پاسخ امتحان میان ترم ۱۴۰۳/۹/۳

-۱

$$Q_۱ = \sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۱۰} + \sqrt[۳]{۱۵} \simeq ۱/۲۵۹۹ + ۲/۱۵۴۴ + ۲/۴۶۶۲ = ۵/۸۸۰۵$$

$$Q = \sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۱۰} + \sqrt[۳]{۱۵} = ۵/۸۸۰۵۶۷۸ \rightarrow \Delta Q = ۰/۰۰۰۰۶۷۸ < ۰/۰۰۰۵$$

پس از دقت ۳ رقم اعشار برخوردار است.

$$r = \frac{۰/۰۰۰۰۶۷۸}{۵/۸۸۰۵۶۷۸} = ۹/۶۵ \times ۱۰^{-۶} \rightarrow r \times ۱۰۰ \simeq ۰/۰۰۱\%$$

-۲

$$f_۲(x,y) = (x+y)^۲ \rightarrow E_۲ = ۲(x+y)\Delta x + ۲(x+y)\Delta y \rightarrow r_۲ = \frac{۲(x+y)\Delta x + ۲(x+y)\Delta y}{(x+y)^۲} = \frac{۲\Delta x + ۲\Delta y}{x+y}$$

$$f_۱(x,y) = \sqrt{x+y} \rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۲\sqrt{x+y}}\Delta x + \frac{۱}{۲\sqrt{x+y}}\Delta x \rightarrow r_۱ = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+y}}\Delta x + \frac{۱}{۲\sqrt{x+y}}\Delta y}{\sqrt{x+y}} = \frac{\Delta x + \Delta y}{۲(x+y)}$$

$$\frac{r_۲}{r_۱} = ۴$$

-۳

$$f(z) = z^۴ - z + \sin(z) = z^۴ - \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - + \ldots \rightarrow f_۱(z) = z^۴ \;,\; g_۱(z) = -\frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - + \ldots$$

$$|f_۱(z)|_{|z|=۲} = ۲^۴ = ۱۶ \;,\; |g_۱(z)|_{|z|=۲} \le \frac{۲^۳}{۳!} + \frac{۲^۵}{۵!} + \frac{۲^۷}{۷!} + \ldots = ۱/۳۳ + ۰/۲۷ + ۰/۰۳ + \ldots \simeq ۱/۶۴$$

$$\Rightarrow |f_۱(z)| > |g_۱(z)| \quad , \quad f_۱(z) = z^۴ = ۰ \rightarrow z = ۰$$

چون تابع اول ۴ ریشه در مبدأ دارد که در درون |z|=2 واقع است، پس معادله اصلی نیز دارای ۴ ریشه در درون دایره |z|=2 دارد.

-۴

$$f(x) = x^۴ - x + \sin(x) = ۰ \rightarrow f'(x) = ۴x^۳ - ۱ + \cos(x) \rightarrow x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n^۴ - x_n + \sin(x_n)}{۴x_n^۳ - ۱ + \cos(x_n)}$$

$$x_{n+۱} = \frac{۳x_n^۴ + x_n\cos(x_n) - \sin(x_n)}{۴x_n^۳ - ۱ + \cos(x_n)} \;,\; x_۰ = ۰/۵ \rightarrow x_۱ = ۰/۳۹ \rightarrow x_۲ = ۰/۳۱ \rightarrow x_۳ = ۰/۲۵ \rightarrow x_۴ = ۰/۲۱$$

-۵

$$f(x) = \sin^۲(\frac{\pi}{۲}x) \;,\; x = ۰,۱,۲ \rightarrow y = ۰,۱,۰ \rightarrow L_۱(x) = \prod_{j=۰,\, j\neq ۱}^{۲} \frac{(x - x_j)}{(x_۱ - x_j)} = \frac{x-۰}{۱-۰}\,\frac{x-۲}{۱-۲} = -x(x-۲)$$

$$P(x) = \sum_{i=۰}^{n} L_i(x) y_i = -x(x-۲) \;,\; E(x) = \frac{(x-۰)(x-۱)(x-۲)}{۳!} f^{(۳)}(\varepsilon)$$

$$f'(x) = (\frac{\pi}{۲})۲\sin(\frac{\pi}{۲}x)\cos(\frac{\pi}{۲}x) = \frac{\pi}{۲}\sin(\pi x) \rightarrow f''(x) = \frac{\pi^۲}{۲}\cos(\pi x) \rightarrow f'''(x) = -\frac{\pi^۳}{۲}\sin(\pi x)$$

$$\rightarrow |f'''(x)|_{x\in[۰,۲]} \le \frac{\pi^۳}{۲} \rightarrow |E| \le \frac{|x(x-۱)(x-۲)|}{۱۲}\pi^۳ \;:\; g(x) = x(x-۱)(x-۲) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲x \rightarrow$$

$$g'(x) = ۳x^۲ - ۶x + ۲ = ۰ \rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۳}}{۳} \rightarrow g(۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}}) = -۰/۳۸۵ \quad , \quad g(۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}}) = -۰/۲۵ \rightarrow$$

$$\max|g(x)|\Big|_{x\in[۰,۲]} = ۰/۳۸۵ \Rightarrow |E| \le \frac{۰/۳۸۵}{۱۲}\pi^۳ \simeq ۱$$

۶- $\Delta = hD + \frac{h^۲}{۲!}D^۲ + \frac{h^۳}{۳!}D^۳ + \ldots \to \Delta^۵ \propto h^۵$

$$D^۲ = \frac{۱}{h^۲}\left(\Delta - \frac{\Delta^۲}{۲} + \frac{\Delta^۳}{۳} - + \ldots\right)^۲ \to D^۲ = \frac{۱}{h^۲}[\Delta^۲ + (-\frac{\Delta^۲}{۲})^۲ + ۲(\Delta)(-\frac{\Delta^۲}{۲}) + ۲(\Delta)(\frac{\Delta^۳}{۳})] \to$$

$$D^۲ = \frac{۱}{h^۲}(\Delta^۲ - \Delta^۳ + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴) \to y_i'' = \frac{\Delta^۲ y_i - \Delta^۳ y_i + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴ y_i}{h^۲}$$

$$f(x) = \sin^۲(\frac{\pi}{۲}x)\ ,\ x_۵ = ۲, x_۴ = ۱/۵, x_۳ = ۱, x_۲ = ۰/۵, x_۱ = ۰ \to$$

$$y_۵ = ۰, y_۴ = ۰/۵, y_۳ = ۱, y_۲ = ۰/۵, y_۱ = ۰$$

i	x	y	Δy	$\Delta^۲ y$	$\Delta^۳ y$	$\Delta^۴ y$
1	0	0	0.5	0	-1	2
2	0.5	0.5	0.5	-1	1	
3	1	1	-0.5	0		
4	1.5	0.5	-0.5			
5	2	0				

$$y_۱'' = \frac{\Delta^۲ y_۱ - \Delta^۳ y_۱ + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴ y_۱}{h^۲} = \frac{۰ - (-۱) + \frac{۱۱}{۱۲}(۲)}{(۰/۵)^۲} = \frac{۳۴}{۳}$$

۷- $y' = \frac{۱}{x+y} = f(x,y)\ ,\ y(۰) = ۱ = y_۰\ ,\ x_۰ = ۰\ ,\ h = ۰/۱\ ,\ x \in [۰,۰/۵]$

در این روش خطا با مربع h متناسب است. $۳h^۲ = ۰/۰۳$ پس دقت کار یک رقم اعشار بوده و محاسبات میانی را با دو رقم اعشار انجام می دهیم.

$$y_۱ = y(۰/۱) = y_۰ + hf(x_۰, y_۰) = ۱ + ۰/۱f(۰,۱) = ۱/۱۰$$

$$y_۲ = y(۰/۲) = y_۱ + hf(x_۱, y_۱) = ۱/۱ + ۰/۱f(۰/۱, ۱/۱) = ۱/۱۸$$

$$y_۳ = y(۰/۳) = y_۲ + hf(x_۲, y_۲) = ۱/۱۸ + ۰/۱f(۰/۲, ۱/۱۸) = ۱/۲۵$$

$$y_۴ = y(۰/۴) = y_۳ + hf(x_۳, y_۳) = ۱/۲۵ + ۰/۱f(۰/۳, ۱/۲۵) = ۱/۳۱$$

$$y_۵ = y(۰/۵) = y_۴ + hf(x_۴, y_۴) = ۱/۳۱ + ۰/۱f(۰/۴, ۱/۳۱) = ۱/۳۷$$

۸- $y'' = xy \to \begin{cases} y' = p = f_۱(x,y,p) \\ p' = xy = f_۱(x,y,p) \end{cases}\ ,\ \begin{cases} y(۰) = ۱ \\ p(۰) = -۱ \end{cases}\ ,\ h = ۰/۵\ ,\ x \in [۰,۱]$

در این روش خطا با مکعب h متناسب است. پ $۳h^۳ = ۰/۳۷۵$ س دقت کار یک رقم اعشار هم نیست و محاسبات میانی را با یک رقم اعشار کافی است.

$$\begin{cases} y_{i+۰/۵} = y_i + \dfrac{h}{۲} f_۱(x_i, y_i, p_i) \\ y_{i+۱} = y_i + hf_۱(x_{i+۰/۵}, y_{i+۰/۵}, p_{i+۰/۵}) \\ p_{i+۰/۵} = p_i + \dfrac{h}{۲} f_۲(x_i, y_i, p_i) \\ p_{i+۱} = p_i + hf_۲(x_{i+۰/۵}, y_{i+۰/۵}, p_{i+۰/۵}) \end{cases} \; , \; i = ۰ : \begin{cases} y_{۰/۵} = y(۰/۲۵) = y_۰ + \dfrac{h}{۲} f_۱(x_۰, y_۰, p_۰) \\ y_۱ = y(۰/۵) = y_۰ + hf_۱(x_{۰/۵}, y_{۰/۵}, p_{۰/۵}) \\ p_{۰/۵} = p(۰/۲۵) = p_۰ + \dfrac{h}{۲} f_۲(x_۰, y_۰, p_۰) \\ p_۱ = p(۰/۵) = p_۰ + hf_۲(x_{۰/۵}, y_{۰/۵}, p_{۰/۵}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y_{۰/۵} = y(۰/۲۵) = ۱ + ۰/۲۵(-۱) = ۰/۷۵ \\ y_۱ = y(۰/۵) = ۱ + ۰/۵(-۱) = -۰/۵ \\ p_{۰/۵} = p(۰/۲۵) = -۱ + ۰/۲۵(۰)(۱) = -۱ \\ p_۱ = p(۰/۵) = -۱ + ۰/۵(۰/۲۵)(۰/۷۵) = -۰/۹۱ \end{cases} \; , \; i = ۱ : \begin{cases} y_{۱/۵} = y(۰/۷۵) = y_۱ + \dfrac{h}{۲} f_۱(x_۱, y_۱, p_۱) \\ y_۲ = y(۱) = y_۱ + hf_۱(x_{۱/۵}, y_{۱/۵}, p_{۱/۵}) \\ p_{۱/۵} = p(۰/۷۵) = p_۱ + \dfrac{h}{۲} f_۲(x_۱, y_۱, p_۱) \\ p_۲ = p(۱) = p_۱ + hf_۲(x_{۱/۵}, y_{۱/۵}, p_{۱/۵}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} y_{۱/۵} = y(۰/۷۵) = -۰/۵ + (۰/۲۵)(-۰/۹۱) = -۰/۷۳ \\ y_۲ = y(۱) = -۰/۵ + (۰/۵)(-۰/۹۷) = -۰/۹۹ \\ p_{۱/۵} = p(۰/۷۵) = -۰/۹۱ + (۰/۲۵)(۰/۵)(-۰/۵) = -۰/۹۷ \\ p_۲ = p(۱) = -۰/۹۱ + (۰/۵)(۰/۷۵)(-۰/۷۳) = -۱/۱۸ \end{cases}$$

$$\int_۲^۳ \frac{۱}{x-۱} dx \rightarrow f(x) = (x-۱)^{-۱} \rightarrow f'(x) = -(x-۱)^{-۲} \rightarrow f''(x) = ۲(x-۱)^{-۳} \rightarrow f'''(x) = -۶(x-۱)^{-۴}$$ ۹-

$$f^{(۴)}(x) = ۲۴(x-۱)^{-۵} \rightarrow M_۴ = \max |f^{(۴)}(x)|_{x\in[۲,۳]} = ۲۴ \; , \; \Delta I = ۰/۰۰۵$$

$$E = -\frac{(\Delta x)^۵}{۱۸۰} n f^{(۴)}(\varepsilon) \xrightarrow{\Delta x = \frac{b-a}{n}} \rightarrow |E| \le \frac{(b-a)^۵}{۱۸۰n^۴} M_۴ \le \Delta I \rightarrow n \ge \sqrt[۴]{\frac{M_۴ (b-a)^۵}{۱۸۰\Delta I}} = \sqrt[۴]{\frac{۲۴(۳-۲)^۵}{۱۸۰(۰/۰۰۵)}} = ۲/۲۷$$

$$n \ge ۴ \rightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n} = ۰/۲۵$$

$$A = \frac{\Delta x}{۳}[f(۲) + ۴f(۲/۲۵) + ۲f(۲/۵) + ۴f(۲/۷۵) + f(۳)] = \frac{۰/۲۵}{۳}[۱ + ۳/۲۰۰ + ۱/۳۳۳ + ۲/۲۸۶ + ۰/۵]$$

$$A = ۰/۶۹۳ \quad , \quad |E| \le \frac{(b-a)^۵}{۱۸۰n^۴} M_۴ = \frac{۱}{۱۸۰(۴)^۴}(۲۴) = ۰/۰۰۰۵۲$$

$$f(x) = ۱ \rightarrow \int_۰^{۶a} ۱dx = \omega_۱ + \omega_۲ + \omega_۳ \rightarrow \omega_۱ + \omega_۲ + \omega_۳ = ۶a \quad \boxed{۱}$$ ۱۰-

$$f(x) = x \rightarrow \int_۰^{۶a} xdx = \omega_۱ a + \omega_۲(۳a) + \omega_۳(۵a) \rightarrow \omega_۱ + ۳\omega_۲ + ۵\omega_۳ = ۱۸a \quad \boxed{۲}$$

$$f(x) = x^۲ \rightarrow \int_۰^{۶a} x^۲ dx = \omega_۱ a^۲ + \omega_۲(۳a)^۲ + \omega_۳(۵a)^۲ \rightarrow \omega_۱ + ۹\omega_۲ + ۲۵\omega_۳ = ۷۲a \quad \boxed{۳}$$

$$\boxed{۲} - \boxed{۱} \rightarrow ۲\omega_۲ + ۴\omega_۳ = ۱۲a \; , \; \boxed{۳} - \boxed{۲} \rightarrow ۸\omega_۲ + ۲۴\omega_۳ = ۶۶a \rightarrow \omega_۳ = ۲/۲۵a \; , \; \omega_۲ = ۱/۵a \; ,$$

$$\omega_1 = ۲/۲۵a \rightarrow \int_0^{۶a} f(x)dx \simeq ۲/۲۵af(a) + ۱/۵af(۳a) + ۲/۲۵af(۵a)$$

$$f(x) = x^۳ \rightarrow \int_0^{۶a} x^۳dx = ۳۲۴a^۴ \ , \ ۲/۲۵af(a) + ۱/۵af(۳a) + ۲/۲۵f(۵a) = ۳۲۴a^۴$$

برای چندجمله ای درجه ۳ نیز صادق است.