

### فقط حداکثر به ۵ سوال پاسخ دهید

- ۱- در هر یک از زوج اعداد زیر، اولین و دومین عدد به ترتیب تحقیقی و تقریبی هستند. خطای مطلق و نسبی و درصد هر یک را تعیین کنید.  
 $(\pi^2, 9/8696)$      $(e^3, 20/09)$
- ۲- در محاسبه وتر یک مثلث قائم الزاویه که طول دو ضلع دیگر آن  $\pi$  و  $e$  است، از ۳ رقم اعشار استفاده شده است و نتیجه نیز به ۳ رقم اعشار گرد شده است. مقدار وتر چقدر است؟ با تعیین کران خطا، در مورد دقت نتیجه چه می توان گفت؟
- ۳- در مورد ریشه های مثبت، منفی، صفر، مختلط و کسری معادله  $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$  بر اساس قضایای مربوطه اظهار نظر کنید. کران بالا و پائین اندازه ریشه ها چیست؟
- ۴- بر اساس روش نیوتن رافسون، ریشه معادله  $f(x) = \cos(x) - x$ ، را با نقطه شروع  $x = 1$  و با دقت ۲ رقم اعشار تعیین کنید.
- ۵- می خواهیم تابع  $y = \cos(\pi x)$  را در نقاط  $x = -0.5, 0, 0.5$  درونیابی کنیم. با استفاده از روش درونیابی لاگرانژ، تابع درونیاب را تعیین نموده و کران خطا را بدست آورید. بر این اساس، دقت درونیابی برای همه نقاط  $x \in [-0.5, 0.5]$  چیست؟
- ۶- فرمولی برای مشتق سوم با خطایی از مرتبه  $O(h^2)$  بر اساس اپراتور تفاضل معکوس بیابید.
- ۷- معادله دیفرانسیل درجه ۲،  $y'' + e^{-x}y' + y = x$  را با شرایط اولیه  $y(0) = 1, y'(0) = -1$ ، بر اساس روش اویلر ساده در بازه  $[0, 0.3]$  با طول گام  $0.1$  حل کنید.
- ۸- معادله دیفرانسیل  $y' = \ln(x + y)$  را با شرایط اولیه  $y(0) = 1$ ، بر اساس روش رانگ-کوتا مرتبه ۴ (از نوع کوتا) در بازه  $[0, 0.1]$  با طول گام  $0.1$  حل کنید.
- ۹- انتگرال  $I = \int_1^{\pi} \cos(3x) dx$  را با استفاده از روش سیمسون با دقت ۲ رقم اعشار تعیین کنید. سپس مقدار حاصل را با استفاده از روش سیمسون اصلاح شده بهبود ببخشید.
- ۱۰- بر اساس روش نقطه میانی انتگرال  $\int_0^2 x e^{-x} dx$  را با دقت ۱ رقم اعشار بدست آورید.

قضیه Rouché Bound: برای  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  داریم:

$$\text{حد بالای اندازه ریشه‌ها: } 1 + \frac{1}{|a_n|} \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$$

$$\text{حد پائین اندازه ریشه‌ها: } \frac{|a_n|}{|a_n| + \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}}$$

$$\text{روش نیوتن-رافسون در تعیین ریشه معادله } f(x) = 0: x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

روش درونیابی لاگرانژ:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i \quad ; \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$E(x) = \frac{\phi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad , \quad \phi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$D = \frac{1}{h} \left( \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \dots \right) \quad , \quad \nabla = hD - \frac{h^2}{2!} D^2 + \frac{h^3}{3!} D^3 - \dots \quad \text{روابط میان اپراتور تفاضل معکوس و مشتق:}$$

فرمول حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول  $y' = f(x, y)$  بر اساس روش اویلر ساده:  $y_{i+1} \approx y_i + hf(x_i, y_i)$

روش رانگ کوتا مرتبه ۴ (از نوع کوتا) برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول  $y' = f(x, y)$ :

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \quad , \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \quad , \quad k_3 = hf\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i - \frac{1}{3}k_1 + k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_1 - k_2 + k_3) \quad , \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 + \frac{3}{4}k_3 + \frac{1}{4}k_4$$

روش انتگرال گیری سیمسون مرکب:  $\int_a^b f(x) dx$

$$A = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad , \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = h$$

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(5)}(\xi)$$

$$CS_n(f) = S_n(f) - \frac{h^4}{180} [f^{(4)}(b) - f^{(4)}(a)] \quad \text{فرمول انتگرال گیری سیمسون اصلاح شده:}$$

روش انتگرال گیری نقطه میانی:

$$\int_a^b f(x) dx \quad ; \quad \Delta x \left[ f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}\right) \right]$$

$$E = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \quad ; \quad a < \xi < b$$