جواب تمرین سری سوم

۱- مسئله ۶ از فصل ۵ کتاب روشهای محاسبات عددی

روش نقطه میانی مرکب : $I=\int_{۰}^{۲}\ln(x+۱)dx\ ,\ f(x)=\ln(x+۱)\to f'(x)=\frac{۱}{x+۱}\to f''(x)=\frac{-۱}{(x+۱)^{۲}}\to M_{۲}=-۱$

$$E<۰/۰۰۵\to n>\sqrt{\frac{M_{۲}(b-a)^{۳}}{۲۴\Delta I}}=\sqrt{\frac{۲(۲-۰)^{۳}}{۲۴(۰/۰۰۵)}}=۱۱/۵۵\to n\geq ۱۲\to \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱}{۶}$$

$$A=\Delta x\left[f(x_{۰}+\frac{\Delta x}{۲})+f(x_{۱}+\frac{\Delta x}{۲})+\ldots+f(x_{n-۱}+\frac{\Delta x}{۲})\right]$$

$$A=\frac{۱}{۶}\left[f(\frac{۱}{۱۲})+f(\frac{۱}{۴})+f(\frac{۵}{۱۲})+f(\frac{۷}{۱۲})+f(\frac{۳}{۴})+f(\frac{۱۱}{۱۲})+f(\frac{۱۳}{۱۲})+f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۱۷}{۱۲})+f(\frac{۱۹}{۱۲})+f(\frac{۷}{۴})+f(\frac{۲۳}{۱۲})\right]$$

$$A=\frac{۱}{۶}[۰/۰۸۰+۰/۲۲۳+۰/۳۴۸+۰/۴۶۰+۰/۵۶۰+۰/۶۵۱+۰/۷۳۴+۰/۸۱۱+۰/۸۸۲+۰/۹۴۹+۱/۰۱۲+۱/۰۷۰]$$

$$A=۱/۲۹۷$$

روش نقطه میانی اصلاح شده :

$$E=\frac{(b-a)^{۳}}{۲۴n^{۲}}f''(\varepsilon)=\frac{(b-a)h^{۲}}{۲۴}f''(\varepsilon)\to CM=M+\frac{h^{۲}}{۲۴}[f'(b)-f'(b)]=۱/۲۹۷+\frac{\frac{۱}{۳۶}}{۲۴}[\frac{۱}{۳}-۱]=۱/۲۹۶$$

روش سیمسون مرکب :

$$I=\int_{۰}^{۲}\ln(x+۱)dx\ ,\ f(x)=\ln(x+۱)\to f'(x)=\frac{۱}{x+۱}\to f''(x)=\frac{-۱}{(x+۱)^{۲}}\to f'''(x)=\frac{۲}{(x+۱)^{۳}}\to$$

$$f^{(۴)}(x)=\frac{-۶}{(x+۱)^{۴}}\to M_{۴}=۶\ ,\ E<۰/۰۰۵\to\ \to\ \ n\geq\sqrt[۴]{\frac{M_{۴}(b-a)^{۵}}{۱۸۰\Delta I}}=\sqrt[۴]{\frac{۶(۲-۰)^{۵}}{۱۸۰(۰/۰۰۵)}}=۳/۸\to n\geq ۴$$

$$\to\Delta x=\frac{b-a}{n}=۰/۵\ ,\ A=\frac{\Delta x}{۳}[f(x_{۰})+۴f(x_{۱})+۲f(x_{۲})+۴f(x_{۳})+۲f(x_{۴})+\cdots+۴f(x_{n-۱})+f(x_{n})]$$

$$A=\frac{۱}{۶}[f(۰)+۴f(۰/۵)+۲f(۱)+۴f(۱/۵)+f(۲)]=A=\frac{۱}{۶}[۰+۱/۶۲۲+۱/۳۸۶+۳/۶۶۵+۱/۰۹۹]=۱/۲۹۵$$

روش سیمسون اصلاح شده :

$$CS_{n}(f)=S_{n}(f)-\frac{h^{۴}}{۱۸۰}[f'''(b)-f'''(a)]=۱/۲۹۵-\frac{(۰/۵)^{۴}}{۱۸۰}[\frac{۲}{۲۷}-۲]=۱/۲۹۶$$

البته در هر دو روش بهتر است، در حالت اصلاح شده محاسبه را با بیش از ۳ رقم اعشار بکار برد تا بتوان دقت آن را ارزیابی کرد.

۲- مسئله ۹ از فصل ۵ کتاب روشهای محاسبات عددی

$$Si(۱)=\int_{۰}^{۱}\frac{\sin(t)}{t}dt\ ,\ t=k_{۱}x+k_{۲}\to\begin{cases}۰=-k_{۱}+k_{۲}\\ ۱=k_{۱}+k_{۲}\end{cases}\to k_{۱}=k_{۲}=۰/۵\to t=\frac{x+۱}{۲}$$

$$\int_{۰}^{۱}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\frac{\sin(۰/۵x+۰/۵)}{۰/۵x+۰/۵}dx\to f(x)=\frac{\sin(۰/۵x+۰/۵)}{x+۱}$$

روش گوس-لزاندر دو نقطه ای : $\int_{-۱}^{۱}f(x)dx\simeq f(\frac{-۱}{\sqrt{۳}})+f(\frac{۱}{\sqrt{۳}})=\frac{\sin(\frac{-۱}{۲\sqrt{۳}}+۰/۵)}{\frac{-۱}{\sqrt{۳}}+۱}+\frac{\sin(\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۰/۵)}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}+۱}$

$= ۰/۴۹۶۲۸۶۷۸۴۴ + ۰/۴۴۹۷۵۴۳۵۲۵ = ۰/۹۴۶۰۴۱۱۳۶۹$

روش گوس-لزاندر سه نقطه ای :

$$P_۳(x) = \frac{۱}{۲^۳ ۳!}\frac{d^۳}{dx^۳}[(x^۲-۱)^۳] = ۰ \to \frac{d^۳}{dx^۳}[x^۶ - ۳x^۴ + ۳x^۲ - ۱] = ۰ \to \frac{d^۲}{dx^۲}[۶x^۵ - ۱۲x^۳ + ۶x] = ۰ \to$$

$$\frac{d}{dx}[۳۰x^۴ - ۳۶x^۲ + ۶] = ۰ \to ۱۲۰x^۳ - ۷۲x = ۰ \to x = -\sqrt{۰/۶}\ ,\ x = ۰\ ,\ x = \sqrt{۰/۶}$$

$$P_۲(x) = \frac{۱}{۲^۲ ۲!}\frac{d^۲}{dx^۲}[(x^۲-۱)^۲] = \frac{۱}{۸}\frac{d^۲}{dx^۲}[(x^۴ - ۲x^۲ + ۱)] = \frac{۱}{۸}\frac{d}{dx}[(۴x^۳ - ۴x)] = \frac{۱}{۸}(۱۲x^۲ - ۴)$$

$$\omega_i = \frac{۲(۱-x_i^۲)}{n^۲[P_{n-۱}(x_i)]^۲} \to \omega_۱ = \frac{۲(۱-۰/۶)}{۳^۲\frac{۱}{۶۴}[۱۲(۰/۶)-۴)]^۲} = \frac{۵}{۹} = \omega_۳\ ,\ \omega_۲ = \frac{۲(۱-۰)}{۳^۲\frac{۱}{۶۴}[۱۲(۰)-۴)]^۲} = \frac{۸}{۹}$$

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \simeq \frac{۵}{۹}f(-\sqrt{۰/۶}) + \frac{۸}{۹}f(۰) + \frac{۵}{۹}f(-\sqrt{۰/۶}) = \frac{۵}{۹}\frac{\sin(۰/۵(-\sqrt{۰/۶})+۰/۵)}{-\sqrt{۰/۶}+۱} + \frac{۸}{۹}\frac{\sin(۰/۵)}{۱}$$
$$+ \frac{۵}{۹}\frac{\sin(۰/۵(\sqrt{۰/۶})+۰/۵)}{\sqrt{۰/۶}+۱}$$

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \simeq ۰/۲۷۷۱۹۰۱۱۱۱ + ۰/۴۲۶۱۵۶۰۳۴۳ + ۰/۲۴۲۷۳۶۹۸۸۷ = ۰/۹۴۶۰۸۳۱۳۴۱$$

۳- بخش الف مسئله ۱۳ از فصل ۶ کتاب روشهای محاسبات عددی

$$\begin{cases} ۳x - ۲y + ۴z = ۱۲ \\ -۹x + ۶y - ۱۲z = k \end{cases} \to \begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۴ & ۱۲ \\ -۹ & ۶ & -۱۲ & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۲}{۳} & \frac{۴}{۳} & ۴ \\ -۹ & ۶ & -۱۲ & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۲}{۳} & \frac{۴}{۳} & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳۶+k \end{bmatrix} \to$$

$$\text{if } ۳۶+k \neq ۰ \to \text{rank}(A) = ۱ \neq \text{rank}(Ab) = ۲ \Rightarrow \text{no answer}$$

$$\text{if } ۳۶+k = ۰ \to \text{rank}(A) = ۱ = \text{rank}(Ab) \to \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۲}{۳} & \frac{۴}{۳} & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \to \text{proper answer} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\text{general answer}: \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۲}{۳} & \frac{۴}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \to x - \frac{۲}{۳}y + \frac{۴}{۳}z = ۰ \to ۳ - \text{rank}(A) = ۲ = \text{number of general ans.}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -\frac{۴}{۳} \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_۱\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_۲\begin{bmatrix} -\frac{۴}{۳} \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

-۴

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{cases} ۱y_۱ = ۲ \rightarrow y_۱ = ۲ \\ ۲y_۱ + ۱y_۲ = -۱ \rightarrow y_۲ = -۵ \\ -y_۱ + ۱y_۳ = ۱ \rightarrow y_۳ = ۳ \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \\ ۳ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} ۳x_۳ = ۳ \rightarrow x_۳ = ۱ \\ -۲x_۲ + x_۳ = -۵ \rightarrow x_۲ = ۳ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ = ۲ \rightarrow x_۱ = -۳ \end{cases}$$