱)\sqrt{۲} & \cos(۱)\sqrt{۲} & ۱\sqrt{۲} \\ \sin(۲) & \cos(۲) & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$F^T F = \begin{bmatrix} ۲\sin^۲(۲) + ۴\sin^۲(۱) & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲\cos^۲(۲) + ۴\cos^۲(۱) & ۲\cos(۲) + ۴\cos(۱) + ۱ \\ ۰ & ۲\cos(۲) + ۴\cos(۱) + ۱ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴/۴۸۵۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۵۱۴۱ & ۲/۳۲۸۹ \\ ۰ & ۲/۳۲۸۹ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$F^T Y = \begin{bmatrix} -\sin(۲) & -\sin(۱)\sqrt{۲} & ۰ & \sin(۱)\sqrt{۲} & \sin(۲) \\ \cos(۲) & \cos(۱)\sqrt{۲} & ۱ & \cos(۱)\sqrt{۲} & \cos(۲) \\ ۱ & ۱\sqrt{۲} & ۱ & ۱\sqrt{۲} & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۵ \\ -۳\sqrt{۲} \\ ۰ \\ ۳\sqrt{۲} \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰\sin(۲) + ۱۲\sin(۱) \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۹/۱۹۰۶ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۴/۴۸۵۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱/۵۱۴۱ & ۲/۳۲۸۹ \\ ۰ & ۲/۳۲۸۹ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۹/۱۹۰۶ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴/۲۷۸۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \rightarrow y = ۴/۲۷۸۰\sin(x)\ ,$$

$$x = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} -۳/۸۹۰۰ \\ -۳/۵۹۹۸ \\ ۰ \\ ۳/۵۹۹۸ \\ ۳/۸۹۰۰ \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=۱}^{۵} w_j \delta_j^۲ = (-۵ + ۳/۸۹۰۰)^۲ + ۲(-۳ + ۳/۵۹۹۸)^۲ + (۰ - ۰)^۲ + ۲(۳ - ۳/۵۹۹۸)^۲ + (۵ - ۳/۸۹۰۰)^۲ = ۳/۹۰۳۲$$

۲- **مسئله ۱۲ از فصل ۹ کتاب روشهای محاسبات عددی**

$$y=\sqrt{ax+b}\rightarrow y^{۲}=ax+b\rightarrow f_{۱}(x)=x\,,\,f_{۲}(x)=۱\ ,\ Y=\begin{bmatrix}۱\\۹\\۱۶\end{bmatrix}\ ,\ F=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۱\\۲&۱\end{bmatrix}\ ,\ c=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$F^{T}F=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۱\\۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۳\\۳&۳\end{bmatrix}\ ,\ F^{T}Y=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۹\\۱۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۱\\۲۶\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۵&۳\\۳&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۱\\۲۶\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷/۵\\\frac{۷}{۶}\end{bmatrix}\rightarrow y^{۲}=۷/۵x+\frac{۷}{۶}\ ,\ \begin{bmatrix}۰\\۱\\۲\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{۷}{۶}\\\frac{۲۶}{۳}\\\frac{۹۷}{۶}\end{bmatrix}\rightarrow\sum_{j=۱}^{۳}\delta_{j}^{۲}=(۱-\frac{۷}{۶})^{۲}+(۹-\frac{۲۶}{۳})^{۲}+(۱۶-\frac{۹۷}{۶})^{۲}=\frac{۱}{۶}$$

۳- مسئله ۲٤ از فصل ۱۰ کتاب روشهای محاسبات عددی

$$\begin{cases}x_{۱}+x_{۲}\le ۱۰\\ ۲x_{۱}+x_{۳}\ge ۸\\ x_{۱}+۲x_{۲}\le ۱۰\end{cases}\ ,\ F=۶۰x_{۱}+۶۰x_{۲}\rightarrow\begin{cases}x_{۱}+x_{۲}+x_{۵}=۱۰\\ ۲x_{۱}+x_{۳}-x_{۴}+x_{۶}=۸\rightarrow x_{۶}=۸-۲x_{۱}-x_{۳}+x_{۴}\\ x_{۱}+۲x_{۲}+x_{۷}=۱۰\end{cases}$$

$$F=۶۰x_{۱}+۶۰x_{۲}-Mx_{۶}=(۶۰+۲M)x_{۱}+۶۰x_{۲}+Mx_{۳}-Mx_{۴}-۸M$$

$$\begin{bmatrix}۱&۱&۰&۰&۱&۰&۰&۱۰\\ \boxed{۲}&۰&۱&-۱&۰&۱&۰&۸\\ ۱&۲&۰&۰&۰&۰&۱&۱۰\\ \boxed{-(۶۰+۲M)}&-۶۰&-M&M&۰&۰&۰&-۸M\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}۱&۱&۰&۰&۱&۰&۰&۱۰\\ ۱&۰&۱&-۰/۵&۰&۰/۵&۰&۴\\ ۱&۲&۰&۰&۰&۰&۱&۱۰\\ \boxed{-(۶۰+۲M)}&-۶۰&-M&M&۰&۰&۰&-۸M\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}۰&۱&-۱&۰/۵&۱&-۰/۵&۰&۶\\ ۱&۰&۱&-۰/۵&۰&۰/۵&۰&۴\\ ۰&\boxed{۲}&-۱&۰/۵&۰&-۰/۵&۱&۶\\ ۰&\boxed{-۶۰}&۶۰+M&۶۰&۰&۳۰+M&۰&۲۴۰\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۰&۱&-۱&۰/۵&۱&-۰/۵&۰&۶\\ ۱&۰&۱&-۰/۵&۰&۰/۵&۰&۴\\ ۰&۱&-۰/۵&۰/۲۵&۰&-۰/۲۵&۰/۵&۳\\ ۰&\boxed{-۶۰}&۶۰+M&۶۰&۰&۳۰+M&۰&۲۴۰\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}۰&۰&-۰/۵&۰/۲۵&۱&-۰/۲۵&-۰/۵&۳\\ ۱&۰&۱&-۰/۵&۰&۰/۵&۰&۴\\ ۰&۱&-۰/۵&۰/۲۵&۰&-۰/۲۵&۰/۵&۳\\ ۰&۰&۳۰+M&۷۵&۰&۱۵+M&۳۰&۴۲۰\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_{۳}=x_{۴}=x_{۶}=x_{۷}=۰\\ x_{۱}=۴\\ x_{۲}=۳\ ,\ x_{۵}=۳\end{cases}\ ,\ F_{max}=۴۲۰$$

۴- **مسئله ۷۳ از فصل ۱۰ کتاب روشهای محاسبات عددی با کره** $(x-۱)^۲+y^۲+z^۲=۴$

$$L=(x-۱)^۲+(y-۲)^۲+(z-۳)^۲-\lambda[(x-۱)^۲+y^۲+z^۲-۴]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=۲(x-۱)-۲\lambda(x-۱)=۰\ \boxed{۱}\ ,\ \frac{\partial L}{\partial y}=۲(y-۲)-۲\lambda y=۰\ \boxed{۲}\ ,\ \frac{\partial L}{\partial z}=۲(z-۳)-۲\lambda z=۰\ \boxed{۳}\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=۰\rightarrow (x-۱)^۲+y^۲+z^۲-۴=۰\ \boxed{۳}\ \ \boxed{۱}\rightarrow \lambda=۱\ \ \text{or}\ \ x=۱$$

$$\lambda=۱\xrightarrow{\boxed{۲}}-۴=۰\ \text{no answer}$$

$$\boxed{۲}\rightarrow \lambda=\frac{y-۲}{y}\ ,\ \boxed{۳}\rightarrow \lambda=\frac{z-۳}{z}\Rightarrow \frac{y-۲}{y}=\frac{z-۳}{z}\rightarrow -۲z=-۳y\rightarrow z=۱/۵y$$

$$x=۱\xrightarrow{\boxed{۴}}y^۲+z^۲-۴=۰\rightarrow y^۲+۲/۲۵y^۲=۴\rightarrow y^۲=\frac{۴}{۳/۲۵}\rightarrow y=۱/۱۰۹۴\rightarrow z=۱/۶۶۴۱\rightarrow \lambda=-۰/۸۰۲۸$$

$$H=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\ ,\ H\ \text{is PD}\rightarrow L_{min}=۲/۵۷۷۸$$

پس نقطه بدست آمده محل مینیمم است و تابع داده شده نسبت به کره ماکزیمم ندارد.