جواب تمرین سری اول

-۱

<u>بدون قضیه :</u>

$$(۴/۳۸\,,۰/۶\%) \rightarrow r \le ۰/۰۰۶ \rightarrow \frac{\Delta Q}{|Q|} \le ۰/۰۰۶ \rightarrow \Delta Q \le ۰/۰۰۶|Q| \rightarrow \Delta Q \le ۰/۰۰۶(|Q_۱|+\Delta Q) \rightarrow$$

$$\Delta Q \le \frac{۰/۰۲۶۲۸}{۰/۹۹۴} \rightarrow \Delta Q \le ۰/۰۲۶ < ۰/۵(۱۰^{-۱}) \rightarrow$$

آخرین رقم با معنی صحیح اولین رقم اعشار است. پس عدد ۴/۳۸ دارای دو رقم با معنی صحیح است.

<u>با قضیه :</u> دارای دو رقم با معنی صحیح است. زیرا : $r \le ۰/۰۰۶ < ۵\times۱۰^{-۲} \rightarrow$

<u>بدون قضیه :</u>

$$(۱۱۲۳۴\,,۰/۲\%) \rightarrow r \le ۰/۰۰۲ \rightarrow \frac{\Delta Q}{|Q|} \le ۰/۰۰۲ \rightarrow \Delta Q \le ۰/۰۰۲|Q| \rightarrow \Delta Q \le ۰/۰۰۲(|Q_۱|+\Delta Q) \rightarrow$$

$$\Delta Q \le \frac{۲۲/۴۶۸}{۰/۹۹۸} \rightarrow \Delta Q \le ۲۲/۵ < ۰/۵(۱۰^{۲}) \rightarrow$$

آخرین رقم با معنی صحیح رقم صدگان (با ارزش $۱۰^{۲}$) است. پس عدد ۱۱۲۳۴ دارای سه رقم با معنی صحیح است.

<u>با قضیه :</u> دارای سه رقم معنی صحیح است. زیرا : $r \le ۰/۰۰۲ < ۵\times۱۰^{-۳} \rightarrow$

-۲ مسئله ۱۵ از فصل ۱ کتاب روشهای محاسبات عددی

$$\cos(x) \quad x=\frac{\pi}{۱۱} \;,\; x=\frac{\sqrt{۲}}{۵} \;,\; \varepsilon=۱۰^{-۴}$$

$$\cos(x)=۱-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-+\ldots+(-۱)^{n}\frac{x^{۲n}}{(۲n)!}+(-۱)^{n+۱}\frac{x^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}+\ldots$$

$$E=(-۱)^{n+۱}\frac{x^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!} \rightarrow |E| \le ۱۰^{-۴} \rightarrow \frac{(\frac{\pi}{۱۱})^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!} \le ۱۰^{-۴} \rightarrow n \ge ۲$$

$$\cos(x) \simeq ۱-\frac{(\frac{\pi}{۱۱})^{۲}}{۲!}+\frac{(\frac{\pi}{۱۱})^{۴}}{۴!}=۱-۰/۰۴۰۷۸+۰/۰۰۰۲۸=۰/۹۵۹۵۰$$

$$E=(-۱)^{n+۱}\frac{x^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!} \rightarrow |E| \le ۱۰^{-۴} \rightarrow \frac{(\frac{\sqrt{۲}}{۵})^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!} \le ۱۰^{-۴} \rightarrow n \ge ۲$$

$$\cos(x) \simeq ۱-\frac{(\frac{\sqrt{۲}}{۵})^{۲}}{۲!}+\frac{(\frac{\sqrt{۲}}{۵})^{۴}}{۴!}=۱-۰/۰۴۰۰۰+۰/۰۰۰۲۷=۰/۹۶۰۲۷$$

-۳ تابع ششم مسئله ۲ فصل ۲ از کتاب روشهای محاسبات عددی

$$f_{۶}(x)=۱۶x^{۵}-۲۰x^{۳}+x^{۲}+۵x-۰/۵=۰ \rightarrow$$

تعداد تغییر معادله برابر ۳ است. پس تعداد ریشه های مثبت آن ۳ یا ۱ است.

$$f_{۶}(-x)=-۱۶x^{۵}+۲۰x^{۳}+x^{۲}-۵x-۰/۵=۰ \rightarrow$$

تعداد تغییر معادله برابر ۲ است. پس تعداد ریشه های مثبت آن ۲ یا ۰ است. پس تعداد ریشه های منفی معادله اصلی برابر ۲ یا صفر است.

تعداد ریشه های معادله صفر آن برابر صفر است. چون ضریب ثابت معادله صفر نیست.

پس تعداد ریشه های معادله جهار حالت دارد :

الف- ۳ ریشه مثبت و ۲ ریشه منفی ب- ۳ ریشه مثبت و ۲ ریشه مختلط و مزدوج یکدیگر

پ- ۱ ریشه مثبت و ۲ ریشه منفی و ۲ ریشه مختلط و مزدوج یکدیگر

ت- ۱ ریشه مثبت و دو جفت ریشه مختلط و مزدوج یکدیگر

این معادله اگر ریشه کسری داشته باشد می توانید یکی از موارد ذیل باشد :

$$f_۶(x) = ۱۶x^۵ - ۲۰x^۳ + x^۲ + ۵x - ۰/۵ = ۰ \to ۳۲x^۵ - ۴۰x^۳ + ۲x^۲ + ۱۰x - ۱ = ۰ \to a_۰ = ۳۲ \ , \ a_n = ۱$$

$$\frac{\pm ۱}{\pm ۱, \pm ۲, \pm ۴, \pm ۸, \pm ۱۶, \pm ۳۲} \to \begin{cases} \pm ۱ \\ \frac{\pm ۱}{۲} \\ \frac{\pm ۱}{۴} \\ \frac{\pm ۱}{۸} \\ \frac{\pm ۱}{۱۶} \\ \frac{\pm ۱}{۳۲} \end{cases}$$

با جایگذاری هر یک از اعداد فوق، هیچکدام ریشه معادله نیستند.

محدوده ریشه $\frac{۱}{۴۱} \le |x| \le ۲/۲۵$ است. زیرا :

$$|x| \le ۱ + \frac{۱}{|a_۰|} \max\{|a_۱|, |a_۲|, \dots, |a_n|\} = ۱ + \frac{\max(۴۰, ۲, ۱۰, ۱)}{۳۲} = ۱ + \frac{۴۰}{۳۲} = ۲/۲۵$$

$$|x| \ge \frac{|a_n|}{|a_n| + \max\{|a_۰|, |a_۱|, \dots, |a_{n-۱}|\}} = \frac{۱}{۱ + \max(۳۲, ۴۰, ۲, ۱۰)} = \frac{۱}{۴۱}$$

-۴

$$x^۴ - ۵/۷x^۳ + ۲۶/۷x^۲ - ۴۲/۲۱x + ۶۹/۲۳ = ۰$$

e(0)	q(0)	e(1)	q(1)	e(2)	q(2)	e(3)	q(3)	e(4)
	5.7000		0.0000		0.0000		0.0000	
0.0000		-4.6842		-1.5809		-1.6401		0.0000
	1.0158		3.1033		-0.0592		1.6401	
0.0000		-14.3104		0.0302		45.4380		0.0000
	-13.2946		17.4439		45.3486		-43.7979	
0.0000		18.7767		0.0785		-43.8842		0.0000
	5.4821		-1.2543		1.3859		0.0863	
0.0000		-4.2961		-0.0867		-2.7327		0.0000
	1.1860		2.9551		-1.2601		2.8190	
0.0000		-10.7044		0.0370		6.1134		0.0000
	-9.5184		13.6965		4.8163		-3.2944	
0.0000		15.4031		0.0130		-4.1816		0.0000
	5.8847		-1.6936		0.6217		0.8872	
0.0000		-4.4330		-0.0048		-5.9674		0.0000
	1.4517		2.7346		-5.3409		6.8546	
0.0000		-8.3505		0.0094		7.6587		0.0000
	-6.8988		11.0945		2.3084		-0.8041	
0.0000		13.4291		0.0020		-2.6678		0.0000

e(0)	q(0)	e(1)	q(1)	e(2)	q(2)	e(3)	q(3)	e(4)
	6.5303		-2.3326		-0.3614		1.8637	
0.0000		-4.7968		0.0003		13.7576		0.0000
	1.7335		2.4645		13.3959		-11.8939	
0.0000		-6.8196		0.0016		-12.2150		0.0000
	-5.0861		9.2857		1.1793		0.3211	
0.0000		12.4506		0.0002		-3.3259		0.0000
	7.3645		-3.1647		-2.1468		3.6470	
0.0000		-5.3503		0.0001		5.6501		0.0000
	2.0142		2.1857		3.5032		-2.0031	
0.0000		-5.8059		0.0002		-3.2307		0.0000
	-3.7917		7.9918		0.2723		1.2276	
0.0000		12.2371		0.0000		-14.5648		0.0000
	8.4454		-4.2453		-14.2925		15.7924	
0.0000		-6.1513		0.0000		16.0933		0.0000
	2.2941		1.9060		1.8008		-0.3009	
0.0000		-5.1107		0.0000		-2.6891		0.0000
	-2.8166		7.0167		-0.8883		2.3882	
0.0000		12.7318		-0.0000		7.2297		0.0000

این مسئله با دقت ۳ رقم اعشار همگرا نمی شود. دو خطا به صفر میل نمی کند و در حال نوسان است که نشان می دهد دو جفت ریشه مختلط و مزدوج یکدیگر داریم . اولی دارای مجموع تقریبی $۷/۰۱۶۷+(-۲/۸۱۶۶)=۴/۲۰۰۱$ و حاصلضرب تقریبی $(۲/۲۹۴۱)(۷/۰۱۶۷)=۱۶/۰۹۷۰$ و دومی دارای مجموع تقریبی $۲/۳۸۸۲+(-۰/۸۸۸۳)=۱/۴۹۹۹$ و حاصلضرب تقریبی $(۱/۸۰۰۸)(۲/۳۸۸۲)=۴/۳۰۰۷$ است. اولی از معادله $x^{۲}-۴/۲۰۰۱x+۱۶/۰۹۷۰=۰$ و دومی از معادله $x^{۲}-۱/۴۹۹۹x+۴/۳۰۰۷=۰$ بدست می آیند.

چون روش در این مثال همگرا نمی شود، برای دانشجو ۱۰ مرحله کافی است.