پاسخ امتحان پایان ترم ۱۴۰۳/۱۰/۳۰

۱-

$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۲x_۲ + ax_۳ = -۲ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ + ax_۳ = -۳ \\ ۲x_۱ + ax_۲ + ۳x_۳ = -۱ \end{cases} \to \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & a & -۲ \\ ۲ & ۳ & a & -۳ \\ ۲ & a & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{a}{۳} & \frac{-۲}{۳} \\ ۲ & ۳ & a & -۳ \\ ۲ & a & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{a}{۳} & \frac{-۲}{۳} \\ ۰ & \frac{۵}{۳} & \frac{a}{۳} & \frac{-۵}{۳} \\ ۰ & a-\frac{۴}{۳} & ۳-\frac{۲a}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{a}{۳} & \frac{-۲}{۳} \\ ۰ & ۱ & \frac{a}{۵} & -۱ \\ ۰ & a-\frac{۴}{۳} & ۳-\frac{۲a}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{a}{۵} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{a}{۵} & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵} & a-۱ \end{bmatrix}$$

$$\text{if } ۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵} \neq ۰ \; (a \neq ۳, -۵) \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{a}{۵} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{a}{۵} & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{a-۱}{۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{a}{۵}\frac{a-۱}{۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵}} \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱-\frac{a}{۵}\frac{a-۱}{۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵}} \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{a-۱}{۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵}} \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{cases} x_۱ = -\frac{a}{۵}\frac{a-۱}{۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵}} \\ x_۲ = -۱-\frac{a}{۵}\frac{a-۱}{۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵}} \\ x_۳ = \frac{a-۱}{۳-\frac{۲a}{۵}-\frac{a^۲}{۵}} \end{cases} \quad \text{if} \begin{cases} a = ۳ \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰۶ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰/۶ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \to r(A) = ۲ \neq r(Ab) = ۳ \quad \text{no answer} \\ \text{if } a = -۵ \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۶ \end{bmatrix} \to r(A) = ۲ \neq r(Ab) = ۳ \quad \text{no answer} \end{cases}$$

۲-

$$\begin{cases} ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۵x_۳ = -۲ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳ = -۳ \\ ۲x_۱ + ۵x_۲ + ۳x_۳ = -۱ \end{cases} \to A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۳ \\ -۱ \end{bmatrix}, \; x^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \; C = C^{-1} = I \; ,$$

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۶ \\ -۶ \end{bmatrix},\ w = C^{-1}r^{(0)} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۶ \\ -۶ \end{bmatrix},\quad v^{(1)} = C^{-t}w = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۶ \\ -۶ \end{bmatrix},\ \alpha = \langle w, w \rangle = ۸۸$$

$$u = Av^{(1)} = \begin{bmatrix} -۵۴ \\ -۵۶ \\ -۵۶ \end{bmatrix} \to t_۱ = \frac{\alpha}{\langle v^{(k)}, u \rangle} = \frac{۸۸}{۸۸۸} \Rightarrow x^{(1)} = x^{(0)} + t_۱ v^{(1)} = \begin{bmatrix} -۰/۳۹۶۴ \\ ۰/۴۰۵۴ \\ -۰/۵۹۴۶ \end{bmatrix}$$

-۳

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۲ & ۳ & a \\ ۲ & a & ۳ \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۲ & & ۰ \\ ۲ & & \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{a}{۳} \\ ۰ & ۱ & \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$l_{۲۲} = a_{۲۲} - \sum_{k=۱}^{۱} l_{۲k}u_{k۲} = \frac{۵}{۳},\ u_{۲۳} = \frac{a_{۲۳} - \sum_{k=۱}^{۱} l_{۲k}u_{k۳}}{l_{۲۲}} = \frac{a}{۵},\ l_{۳۲} = a_{۳۲} - \sum_{k=۱}^{۱} l_{۳k}u_{k۲} = a - \frac{۴}{۳}$$

$$l_{۳۳} = a_{۳۳} - \sum_{k=۱}^{۲} l_{۳k}u_{k۳} = -\frac{a^۲}{۵} - \frac{۲a}{۵} + ۳ \to L = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۲ & \frac{۵}{۳} & ۰ \\ ۲ & a - \frac{۴}{۳} & -\frac{a^۲}{۵} - \frac{۲a}{۵} + ۳ \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{a}{۳} \\ ۰ & ۱ & \frac{a}{۵} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

-۴

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۵ & ۳ \end{bmatrix} = A_۱ \to p_۱ = \frac{۱}{۱}tr(A_۱) = ۹,\ A_۲ = A(A_۱ - p_۱I) = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۶ & ۲ & ۵ \\ ۲ & -۶ & ۵ \\ ۲ & ۵ & -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۱۹ & -۵ \\ ۴ & ۱۱ & -۵ \\ ۴ & -۱۱ & ۱۷ \end{bmatrix}$$

$$\to p_۲ = \frac{۱}{۲}tr(A_۲) = ۱۲ \to A_۳ = A(A_۲ - p_۲I) = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱۶ & ۱۹ & -۵ \\ ۴ & -۱ & -۵ \\ ۴ & -۱۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲۰ \end{bmatrix} \to$$

$$p_۳ = \frac{۱}{۲}tr(A_۳) = -۲۰ \to\to |A| = -۲۰,\ \lambda^۳ - ۹\lambda^۲ - ۱۲\lambda + ۲۰ = ۰,\ A^{-۱} = \frac{۱}{-۲۰}\begin{bmatrix} -۱۶ & ۱۹ & -۵ \\ ۴ & -۱ & -۵ \\ ۴ & -۱۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\| A \|_\infty = \max_i \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}| = \max(|۳|+|۲|+|۵|, |۲|+|۳|+|۵|, |۲|+|۵|+|۳|) = ۱۰$$

$$\| A^{-۱} \|_\infty = \max\left(\left|\frac{-۱۶}{-۲۰}\right| + \left|\frac{۱۹}{-۲۰}\right| + \left|\frac{-۵}{-۲۰}\right|, \left|\frac{۴}{-۲۰}\right| + \left|\frac{-۱}{-۲۰}\right| + \left|\frac{-۵}{-۲۰}\right|, \left|\frac{۴}{-۲۰}\right| + \left|\frac{-۱۱}{-۲۰}\right| + \left|\frac{۵}{-۲۰}\right|\right) = ۲$$

$$c_\infty(A) = \| A \|_\infty \| A^{-۱} \|_\infty = ۲۰$$

۵-

$$\begin{cases} ۳x_۱-۲x_۲-۲=۰=f \\ \frac{۱}{x_۱}-\frac{۱}{x_۲}+۱=۰=g \end{cases} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_۱}=۳,\frac{\partial f}{\partial x_۲}=-۲,\frac{\partial g}{\partial x_۱}=\frac{-۱}{x_۱^۲},\frac{\partial g}{\partial x_۲}=\frac{۱}{x_۲^۲}\rightarrow$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۳ & -۲ \\ \frac{-۱}{x_۱^۲} & \frac{۱}{x_۲^۲} \end{vmatrix}=\frac{۳}{x_۲^۲}-\frac{۲}{x_۱^۲}, x_۲=\frac{۱}{\sqrt{۲}}, x_۱=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\rightarrow \Delta=۰\ , x_۲=۰/۴, x_۱=۰/۸\rightarrow \Delta=۱۵/۶۲۵$$

پس نقطه $x_۲=۱\ ,\ x_۱=۰/۵$ مناسب است.

$$\begin{cases} ۳h_n-۲k_n=-(۳x_{۱n}-۲x_{۲n}-۲) \\ \frac{-۱}{x_{۱n}^۲}h_n+\frac{۱}{x_{۲n}^۲}k_n=-(\frac{۱}{x_{۱n}}-\frac{۱}{x_{۲n}}+۱) \end{cases}\rightarrow \Delta_{x_۱}=\begin{vmatrix} -(۳x_{۱n}-۲x_{۲n}-۲) & -۲ \\ -(\frac{۱}{x_{۱n}}-\frac{۱}{x_{۲n}}+۱) & \frac{۱}{x_{۲n}^۲} \end{vmatrix}=-\frac{۳x_{۱n}}{x_{۲n}^۲}+\frac{۴}{x_{۲n}}+\frac{۲}{x_{۲n}^۲}-\frac{۲}{x_{۱n}}-۲$$

$$\Delta_{x_۲}=\begin{vmatrix} ۳ & -(۳x_{۱n}-۲x_{۲n}-۲) \\ \frac{-۱}{x_{۱n}^۲} & -(\frac{۱}{x_{۱n}}-\frac{۱}{x_{۲n}}+۱) \end{vmatrix}=\frac{-۶}{x_{۱n}}+\frac{۳}{x_{۲n}}+\frac{۲x_{۲n}}{x_{۱n}^۲}+\frac{۲}{x_{۱n}^۲}-۳$$

$$x_{۱n+۱}=x_{۱n}+\frac{\Delta_{x_۱}}{\Delta}=x_{۱n}+\frac{-\frac{۳x_{۱n}}{x_{۲n}^۲}+\frac{۴}{x_{۲n}}+\frac{۲}{x_{۲n}^۲}-\frac{۲}{x_{۱n}}-۲}{\frac{۳}{x_{۲n}^۲}-\frac{۲}{x_{۱n}^۲}}=\frac{\frac{۴}{x_{۲n}}+\frac{۲}{x_{۲n}^۲}-\frac{۴}{x_{۱n}}-۲}{\frac{۳}{x_{۲n}^۲}-\frac{۲}{x_{۱n}^۲}}$$

$$x_{۲n+۱}=x_{۲n}+\frac{\Delta_{x_۱}}{\Delta}=x_{۲n}+\frac{\frac{-۶}{x_{۱n}}+\frac{۳}{x_{۲n}}+\frac{۲x_{۲n}}{x_{۱n}^۲}+\frac{۲}{x_{۱n}^۲}-۳}{\frac{۳}{x_{۲n}^۲}-\frac{۲}{x_{۱n}^۲}}=\frac{\frac{-۶}{x_{۱n}}+\frac{۶}{x_{۲n}}+\frac{۲}{x_{۱n}^۲}-۳}{\frac{۳}{x_{۲n}^۲}-\frac{۲}{x_{۱n}^۲}}$$

$$\begin{cases} x_۱=۰/۸ \\ x_۲=۰/۴ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۱=۰/۹۹۲۰ \\ x_۲=۰/۴۸۸۰ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۱=۰/۹۹۹۸ \\ x_۲=۰/۴۹۹۷ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۱=۱/۰۰۰۰ \\ x_۲=۰/۵۰۰۰ \end{cases}$$

چون خطای مطلق بین مرحله دوم و سوم به ترتیب برابر ۰/۰۰۰۲ و ۰/۰۰۰۳ است، نتیجه از دقت ۳ رقم اعشار برخوردار است.

۶-

$$\begin{cases} ۳x_۱-۲x_۲-۲=۰=f_۱ \\ \frac{۱}{x_۱}-\frac{۱}{x_۲}+۱=۰=f_۲ \end{cases}\rightarrow x^{(۰)}=\begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۴ \end{bmatrix}\rightarrow g^{(۰)}=f_۱^۲+f_۲^۲=۰/۲۲۲۵\quad ,\quad F=\begin{bmatrix} -۰/۴ \\ -۰/۲۵ \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_۱}{\partial x_۱}=۳,\frac{\partial f_۱}{\partial x_۲}=-۲,\frac{\partial f_۲}{\partial x_۱}=\frac{-۱}{x_۱^۲},\frac{\partial f_۲}{\partial x_۲}=\frac{۱}{x_۲^۲}\rightarrow J=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱/۵۶۲۵ & ۶/۲۵ \end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\nabla g=۲J^TF=۲\begin{bmatrix} ۳ & -۱/۵۶۲۵ \\ -۲ & ۶/۲۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۰/۴ \\ -۰/۲۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱/۶۱۸۷ \\ -۱/۵۲۵۰ \end{bmatrix}\rightarrow\left\|\nabla g(x^{(۰)})\right\|=۲/۲۲۴۰\rightarrow z=\frac{\nabla g(x^{(۰)})}{\left\|\nabla g(x^{(۰)})\right\|}=\begin{bmatrix} -۰/۷۲۷۹ \\ -۰/۶۸۵۷ \end{bmatrix}$$

$$\alpha_۱=۰\rightarrow h_۱=g(\begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۴ \end{bmatrix})=۰/۲۲۲۵, \alpha_۳=۱\rightarrow h_۳=g(\begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۰/۷۲۷۹ \\ -۰/۶۸۵۷ \end{bmatrix})=g(\begin{bmatrix} ۱/۵۲۷۹ \\ ۱/۰۸۵۷ \end{bmatrix})=۰/۷۰۷۸>h_۱$$

$$\alpha_{۳} = ۰/۵ \to h_{۳} = g(\begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۴ \end{bmatrix} - ۰/۵ \begin{bmatrix} -۰/۷۲۷۹ \\ -۰/۶۸۵۷ \end{bmatrix}) = g(\begin{bmatrix} ۱/۱۶۳۹ \\ ۰/۷۴۲۹ \end{bmatrix}) = ۰/۲۶۳۲ > h_{۱}$$

$$\alpha_{۳} = ۰/۲۵ \to h_{۳} = g(\begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۴ \end{bmatrix} - ۰/۲۵ \begin{bmatrix} -۰/۷۲۷۹ \\ -۰/۶۸۵۷ \end{bmatrix}) = g(\begin{bmatrix} ۰/۹۸۲۰ \\ ۰/۵۷۱۴ \end{bmatrix}) = ۰/۱۱۰۸ < h_{۱}$$

$$\alpha_{۲} = ۰/۱۲۵ \to h_{۳} = g(\begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۴ \end{bmatrix} - ۰/۱۲۵ \begin{bmatrix} -۰/۷۲۷۹ \\ -۰/۶۸۵۷ \end{bmatrix}) = g(\begin{bmatrix} ۰/۸۹۱۰ \\ ۰/۴۸۵۷ \end{bmatrix}) = ۰/۰۹۳۱$$

$$h(\alpha) = ۰/۲۲۲۵ + (۰/۰۹۳۱ - ۰/۲۲۲۵)(\frac{\alpha}{۰/۱۲۵-۰}) + \frac{۰/۱۱۰۸ - ۲(۰/۰۹۳۱) + ۰/۲۲۲۵}{۲}(\frac{\alpha}{۰/۱۲۵-۰})(\frac{\alpha}{۰/۱۲۵-۰} - ۱)$$

$$h(\alpha) = ۰/۲۲۲۵ - ۱/۰۳۵۰\alpha + ۰/۵۸۸۲\alpha(۸\alpha - ۱) \to h'(\alpha) = -۱/۰۳۵۰ + ۹/۴۱۱۹\alpha - ۰/۵۸۸۲ = ۰ \to \hat{\alpha} = ۰/۱۷۲۵$$

$$x^{(۱)} = x^{(۰)} - \hat{\alpha} z = \begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۴ \end{bmatrix} - ۰/۱۷۲۵ \begin{bmatrix} -۰/۷۲۷۹ \\ -۰/۶۸۵۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۹۲۵۶ \\ ۰/۵۱۸۳ \end{bmatrix}$$

به دقت خاصی نرسیده است. زیرا اختلاف بین مقادیر حاصل و مقدار اولیه نشان از دقت یک رقم اعشار هم نیست.

۷-

$$y = ax + \frac{b}{x} \to f_{۱}(x) = x , f_{۲}(x) = \frac{۱}{x} \ , \ Y = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} , \ F = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۰/۵ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} , \ c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$F^T F = \begin{bmatrix} -۱ & ۰/۵ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۰/۵ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۲۵ & ۳ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} , \ F^T Y = \begin{bmatrix} -۱ & ۰/۵ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} ۲/۲۵ & ۳ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۰}{۳} \\ -\frac{۵}{۶} \end{bmatrix} \to y^{*} = \frac{۱۰}{۳}x - \frac{۵}{۶x} \ , \ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰/۵ \\ ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -۲/۵ \\ ۰ \\ ۲/۵ \end{bmatrix} \to$$

$$\sum_{j=۱}^{۳} \delta_j^{۲} = (-۳ - (-۲/۵))^{۲} + (۰ - ۰)^{۲} + (۲ - ۲/۵)^{۲} = ۰/۵$$

۸-

$$y = \frac{۱}{ax^{۲} + b} \to \frac{۱}{y} = ax^{۲} + b \to f_{۱}(x) = x^{۲} , f_{۲}(x) = ۱ \ , \ Y = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۱/۲۵\sqrt{۲} \end{bmatrix} , \ F = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۲/۲۵\sqrt{۲} & ۱\sqrt{۲} \end{bmatrix} , \ c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$F^T F = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲/۲۵\sqrt{۲} \\ ۱ & ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۲/۲۵\sqrt{۲} & ۱\sqrt{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴/۱۲۵ & ۶/۵ \\ ۶/۵ & ۴ \end{bmatrix} , \ F^T Y = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۲/۲۵\sqrt{۲} \\ ۱ & ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۱/۲۵\sqrt{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷/۶۲۵ \\ ۲/۵ \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} ۱۴/۱۲۵ & ۶/۵ \\ ۶/۵ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷/۶۲۵ \\ ۲/۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \to \frac{۱}{y} = x^{۲} - ۱ \ , \ \begin{bmatrix} ۰ \\ \sqrt{۲} \\ ۱/۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۱/۲۵ \end{bmatrix} \to \sum_{j=۱}^{۳} w_j \delta_j^{۲} = ۰$$

۹-

$$\begin{cases} ۲x_۱+۵x_۲\le ۱۰۰ \\ ۵x_۱+۸x_۳\le ۴۰۰ \\ \forall x_i\ge ۰ \end{cases},\ f=x_۱+۳x_۲+۸x_۳\rightarrow \begin{cases} ۲x_۱+۵x_۲+x_۴=۱۰۰ \\ ۵x_۱+۸x_۳+x_۵=۴۰۰ \\ \forall x_i\ge ۰ \end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱۰۰ \\ ۵ & ۰ & \boxed{۸} & ۰ & ۱ & ۴۰۰ \\ -۱ & -۳ & \boxed{-۸} & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & \boxed{۵} & ۰ & ۱ & ۰ & ۱۰۰ \\ \frac{۵}{۸} & ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۸} & ۵۰ \\ ۴ & \boxed{-۳} & ۰ & ۰ & ۱ & ۴۰۰ \end{bmatrix}\rightarrow \begin{bmatrix} ۰/۴ & ۱ & ۰ & ۰/۲ & ۰ & ۲۰ \\ \frac{۵}{۸} & ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۸} & ۵۰ \\ ۵/۲ & ۰ & ۰ & ۰/۶ & ۱ & ۴۶۰ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_۱=x_۴=x_۵=۰ \\ x_۲=۲۰\ ,\ x_۳=۵۰ \end{cases},\ f_{max}=۴۶۰$$

تعریف دوگان :

$$\begin{cases} ۲x_۱+۵x_۲\le ۱۰۰ \\ ۵x_۱+۸x_۳\le ۴۰۰ \\ \forall x_i\ge ۰ \end{cases},\ f=x_۱+۳x_۲+۸x_۳\rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۸ \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} ۱۰۰ \\ ۴۰۰ \end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}\rightarrow$$

$$A'=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۵ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}\rightarrow \begin{cases} ۲y_۱+۵y_۲\ge ۱ \\ ۵y_۱\ge ۳ \\ ۸y_۲\ge ۸ \\ \forall y_i\ge ۰ \end{cases},\ F=۱۰۰y_۱+۴۰۰y_۲$$

جواب مسئله دوگان : $F_{min}=۴۶۰\ ,\ y_۲=۱\ ,\ y_۱=۰/۶$

۱۰- $L=x^۲+y^۲+z^۲-\lambda(xy+yz-۱۰۰)\rightarrow \frac{\partial L}{\partial x}=۲x-\lambda y=۰\ \boxed{۱},\ \frac{\partial L}{\partial y}=۲y-\lambda x-\lambda z=۰\ \boxed{۲},$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=۲z-\lambda y=۰\ \boxed{۳}\xrightarrow{\boxed{۱}}x=z\xrightarrow{\boxed{۲}}۲y-۲\lambda x=۰\xrightarrow{\boxed{۱}}y-\frac{۲x}{y}x=۰\rightarrow y=\pm\sqrt{۲}x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=۰\rightarrow xy+yz=۱۰۰\rightarrow \begin{cases} x\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}xx=۱۰۰ \\ -x\sqrt{۲}x-\sqrt{۲}xx=۱۰۰ \end{cases}\rightarrow \begin{cases} x=\pm ۵\sqrt[۴]{۲}=z \\ \text{no answer} \end{cases}\rightarrow y=\pm ۵\sqrt[۴]{۸}\rightarrow \lambda=\pm\sqrt{۲}$$

$$\begin{cases} x=۵\sqrt[۴]{۲}=z\ ,\ y=۵\sqrt[۴]{۸}\ ,\ \lambda=\sqrt{۲} \\ x=-۵\sqrt[۴]{۲}=z\ ,\ y=-۵\sqrt[۴]{۸},\ \lambda=\sqrt{۲} \\ x=۵\sqrt[۴]{۲}=z\ ,\ \ ,\ y=-۵\sqrt[۴]{۸},\ \lambda=-\sqrt{۲} \\ x=-۵\sqrt[۴]{۲}=z\ ,\ y=۵\sqrt[۴]{۸},\ \lambda=-\sqrt{۲} \end{cases},\ L_{min}=۱۰۰\sqrt{۲}\ :\ H=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\text{ is PD }\ ,\ \lambda>۰$$