جواب تمرین سری دوم

۱- مسئله ۱۰۳ فصل ۳ کتاب روشهای محاسبات عددی

$$\begin{cases}۱۶a_۱+۴b_۱+c_۱=۷۳\\ ۱۶a_۲+۴b_۲+c_۲=۷۳\end{cases},\ \begin{cases}۹a_۱+۳b_۱+c_۱=۳۶\\ ۲۵a_۲+۵b_۲+c_۲=۱۳۴\end{cases},\ ۸a_۱+b_۱=۸a_۲+b_۲\ ,\ a_۱=۰$$

$$\begin{cases}۴b_۱+c_۱=۷۳\\ ۳b_۱+c_۱=۳۶\end{cases}\rightarrow b_۱=۳۷\rightarrow c_۱=-۷۵\ ,\ \begin{cases}۲۵a_۲+۵b_۲+c_۲=۱۳۴\\ ۱۶a_۲+۴b_۲+c_۲=۷۳\end{cases}\rightarrow ۹a_۲+b_۲=۶۱\rightarrow\begin{cases}۹a_۲+b_۲=۶۱\\ ۸a_۲+b_۲=۳۷\end{cases}$$

$$a_۲=۲۴\ ,\ b_۲=-۱۵۵\Rightarrow c_۲=۳۰۹\Rightarrow s(x)=\begin{cases}۳۷x-۷۵ & :\ ۳\le x\le ۴\\ ۲۴x^۲-۱۵۵x+۳۰۹ & :\ ۴\le x\le ۵\end{cases},\ s(۴/۵)=۹۷/۵$$

$$f(۴/۵)=۱۰۰/۱۲۵\rightarrow E=۲/۶۲۵$$

۲-

$$\nabla=hD-\frac{h^۲}{۲!}D^۲+\frac{h^۳}{۳!}D^۳-+...\rightarrow\nabla\propto h$$

$$D^۲=\frac{۱}{h^۲}\left(\nabla+\frac{\nabla^۲}{۲}+\frac{\nabla^۳}{۳}+...\right)^۲=\frac{۱}{h^۲}\left[\nabla^۲+(\frac{\nabla^۲}{۲})^۲+۲(\nabla)(\frac{\nabla^۲}{۲})+۲(\nabla)(\frac{\nabla^۳}{۳})\right]=\frac{۱}{h^۲}(\nabla^۲+\nabla^۳+\frac{۱۱}{۱۲}\nabla^۴)$$

$$y''=\frac{۱۲\nabla^۲+۱۲\nabla^۳+۱۱\nabla^۴}{۱۲h^۲}\ ,\ \nabla^۲=y_i-۲y_{i-۱}+y_{i-۲}\ ,\ \nabla^۳=y_i-۳y_{i-۱}+۳y_{i-۲}-y_{i-۳}\ ,$$

$$\nabla^۴=y_i-۴y_{i-۱}+۶y_{i-۲}-۴y_{i-۳}+y_{i-۴}\rightarrow y''=\frac{۳۵y_i-۱۰۴y_{i-۱}+۱۱۴y_{i-۲}-۵۶y_{i-۳}+۱۱y_{i-۴}}{۱۲h^۲}$$

ارزیابی شتاب رشد جمعیت ایران در ۱۳۶۵ با فرمول فوق ممکن نیست. زیرا به جمعیت سال ۱۳۲۵ نیز وابسته است که مقدار آن را نداریم.

۳- مسئله ۱ بخش ج از فصل ۴ کتاب روشهای محاسبات عددی با روش رانگ-کوتای مرتبه ۲ ، پیراسته اویلر

چون خطا تقریبا برابر $۳h^۳=۰/۰۰۳$ است، دقت نتیجه دو رقم اعشار خواهد بود. پس محاسبات میانی با ۳ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$y'=\sin(۲x)-ytg(x)\quad ,\ x\in[۰,۰/۵]\ ,\ h=۰/۱\ ,\ y(۰)=۱$$

$$y_{i+۱}=y_i+\frac{h}{۲}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+۱},y_i+hf(x_i,y_i))]$$

$$y_۱=y_۰+۰/۰۵[f(۰,۱)+f(۰/۱,۱+hf(۰,۱))]=۱+۰/۰۵[۰+f(۰/۱,۱)]=۱/۰۰۵$$

$$y_۲=y_۱+۰/۰۵[f(۰/۱,۱/۰۰۵)+f(۰/۲,۱/۰۰۵+۰/۱f(۰/۱,۱/۰۰۵))]=۱/۰۰۵+۰/۰۵[۰/۰۹۸+f(۰/۲,۱/۰۱۵)]$$

$$y_۲=۱/۰۱۹$$

$$y_۳=y_۲+۰/۰۵[f(۰/۲,۱/۰۱۹)+f(۰/۳,۱/۰۱۹+۰/۱f(۰/۲,۱/۰۱۹))]=۱/۰۱۹+۰/۰۵[۰/۱۸۳+f(۰/۳,۱/۰۳۷)]$$

$$y_۳=۱/۰۴۰$$

$$y_۴=y_۳+۰/۰۵[f(۰/۳,۱/۰۴)+f(۰/۴,۱/۰۴+۰/۱f(۰/۳,۱/۰۴))]=۱/۰۴+۰/۰۵[۰/۲۴۳+f(۰/۴,۱/۰۶۴)]$$

$$y_۴=۱/۰۶۶$$

$$y_۵=y_۴+۰/۰۵[f(۰/۴,۱/۰۶۶)+f(۰/۵,۱/۰۶۶+۰/۱f(۰/۴,۱/۰۶۶))]=۱/۰۶۶+۰/۰۵[۰/۲۶۷+f(۰/۵,۱/۰۹۳)]$$

$$y_۵=۱/۰۹۲$$

۴- مسئله ۱۴ از کتاب روشهای محاسبات عددی از فصل ۴ با روش رانگ-کوتای مرتبه ۲ ، پیراسته اویلر

$$x^۲y''-۲xy'+۲y=۰\quad ,\ x\in[۱,۱/۵]\ ,\ h=۰/۱\ ,\ y(۱)=۴\ ,\ y'(۱)=۹$$

چون خطا تقریبا برابر $۳h^۳=۰/۰۰۳$ است، دقت نتیجه دو رقم اعشار خواهد بود. پس محاسبات میانی با ۳ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$\begin{cases} y' = p = f_1(x,y,p) \\ p' = -\frac{2y}{x^2} + \frac{2p}{x} = f_2(x,y,p) \end{cases}, \begin{cases} y(1) = 4 \\ p(1) = 9 \end{cases}, \ x_0 = 1$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f_1(x_i,y_i,p_i) + f_1(x_{i+1}, y_i + hf_1(x_i,y_i,p_i), p_i + hf_2(x_i,y_i,p_i))] \\ p_{i+1} = p_i + \frac{h}{2}[f_2(x_i,y_i,p_i) + f_2(x_{i+1}, y_i + hf_1(x_i,y_i,p_i), p_i + hf_2(x_i,y_i,p_i))] \end{cases}$$

$i = 0$

$$\begin{cases} y_1 = y(1/1) = 4 + 0/05[f_1(1,4,9) + f_1(1/1, 4 + 0/1 f_1(1,4,9), 9 + 0/1 f_2(1,4,9))] \\ p_1 = p(1/1) = 9 + 0/05[f_2(1,4,9) + f_2(1/1, 4 + 0/1 f_1(1,4,9), 9 + 0/1 f_2(1,4,9))] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = y(1/1) = 4 + 0/05[9 + 9 + 0/1(-\frac{8}{1} + \frac{18}{1})] = 4/950 \\ p_1 = p(1/1) = 9 + 0/05[(-\frac{8}{1} + \frac{18}{1}) + (-\frac{9/8}{(1/1)^2} + \frac{20}{1/1})] = 10/004 \end{cases}$$

$i = 1$

$$\begin{cases} y_2 = y(1/2) = 4/95 + 0/05[f_1(1/1, 4/95, 10/004) + \\ f_1(1/2, 4/95 + 0/1 f_1(1/1, 4/95, 10/004), 10/004 + 0/1 f_2(1/1, 4/95, 10/004))] = 6/000 \\ p_2 = p(1/2) = 10/004 + 0/05[f_2(1/1, 4/95, 10/004) + \\ f_2(1/2, 4/95 + 0/1 f_1(1/1, 4/95, 10/004), 10/004 + 0/1 f_2(1/1, 4/95, 10/004))] = 11/008 \end{cases}$$

$i = 2$

$$\begin{cases} y_3 = y(1/3) = 6 + 0/05[f_1(1/2, 6, 11/008) + \\ f_1(1/3, 6 + 0/1 f_1(1/2, 6, 11/008), 11/008 + 0/1 f_2(1/2, 6, 11/008))] = 7/151 \\ p_3 = p(1/3) = 11/008 + 0/05[f_2(1/2, 6, 11/008) + \\ f_2(1/3, 6 + 0/1 f_1(1/2, 6, 11/008), 11/008 + 0/1 f_2(1/2, 6, 11/008))] = 12/012 \end{cases}$$

$i = 3$

$$\begin{cases} y_4 = y(1/4) = 7/151 + 0/05[f_1(1/3, 7/151, 12/012) + \\ f_1(1/4, 7/151 + 0/1 f_1(1/3, 7/151, 12/012), 12/012 + 0/1 f_2(1/3, 7/151, 12/012))] = 8/402 \\ p_4 = p(1/4) = 12/012 + 0/05[f_2(1/3, 7/151, 12/012) + \\ f_2(1/4, 7/151 + 0/1 f_1(1/3, 7/151, 12/012), 12/012 + 0/1 f_2(1/3, 7/151, 12/012))] = 13/016 \end{cases}$$

$i = 4$

$$\begin{cases} y_5 = y(1/5) = 8/402 + 0/05[f_1(1/4, 8/402, 13/016) + \\ f_1(1/5, 8/402 + 0/1 f_1(1/4, 8/402, 13/016), 13/016 + 0/1 f_2(1/4, 8/402, 13/016))] = 9/754 \\ p_4 = p(1/5) = 13/016 + 0/05[f_2(1/4, 8/402, 13/016) + \\ f_2(1/5, 8/402 + 0/1 f_1(1/4, 8/402, 13/016), 13/016 + 0/1 f_2(1/4, 8/402, 13/016))] = 14/020 \end{cases}$$